

## روش رهایی پویا برای محاسبه بار کمانشی قاب‌ها

جواد علامتیان\*<sup>۱</sup> و سیدمحمد حسینی نژاد گوشیک<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشیار گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد  
<sup>۲</sup> کارشناس ارشد گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد

(دریافت: ۹۴/۵/۳۰، پذیرش: ۹۵/۴/۲۴، نشر آنلاین: ۹۵/۴/۲۴)

### چکیده

محاسبه بار کمانشی سازه‌ها با شیوه‌های کلاسیک و بررسی دترمینان ماتریس سختی دشوار است. در این مقاله، روش رهایی پویای صریح برای تعیین بار کمانشی قاب‌ها به کار می‌رود. نخست، چگونگی محاسبه بار کمانشی با روش‌های متداول بیان می‌شود. سپس، شیوه رهایی پویا و رابطه‌های آن معرفی می‌گردند. در ادامه، راهکار نوینی بر پایه نمودار بار-تغییر مکان روش رهایی پویا برای محاسبه نخستین بار کمانشی سازه‌ها پیشنهاد می‌شود. برای نشان دادن توانایی شیوه پیشنهادی در محاسبه بار کمانشی، چندین سازه شامل ستون‌ها و قاب‌های دو بعدی تحلیل غیرخطی هندسی می‌شوند. نتایج عددی کارایی مناسب شیوه رهایی پویا را در تعیین بار کمانشی نشان می‌دهد، به گونه‌ای که کوچک‌ترین بار کمانشی سازه به صورت ساده در دسترس قرار می‌گیرد.

**کلیدواژه‌ها:** روش رهایی پویا، بار کمانش، عامل ساختگی، قاب، ضریب بار.

### ۱- مقدمه

رهایی پویا را بهبود دادند. اولین کاربرد رهایی پویا در تحلیل سازه‌ها به راشتن باز می‌گردد که این روش برای تحلیل غیرخطی هندسی صفحه‌های خمشی استفاده کرد (Rushton, ۱۹۶۸). علاوه بر این، وی این شیوه را برای مسأله‌های تحلیل تنش و تحلیل پس از کمانش صفحات نیز به کار برد (Rushton, ۱۹۶۹).

Brotton و Brew جرم هر درجه آزادی را متناسب با درایه قطری آن در ماتریس سختی به کار بردند و با استفاده از آن به تحلیل خطی و غیرخطی قاب‌ها پرداختند (Brotton و Brew, ۱۹۷۱).

Wood نشان داد که نرخ همگرایی رهایی پویا، از روش‌های نیمه تکراری بیشتر است (Wood, ۱۹۷۱).

در پژوهشی دیگر، Bunce با استفاده از اصل ریلی میرایی بحرانی را به دست آورد (Bunce, ۱۹۷۲).

Papadrakakis روشی خودکار برای یافتن کمیت‌های تکراری رهایی پویا، شامل جرم و میرایی ساختگی، پیشنهاد کرد (Papadrakakis, ۱۹۸۱).

Underwood نیز با ثابت پنداشتن گام زمانی ساختگی، یکی دیگر از رابطه سازی‌های رهایی پویا را به دست آورد (Underwood, ۱۹۸۳).

روش‌های تحلیل خطی برای سازه‌های با رفتار غیرخطی مناسب نمی‌باشند. به همین دلیل، در تحلیل‌های غیرخطی از شیوه‌های تکراری استفاده می‌کنند. فرایندهای تکراری به دو گروه صریح و ضمنی تقسیم می‌شوند. برای یافتن پاسخ در راهکاری صریح از نیروی داخلی و در روش‌های ضمنی از ماتریس سختی استفاده می‌گردد.

یکی از روش‌های تحلیل غیرخطی سازه‌ها، شیوه رهایی پویا (Dynamic Relaxation) است که در دسته فرایندهای صریح قرار دارد. این راهکار را نخستین بار Otter و Day مطرح کردند (Day, Otter, ۱۹۶۵؛ Otter و Day, ۱۹۶۰).

فرایند رهایی پویا، یک روش تکراری برای حل دستگاه معادله‌های هم‌زمان می‌باشد. این شیوه از قانون مرتبه دوم ریچاردسون به دست می‌آید که توسط Frankel گسترش داده شد (Frankel, ۱۹۵۰). جرم و میرایی ساختگی نقش اساسی در رهایی پویا دارند.

نخستین افرادی که جرم ساختگی را پیشنهاد نمودند Otter و Cassell بودند (Cassell و همکاران, ۱۹۶۸؛ Otter و همکاران, ۱۹۶۷). آن‌ها با استفاده از روش‌های عددی دینامیکی، تکرارهای

\* نویسنده مسئول؛ شماره تماس: ۰۵۱-۳۶۶۲۴۸۱۳

میلادی، علامتیان با استفاده از روش‌های تغییر مکانی، دو رابطه برای ضریب بار به دست آورد (Alamatian, ۲۰۱۳).

هدف این مقاله، استفاده از روش رهایی پویا برای محاسبه بار کمانشی سازه‌ها و مقایسه آن با پاسخ دقیق می‌باشد. از دیدگاه دانش پایداری سازه‌ها، بار کمانشی با برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریس سختی به دست می‌آید. در اینجا، ماتریس سختی از دو بخش تشکیل شده است؛ یکی ماتریس سختی خطی و دیگری ماتریس سختی هندسی. فرایند متداول محاسبه بار کمانشی، حل یک مسأله مقدار ویژه غیرخطی می‌باشد که بسیار دشوار است. در این مقاله، از روش رهایی پویا برای تعیین بار کمانشی استفاده می‌شود. نخست، شیوه‌های متداول تعیین بار کمانشی ارائه می‌گردند. سپس، روش رهایی پویا و رابطه‌های آن می‌آیند. در ادامه، راهکار نوینی برای محاسبه بار کمانشی سازه‌ها با استفاده از روش رهایی پویا پیشنهاد می‌شود. شیوه پیشنهادی بسیار ساده است به گونه‌ای که بار کمانشی از رسم نمودار بار-تغییر مکان سازه به دست می‌آید. سرانجام، با حل نمونه‌های عددی، توانایی روش پیشنهادی با فرایند حل دقیق مقایسه می‌شود.

## ۲- بار کمانش

کمانش حالتی از گسیختگی است و هنگامی پدید می‌آید که سازه تحت تنش فشاری قرار گیرد. در این شرایط، گسیختگی نهایی ایجاد می‌شود و تغییر شکل بزرگ در سازه روی می‌دهد. هنگامی که یک عضو لاغر تحت فشار قرار گیرد، برای بارهای کوچک تغییر چشمگیری در هندسه و ظرفیت باربری آن رخ نمی‌دهد. با افزایش بار و رسیدن آن به مقدار بحرانی، سازه به طور ناگهانی تغییر شکل می‌دهد که به آن، کمانش گویند (Deshpande, ۲۰۱۰). کمانش تا پیش از ایجاد، بدون هیچ نشانه و اثری است. از دیدگاه دانش پایداری سازه‌ها، با افزایش بار فشاری، سختی عضو کاهش می‌یابد به گونه‌ای که در حالت کمانش، سختی عضو صفر می‌گردد.

رفتار پس کمانشی سازه غیرخطی است. در یک قاب ساده مانند قاب پرتال، کمانش یک ستون منجر به ناپایداری کل قاب می‌شود. در قاب‌های پیچیده، کمانش یک عضو فشاری نمی‌تواند نشانگر ناپایداری کل قاب باشد. این حالت کمانش محلی نام دارد. بنابراین، برای قاب‌های ساده می‌توان، با قضاوت مهندسی بار کمانش یک عضو فشاری خاص را پیدا کرد و براساس آن، بار کمانشی قاب را به دست آورد. در قاب‌های پیچیده این فرایند شدنی نیست (Chajes, ۱۹۷۴). بنابراین، ویژگی‌های روش مناسب برای تحلیل کمانشی یک سازه به شرح زیر است؛ نخست این که، قابلیت استخراج بار بحرانی قاب‌های پیچیده را داشته باشد؛ دوم این که بتواند یک تحلیل کیفی از رفتار پایداری قاب ارائه دهد؛ و

رابطه‌سازی ضمنی رهایی پویا را Felippa انجام داد (Felippa, ۱۹۸۲).

Hook و Rushton به تحلیل کمانشی تیرها و صفحات پرداختند (Hook و Rushton, ۱۹۷۵).

Zhang و همکارش، رابطه جدیدی برای میرایی به دست آوردند (Yu و Zhang, ۱۹۸۹). وی از اصل ریلی برای تعیین کمینه فرکانس استفاده کرد.

Qiang رابطه‌هایی برای میرایی و زمان ساختگی تعیین کرد (Qiang, ۱۹۸۸).

Zhang و همکاران الگوی میرایی گرهی را ارائه دادند (Zhang و همکاران, ۱۹۹۴). Wittrick و Turvey رفتار پس کمانشی صفحات چند لایه را بررسی کردند (Wittrick و Turvey, ۱۹۷۳). تحلیل کمانشی و پس کمانشی صفحات را کدخدایان و همکاران انجام دادند (Kadkhodayan و همکاران, ۱۹۹۷). آن‌ها از معیارهای دینامیکی پایداری و روش رهایی پویا به طور هم‌زمان استفاده نمودند.

Munjiza و همکاران، نگره‌های گوناگون میرایی را در رابطه سازی رهایی پویا بررسی کردند (Munjiza, ۱۹۹۶؛ Munjiza و همکاران, ۱۹۹۸).

علامتیان براساس تحلیل نموی، رابطه‌های جدیدی برای جرم ساختگی در رهایی پویای جنبشی ارائه داد (Alamatian, ۲۰۱۲). کدخدایان و همکاران با کمینه کردن نیروهای پسماند، یک گام زمانی بهبود یافته پیشنهاد کردند (Kadkhodayan و همکاران, ۲۰۰۸). رضایی پزند و علامتیان روش رهایی پویا را برای تحلیل دینامیکی غیرخطی به کار بردند (Alamatian و Rezaiee, ۲۰۰۸). روش نوین این محققان، خطاهای تحلیل دینامیکی را کاهش می‌دهد. علاوه بر این، این پژوهشگران رابطه‌های جدیدی برای میرایی و جرم ساختگی پیشنهاد کردند (Rezaiee و Alamatian, ۲۰۱۰). رضایی پزند و همکاران با کمینه کردن انرژی پسماند، گام زمانی ساختگی نوینی ارائه نمودند (Rezaiee و همکاران, ۲۰۱۲). با کمینه نمودن خطا بین دو گام متوالی، رضایی پزند و همکاران روش دیگری برای محاسبه میرایی ساختگی به دست آوردند (Rezaiee و همکاران, ۲۰۱۱).

Ramesh و Krishnamoorthy با استفاده از نمو جابه‌جایی در تکرارهای رهایی پویا، ناحیه‌های بازگشتی بار را پیمودند (Ramesh و Krishnamoorthy, ۱۹۹۳). این پژوهشگران روش طول قوس متغیر را با رهایی پویا ترکیب کردند و از آن برای گذر از نقطه‌های حدی تغییر مکان استفاده نمودند (Ramesh و Krishnamoorthy, ۱۹۹۴).

Lee و همکاران ترکیب روش طول قوس و رهایی پویای جنبشی را استفاده کردند (Lee و همکاران, ۲۰۱۱). با این روش، مسیر پس کمانشی سازه‌ها پیموده می‌شود. در سال ۲۰۱۳

ضریب‌ها، نیروی محوری عضو با رابطه‌های غیرخطی وارد می‌گردد (Chajes, ۱۹۷۴). طول عضو و جابجایی نسبی دو سر عضو، به ترتیب، با  $L$  و  $A_{ij}$  نمایش داده شده می‌شوند. باید دانست کمیت  $A_{ij}$  در تیرها صفر است. این عامل تنها در ستون‌ها ظاهر می‌گردد. معادله‌های روش شیب-افت، برای هر عضو نوشته می‌شوند و در رابطه‌های تعادل لنگر هر گره به کار می‌روند. اگر سازه دارای حرکت جانبی باشد، به شرط‌های اضافی برای به دست آوردن پاسخ نیاز می‌باشد. در چنین شرایطی، از معادله تعادل برش نیز استفاده می‌شود. معادله مشخصه کلی با برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب معادله‌های تعادل به دست می‌آید. بار بحرانی، مقدار ویژه معادله مشخصه است. در ادامه، مراحل تعیین بار بحرانی با روش شیب-افت می‌آید:

- ۱- تحلیل اولیه سازه و تعیین نیروهای محوری در داخل اعضاء بر حسب بار وارده اسمی؛
  - ۲- تعیین لنگرهای انتهایی اعضاء با استفاده از روابط شیب-افت؛
  - ۳- نوشتن معادلات تعادل لنگر در گره‌های آزاد قاب؛
  - ۴- تعیین یک دستگاه معادلات برحسب دوران‌های گره‌های آزاد  $\Delta$  و  $\Delta$  های مربوط به هر عضو؛
  - ۵- نوشتن درایه‌های دستگاه معادله‌ها بر حسب ضریب‌های وابسته به نیروی محوری عضوها (ضریب‌های  $\alpha$ )؛
  - ۶- برابر صفر قرار دادن دترمینان ضرایب و به دست آوردن بارهای بحرانی و مودهای کمانش قاب‌ها.
- فرایند شیب-افت را می‌توان برای محاسبه بار بحرانی قاب‌ها به کار برد. ماتریس ضرایبی که از شرط‌های تعادل به دست می‌آید یک ماتریس  $n \times n$  خواهد بود. در اینجا،  $n$  تعداد درجه‌های آزادی قاب است. با افزایش تعداد درجه‌های آزادی سازه، این شیوه به دشواری انجام می‌پذیرد (Chen و Lui, ۱۹۸۷).

### ۲-۳- روش ماتریس سختی

در شیوه متداول تحلیل ماتریسی سازه‌ها، سختی عضو با چشم پوشی از اثر نیروی محوری و در نظر گرفتن رفتار خمشی عضو حساب می‌شود. در دانش پایداری سازه‌ها، اثر تغییرشکل‌های محوری و مؤلفه‌های وابسته به خمش و برش هم‌زمان در ماتریس سختی عضو وارد می‌گردند و قاب‌ها با فرض رفتار غیرخطی هندسی ناشی از  $P-\Delta$  تحلیل می‌شوند. با چنین فرایندی، ماتریس سختی هر عضو از دو بخش سختی خطی و سختی هندسی تشکیل می‌گردد.

$$K = K_L + K_G \quad (۶)$$

در اینجا،  $K_L$  و  $K_G$  به ترتیب ماتریس‌های سختی خطی و هندسی قاب می‌باشند. برای به دست آوردن درایه‌های ماتریس

سوم این که برنامه نویسی کامپیوتری و شیوه اجرایی آن ساده باشد.

برای به دست آوردن بار بحرانی قاب لازم است پایداری کل قاب بررسی شود. هنگامی که نیرو به حد کمانش رسد یک نقص کوچک می‌تواند باعث به وجود آمدن تغییر شکل‌های جانبی بزرگ در قاب گردد. محاسبه بار کمانشی با سه روش امکان پذیر است.

### ۲-۱- روش معادلات دیفرانسیل

روش معادلات دیفرانسیل را می‌توان برای یک قاب پیچیده استفاده نمود. در این روش، معادلات دیفرانسیل اعضاء ستون و تیر به صورت زیر است:

$$\frac{d^2 y_c}{dx_c^2} + k^2 y_c = f_1(x_c) \quad , \quad k^2 = \frac{P}{EI_c} \quad (۱)$$

$$EI_b \frac{d^2 y_b}{dx_b^2} = f_2(x_b) \quad (۲)$$

در این جا،  $P$ ،  $E$  و  $I$ ، به ترتیب، بار فشاری، مدول الاستیسیته و ممان اینرسی تیر-ستون می‌باشند. زیرنویس‌های  $b$  و  $c$ ، به ترتیب، به تیر و ستون اشاره دارند. تابع  $f$  نیز به شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری وابسته است. پاسخ معادله‌های (۱) و (۲) به شکل کلی زیر هستند:

$$y_c = A \sin(kx_c) + B \cos(kx_c) + g_1(x_c) \quad (۳)$$

$$y_b = g_2(x_b) \quad (۴)$$

ثابت‌های دلخواه  $A$  و  $B$  موجود در جواب عمومی هر معادله دیفرانسیل با استفاده از شرایط مرزی و شرایط تحلیلی هر عضو به دست می‌آیند. تابع  $g$  پاسخ خصوصی دستگاه معادله‌های (۱) و (۲) می‌باشد. سپس با نوشتن روابط پیوستگی در گره‌ها، معادله‌های مشخصه به دست خواهند آمد. مقدار ویژه معادله مشخصه، بار بحرانی قاب است (Chen و Lui, ۱۹۸۷).

### ۲-۲- روش شیب-افت

رابطه شیب-افت در حالت کلی، به شکل زیر است (Chajes, ۱۹۷۴):

$$M_{ij} = \frac{EI}{L} \left[ \alpha_n \theta_i + \alpha_f \theta_j - (\alpha_n + \alpha_f) \frac{\Delta_{ij}}{L} \right] \quad (۵)$$

در روش شیب-افت اصلاح شده، ضریب‌های  $\alpha$  افزون بر مشخصات هندسی مانند چگونگی تغییر سطح مقطع در طول عضو، به نیروی محوری عضو نیز وابسته‌اند. به سخن دیگر، در این

می‌دهند. علاوه بر این،  $S$ ،  $F$  و  $P$ ، به ترتیب، ماتریس سختی، بردارهای نیروی داخلی و بار خارجی می‌باشند. برای رابطه‌سازی روش‌های پویا از روش‌های عددی استفاده می‌گردد. با استفاده از تفاوت‌های محدود مرکزی، می‌توان رابطه‌های زیر را برای تکرارهای این روش به دست آورد:

$$x_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2m_{ii}^n - c_{ii}^n \tau^n}{2m_{ii}^n + c_{ii}^n \tau^n} x_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2\tau^n}{2m_{ii}^n + c_{ii}^n \tau^n} (p_i^n - f_i^n) \quad (12)$$

$$X_i^{n+1} = X_i^n + \tau^{n+\frac{1}{2}} \dot{X}_i, \quad i=1,2,\dots,q \quad (13)$$

در این جا،  $m_{ii}^n$ ،  $c_{ii}^n$ ،  $\tau^n$  و  $f_i^n$ ، به ترتیب، درایه قطری  $i$  ام از ماتریس‌های جرم و میرایی ساختگی، گام زمانی ساختگی و درایه  $i$  ام از بردار نیروی داخلی در تکرار  $n$  ام رهایی پویا می‌باشند. بارخارجی و تعداد درجه‌های آزادی، به ترتیب با  $p_i$  و  $q$  نشان داده شده‌اند.

رضایی پزند و علامتیان با کمینه کردن خطای تغییر مکان و استفاده از نگره دایره گرشگورین، جرم ساختگی زیر را پیشنهاد کردند (Rezaiee و Alamatian، ۲۰۱۰):

$$m_{ii} = \max \left[ \frac{(\tau^n)^2}{2} s_{ii}, \frac{(\tau^n)^2}{4} \sum_{j=1}^q |s_{ij}| \right] \quad (14)$$

درایه‌های ماتریس سختی مماسی برابر با  $K_{ij}$  است. کوچک-ترین فرکانس سامانه دینامیکی ساختگی با استفاده از اصل ریلی به دست می‌آید (Zhang و Yu، ۱۹۸۹).

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{\mathbf{X}^T \mathbf{F}}{\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X}}} \quad (15)$$

بر این اساس، رضایی پزند و علامتیان، رابطه زیر را برای میرایی هر درجه آزادی پیشنهاد کردند (Rezaiee و Alamatian، ۲۰۱۰):

$$\mathbf{C}^n = \sqrt{\omega_{\min}^2 [4 - (\tau^n)^2] \omega_{\min}^2} \mathbf{M}^n \quad (16)$$

علاوه بر این، پژوهشگران رابطه‌هایی برای تعیین گام زمانی ساختگی ارائه داده‌اند (Kadkhodayan و همکاران، ۲۰۰۸؛ Rezaiee و همکاران، ۲۰۱۲). با وجود این، گام زمانی در بیشتر الگوریتم‌ها یک فرض می‌شود. در ادامه، از روش‌های پویا استفاده می‌گردد و شیوه نوینی برای محاسبه بار کمانشی سازه‌ها پیشنهاد می‌شود.

سختی در مختصات محلی، از تابع‌های درونیاب استفاده می‌شود. این تابع‌ها برای تغییر شکل‌های محوری  $N_u$  و برای خیزها و دوران‌ها  $N_w$  می‌باشند.

$$N_u = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$N_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ x - 2L\left(\frac{x}{L}\right)^2 + L\left(\frac{x}{L}\right)^3 & 0 \\ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ -L\left(\frac{x}{L}\right)^2 + L\left(\frac{x}{L}\right)^3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

درایه‌های ماتریس سختی نیز از تابع اولیه‌های زیر به دست می‌آیند. سطح مقطع عضوها با  $A$  نشان داده شده است.

$$K_L = EA \int_0^L \left( \frac{dN_u}{dx} \right)^T \left( \frac{dN_u}{dx} \right) dx + EI \int_0^L \left( \frac{d^2 N_w}{dx^2} \right)^T \left( \frac{d^2 N_w}{dx^2} \right) dx \quad (9)$$

$$K_G = P \int_0^L \left( \frac{dN_w}{dx} \right)^T \left( \frac{dN_w}{dx} \right) dx \quad (10)$$

درایه‌های هر یک از ماتریس‌های سختی خطی و هندسی در پیوست آمده است. سپس، با استفاده از ماتریس دوران، ماتریس سختی در محورهای کلی به دست می‌آید. ماتریس دوران در پیوست با نماد  $R$  می‌آید.

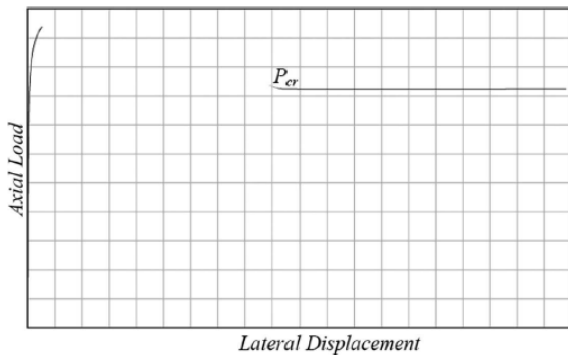
در این مقاله، شیوه نوینی برای محاسبه بار کمانشی سازه‌ها ارائه می‌گردد. این روش بر پایه استفاده از نمودار بار-تغییر مکان استوار است. این کار با شرح فرایند رهایی پویا انجام می‌پذیرد.

### ۳- روش‌های پویا

در روش‌های پویا، با افزودن نیروهای جرمی و میرایی ساختگی، دستگاه معادله‌های سازه ایستا را به فضای دینامیکی ساختگی منتقل می‌کنند (Alamatian، ۲۰۱۲).

$$M^n \ddot{\mathbf{X}}^n + C^n \dot{\mathbf{X}}^n + S^n \mathbf{X}^n = \mathbf{F}^n = \mathbf{P}^n \quad (11)$$

در این جا، ماتریس‌های جرم و میرایی ساختگی قطری به ترتیب با  $M$  و  $C$ ، نشان داده شده‌اند. بردارهای  $\mathbf{X}$ ،  $\dot{\mathbf{X}}$  و  $\ddot{\mathbf{X}}$ ، به ترتیب، جابه‌جایی، سرعت و شتاب را در  $n$  امین تکرار رهایی پویا نمایش



شکل ۱- نمودار بار- تغییر مکان در حالت کمانش سازه‌ها

در ادامه، با ثابت ماندن بار، تغییر مکان افزایش می‌یابد. در این حالت، بار کمانش همان مقدار بار ثابت می‌باشد که در شکل (۱) با  $P_{cr}$  نمایش داده شده است. یادآوری می‌شود با استفاده از این روش، بار کمانشی مورد اول به دست می‌آید. این فرایند شیوه نوین برای محاسبه بار کمانشی قاب‌ها و ستون‌ها می‌باشد. شایان توجه است در این روش بار کمانشی به راحتی از نمودار بار- تغییر مکان سازه در دسترس قرار می‌گیرد. در ادامه، کارایی این روش در تعیین بار کمانشی سازه‌ها بررسی می‌گردد.

باید دانست، نمودار بار- تغییر مکان مورد نیاز در این شیوه، با روش رهایی پویا رسم می‌گردد. این کار تنها با محاسبه‌های برداری انجام می‌پذیرد. بنابراین، فرایند پیشنهادی برای محاسبه بار کمانشی تنها با محاسبات برداری اجرا می‌شود. شایان توجه است، شیوه‌های متداول محاسبه بار کمانشی از محاسبات ماتریسی برای تعیین بار کمانش استفاده می‌کنند. این کاستی در روش پیشنهادی برطرف شده است.

در اینجا، یک روش عددی برای تخمین کوچکترین بار کمانشی سازه‌ها بر پایه روش رهایی پویا ارائه گردید. در سازه‌هایی که دارای نقطه انشعاب (چندشاخگی) می‌باشند، این نقطه همان نقطه انشعاب خواهد بود. چنانچه، سازه‌ای دارای مسیر ایستایی یگانه باشد (فاقد چند شاخگی)، با روش پیشنهادی می‌توان نخستین (کوچک‌ترین) نقطه حدی را یافت. بنابراین، مهم‌ترین توانایی شیوه پیشنهادی، تخمین موقعیت کوچک‌ترین نقطه انشعاب و یا نقطه حدی می‌باشد. این کار با فرایندی ساده و با دقت بسیار مناسب انجام می‌پذیرد. باید دانست، کشف این نقاط با پایش مسیر ایستایی و بررسی جهش‌های پدیدآمده در نمودار بار- تغییر مکان انجام می‌شود. بنابراین، برای یافتن موقعیت نقاط حدی و یا چندشاخگی، از واکنش واقعی و طبیعی روش‌های تحلیل سازه‌ها در مواجهه با این نقاط استفاده می‌گردد.

از سوی دیگر، اصلاح نمودار بار- تغییر مکان پس از نقطه‌های انشعاب یا حدی، با راهکارهای اصلاح ضریب بار مانند روش کمینه نیروی نامیزان، شیوه کمینه انرژی جنبشی، فرایند طول قوس و

#### ۴- شیوه پیشنهادی محاسبه بار کمانشی با روش رهایی پویا

پدیدآمدن ناحیه‌های بازگشتی بار و تغییر مکان در مسیر ایستایی سازه نشانه وجود نقطه حدی یا انشعاب در سازه می‌باشد. این ناحیه‌های بازگشتی سبب می‌گردند روش‌های متداول رهایی پویا توانایی به دست آوردن بار کمانشی را نداشته باشند. دلیل این کاستی این است که در رابطه سازی‌های رهایی پویا، بار خارجی در هر نمو ثابت است. از این رو، برای پیمایش مسیرهای ایستایی و به دست آوردن بار کمانش، بار خارجی متغیر فرض می‌گردد. در نتیجه، نیروی پسماند از رابطه (۱۷) به دست می‌آید:

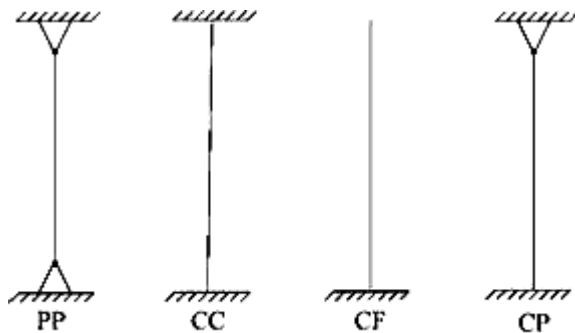
$$R^n = \lambda^n P^n - F^n \quad (17)$$

محاسبه بار کمانشی با روش رهایی پویا برپایه تعریف ضریب بار انجام می‌پذیرد. در این رابطه،  $\lambda$  ضریب بار می‌باشد. بر این اساس، در فرایند حل، نمو ضریب بار بسیار کوچک انتخاب می‌گردد. رضایی پژند و علامتیان با کمینه کردن نیروی پسماند ضریب بار زیر را پیشنهاد کردند (Alamatian و Rezaiee، ۲۰۱۱):

$$\lambda = \frac{P_{ref} T_F}{P_{ref} T_{P_{ref}}} \quad (18)$$

در این رابطه،  $P_{ref}$  بردار بار خارجی پایه می‌باشد. برای تعیین بار کمانشی در شیوه پیشنهادی، نخست یک نقص اولیه در سازه ایجاد می‌شود. این نقص می‌تواند در هر یک از درجه‌های آزادی سازه جزء بندی شده به وجود آید. با وجود این، مناسب است این نقص در یکی از درجه‌های آزادی وابسته به انتقال جانبی ایجاد شود. سپس، نمودار بار- تغییر مکان با روش رهایی پویا و ضریب بار متغیر رسم می‌گردد. به دلیل وجود نقص اولیه، نمودار بار- تغییر مکان در هنگام رسیدن به نقطه کمانشی، می‌جهد. جهش پدیدآمده در نمودار بار- تغییر مکان نشان دهنده وجود نقطه حدی و یا نقطه انشعاب در سازه می‌باشد. به سخن دیگر، در شیوه پیشنهادی با تشخیص دقیق محل پرش در مسیر ایستایی، می‌توان بار کمانشی را حساب کرد. با انجام چنین فرایندی، نخستین بار کمانشی سازه در دسترس قرار می‌گیرد.

شکل (۱) چگونگی به دست آوردن بار کمانشی یک قاب را نشان می‌دهد. در بخش‌های نخستین این نمودار، با افزایش بار، تغییر مکان نیز زیاد می‌شود. در نقطه‌ای از نمودار، به طور ناگهانی، با افزایش جزئی بار، افزایش چشم گیری در تغییر مکان به وجود می‌آید. شیوه پیشنهادی از این ویژگی استفاده می‌کند و با تشخیص نقطه جهش پدید آمده در مسیر ایستایی سازه، بار کمانشی را ارائه می‌دهد. به عنوان نمونه، در شکل (۱)، تغییر مکان ده برابر می‌گردد.



شکل ۲- شرایط تکیه‌گاهی گوناگون ستون

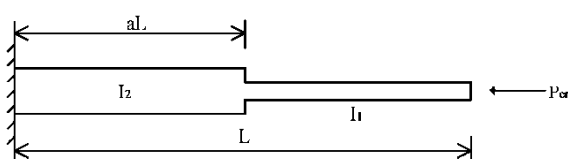
جدول ۱- بار بحرانی ستون با شرایط تکیه‌گاهی مختلف

شرایط تکیه‌گاهی	بار کمانش (نیوتن)		درصد خطا
	رهایی پویا	دقیق	
PP	۰/۷۹۷	۰/۷۹۰	۰/۸۹
CC	۳/۲۷	۳/۱۵۸	۳/۵۵
CF	۰/۱۹۸	۰/۱۹۷	۰/۵۱
CP	۱/۶۴۳	۱/۶۱۱	۱/۹۹

در جدول (۱)، مقدار بار بحرانی به دست آمده از روش رهایی پویا و پاسخ دقیق آن آمده است. پاسخ‌های به دست آمده درستی برنامه نوشته شده را نشان می‌دهد. جدول (۱) نشانگر کارایی مناسب شیوه رهایی پویا در تعیین بار کمانشی است. درصد خطای رهایی پویا نسبت به پاسخ دقیق کم‌تر از ۵ درصد می‌باشد. در این نمونه‌ها، با کاهش سختی ستون، خطای پاسخ روش رهایی پویا نسبت به پاسخ دقیق کم‌تر می‌شود.

### ۵-۲- ستون با مقطع غیر یکنواخت

در شکل (۳) ستونی با مقطع متغیر نشان داده شده است. Zebrowski و O'Rourke این ستون را برای دو مقدار متفاوت نسبت ممان اینرسی و براساس روش تفاوت‌های محدود تحلیل کرده‌اند (Zebrowski و O'Rourke, ۱۹۷۷). در این نمونه، ممان اینرسی  $I_1$  برابر  $۰/۶۶۶۷$  سانتی‌متر به چهار در نظر گرفته می‌شود. در جدول (۲) مقدارهای بار کمانشی به دست آمده از روش رهایی پویا، پاسخ دقیق بار کمانشی و درصد خطای روش پیشنهادی درج شده است (Zebrowski و O'Rourke, ۱۹۷۷).



شکل ۳- ستون با مقطع غیر یکنواخت

مانند این‌ها انجام می‌شود. این شیوه‌ها پیش از این، به صورت موفقیت‌آمیزی در روش رهایی پویا اعمال شده‌اند. باید دانست، هدف این مقاله، تخمین ساده و مناسب کوچک‌ترین بار کمانشی سازه‌ها می‌باشد که به آن پرداخته شده است. باید دانست، اصلاح نمودار بار- تغییر مکان سازه پس از کمانش، پیش از این با روش رهایی پویا انجام شده است و گزارش آن در مراجع معتبر موجود می‌باشد. از این رو، در این مقاله تنها شیوه پیشنهادی در تخمین بار کمانشی ارائه شده است. باید دانست، پس از تعیین بار کمانشی، می‌توان مسیر ایستایی پس کمانشی را با روش‌های موجود یافت. به سخن دیگر، فرایند پیشنهادی اثری در پیمایش مسیر ایستایی پس از کمانش ندارد.

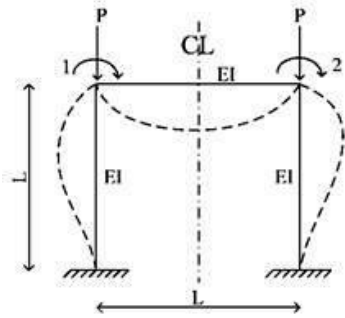
### ۵- نمونه‌های عددی

برای محاسبه بار کمانشی با شیوه پیشنهادی، یک برنامه کامپیوتری در محیط نرم‌افزار فرترن نوشته شده است. راستی آزمایی برنامه کامپیوتری با حل کارهای پژوهشی دیگر مقاله‌ها و نیز سنجش با پاسخ‌های دقیق انجام می‌پذیرد.

سپس، بار کمانشی نمونه‌های دیگر شامل ستون‌ها و قاب‌های دو بعدی که دارای رفتار غیرخطی هندسی می‌باشند حساب می‌شوند. برای رسم نمودار بار- تغییر مکان از شیوه رهایی پویا استفاده می‌گردد. گام زمانی ساختگی در همه تحلیل‌ها برابر یک فرض می‌گردد. افزون بر این، تغییر مکان در نخستین نمو برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. ایجاد نقص اولیه نیز در وسط یکی از ستون‌ها انجام می‌پذیرد. باید دانست برای به دست آوردن بار کمانشی، نمو ضریب بار برابر یک می‌باشد. از این رو، مقدار بار پایه کوچک فرض شده است و ضریب بار هدف، مقدار بزرگی پنداشته می‌شود. این مقدار بار پایه  $۰/۰۱$  نیوتن است. در تمامی نمونه‌های عددی، ضریب کشسانی، طول  $L$ ، سطح مقطع و ممان اینرسی عضوها به ترتیب،  $۱۲$  گیگاپاسکال،  $۱۰۰$  سانتی‌متر،  $۲$  سانتی‌متر مربع و  $۰/۶۶۶۷$  سانتی‌متر به چهار می‌باشند. افزون بر این، در مدل اجزا محدود، هر تیر و ستون با  $۵$  جزء الگوسازی می‌شود مگر آن که به تقسیم‌بندی دیگری اشاره شود.

### ۵-۱- ستون با شرایط تکیه‌گاهی گوناگون

نخستین نمونه برای راستی آزمایی برنامه کامپیوتری نوشته شده، یک ستون با شرایط تکیه‌گاهی مختلف است. شکل (۲) این ستون‌ها را نشان می‌دهد.



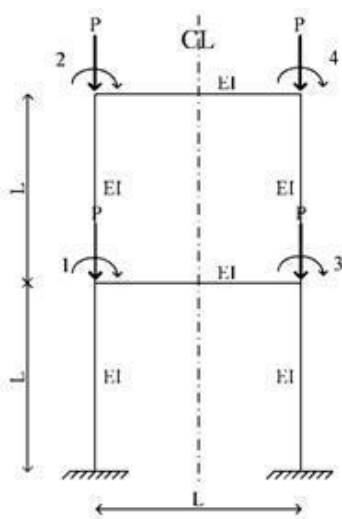
شکل ۴- قاب پرتال متقارن

۴-۵- قاب یک دهانه با دو طبقه

شکل (۵) یک قاب دو طبقه و یک دهانه را نشان می‌دهد (Salimbahrami و Kaveh، ۲۰۰۷). به علت تقارن در هندسه و بارگذاری، قاب دارای حرکت جانبی نیست و نیمی از قاب در برنامه مدل می‌گردد. مقدار بار کمانشی به دست آمده از حل دقیق ۱۰۰۸ نیوتن است. کاوه و سلیم بهرامی با تقسیم هر ستون و تیر به ترتیب به ۲ و ۳ جزء، پاسخ بار کمانشی را ۹۹۱/۳ نیوتن به دست آورده‌اند (Salimbahrami و Kaveh، ۲۰۰۷). بار کمانشی به دست آمده از شیوه پیشنهادی ۱۰۰۳ نیوتن است که سازگاری مناسبی با پاسخ روش کاوه و سلیم بهرامی دارد.

۵-۵- قاب دو دهانه بدون حرکت جانبی

دیگر نمونه عددی، قاب دو دهانه بدون حرکت جانبی می‌باشد که در شکل (۶) نشان داده شده است. نیمی از قاب مدل می‌گردد. به دلیل تقارن، می‌توان به جای ستونی که در وسط قرار دارد، یک تکیه گاه گیردار در گره مربوطه قرار داد.



شکل ۵- قاب یک دهانه با دو طبقه

جدول ۲- بار بحرانی ستون با مقطع غیر یکنواخت

درصد خطا	بار کمانش			O'Rourke و Zebrowski ۱۹۷۷	دقیق
	$I_1/I_2$	رهایی پویا	رهایی پویا		
۰/۳۴	۰/۲	۰/۱	۰/۲۹۵	۰/۲۹۱	۰/۲۹۴
۰/۸۳	۰/۴	۰/۱	۰/۴۸۴	۰/۴۷۵	۰/۴۸۰
۰/۸۹	۰/۶	۰/۱	۰/۹۰۸	۰/۸۸۱	۰/۹۰۰
۰/۵۲	۰/۸	۰/۱	۱/۷۲۷	۱/۶۵۴	۱/۷۱۸
۰	۰/۲	۰/۶	۰/۲۳۳	۰/۲۳۱	۰/۲۳۳
۰	۰/۴	۰/۶	۰/۲۷۳	۰/۲۷۰	۰/۲۷۳
۰	۰/۶	۰/۶	۰/۳۰۸	۰/۳۰۵	۰/۳۰۸
۰	۰/۸	۰/۶	۰/۳۲۶	۰/۳۲۳	۰/۳۲۶

خطای مقدارهای به دست آمده از شیوه پیشنهادی با پاسخ‌های دقیق بار کمانشی بسیار کوچک می‌باشد. همچنین، جدول (۲) نشان می‌دهد خطای بار کمانشی به دست آمده از رهایی پویا کم‌تر از روش O'Rourke و Zebrowski است.

برپایه دو نمونه حل شده، می‌توان دریافت دقت و کارایی شیوه پیشنهادی برای محاسبه بار کمانشی مناسب می‌باشد. لازم به یاد آوری است، به دلیل استفاده از فن اجزای محدود، در روش پیشنهادی سازه سخت‌تر مدل می‌شود. در نتیجه، بار بحرانی روش پیشنهادی بیشتر از دیگر روش‌ها است.

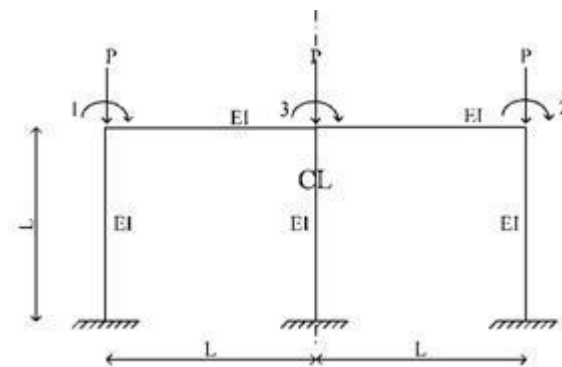
۵-۳- قاب پرتال متقارن

نمونه سوم یک قاب پرتال است که در شکل (۴) نشان داده شده است. دو بار به این قاب وارد می‌شود. این قاب را کاوه و سلیم بهرامی تحلیل کرده‌اند (Salimbahrami و Kaveh، ۲۰۰۷). قاب نشان داده شده دارای هندسه و بارگذاری متقارن است و بر این اساس حرکت جانبی ندارد. به دلیل تقارن، نیمی از قاب در برنامه مدل می‌شود.

مقدار بار کمانشی به دست آمده از حل دقیق، مقاله کاوه و روش رهایی پویا به ترتیب ۲۰۱۶، ۱۷۷۶/۸ و ۲۰۶۰ نیوتن می‌باشند. درصد خطای روش رهایی پویا نسبت به پاسخ دقیق ۲/۲ درصد است. کاوه و سلیم بهرامی هر ستون را به دو عضو تقسیم کرده بودند. با تقسیم هر ستون به دو عضو و حل با رهایی پویا، بار کمانشی ۲۰۵۷ به دست آمد که با پاسخ به دست آمده از تقسیم بندی هر ستون به ۵ عضو تفاوت چندانی ندارد. در حالی که درصد خطای روش کاوه و سلیم بهرامی، ۱۱/۸ درصد می‌باشد (Kaveh و Salimbahrami، ۲۰۰۷).

### ۵-۷- قاب دو دهانه با حرکت جانبی

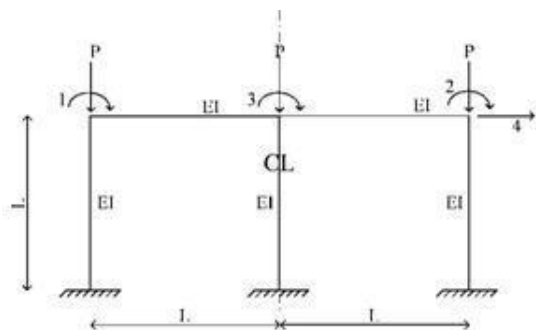
شکل (۸) قاب دو دهانه با حرکت جانبی را نشان می‌دهد که پیش از این بار کمانشی آن در حالت بدون حرکت جانبی به دست آمد. در هر سه گره بالاترین تراز، بار عمودی وارد می‌شود. این قاب دارای چهار درجه آزادی می‌باشد. کاوه و سلیم بهرامی بار کمانشی این قاب را  $7.6329EI/L^2$  به دست آورده‌اند که با قرار دادن خصوصیات مکانیکی و هندسی اعضا در رابطه، این مقدار  $610/63$  نیوتن به دست می‌آید (Kaveh و Salimbahrami, ۲۰۰۷). روش پیشنهادی پاسخ بار کمانشی را  $642/2$  نیوتن به دست می‌دهد که دارای سازگاری مناسب با حل دقیق است.



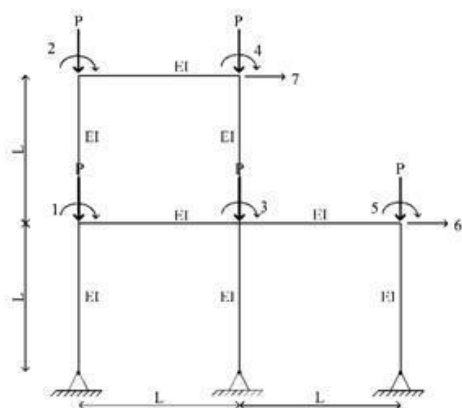
شکل ۶- قاب دو دهانه بدون حرکت جانبی

### ۵-۸- قاب دو طبقه شکسته

در آخرین نمونه، یک قاب دو طبقه شکسته تحلیل می‌شود و بار کمانشی آن به دست می‌آید. این قاب در شکل (۹) نشان داده شده است. در تمام گره‌های اتصال تیر به ستون بار عمودی وارد می‌شود. این سازه پس از جزء بندی هر عضو با پنج المان قابی، دارای ۴۰ عضو و ۱۱۴ درجه آزادی خواهد بود. بار کمانشی این قاب با استفاده از روش رهایی پویا ۹۲ نیوتن به دست آمد. باید دانست، بار کمانشی این نمونه با دیگر شیوه‌ها به دست نیامده است.



شکل ۸- قاب دو دهانه با حرکت جانبی

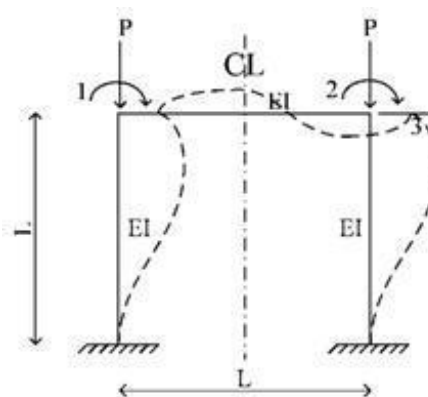


شکل ۹- قاب دو طبقه شکسته

پاسخ دقیق بار کمانش  $26.1545EI/L^2$  می‌باشد که با قرار دادن مشخصات اعضا در رابطه، بار کمانش  $2092/36$  نیوتن به دست می‌آید (Kaveh و Salimbahrami, ۲۰۰۷). بار کمانشی به دست آمده از روش رهایی پویا نیز ۲۱۱۰ نیوتن می‌باشد که خطای آن ۰/۸۴ درصد می‌باشد.

### ۵-۶- قاب پرتال با حرکت جانبی

نمونه‌هایی که تاکنون به آن‌ها پرداخته شد بدون حرکت جانبی بودند. به علت تقارن این قاب‌ها، نیمی از آن‌ها مدل شدند. در این نمونه، قاب پرتال دارای حرکت جانبی تحلیل می‌شود که در شکل (۷) نشان داده شده است. هر عضو این نمونه با پنج جزء قابی مدل‌سازی می‌گردد. پاسخ دقیق بار کمانش  $7.44EI/L^2$  می‌باشد. جای‌گذاری مشخصه‌های هندسی و مکانیکی در این رابطه، مقدار بار  $595/2$  نیوتن را به دست می‌دهد (Kaveh و Salimbahrami, ۲۰۰۷). بار کمانشی به دست آمده از شیوه پیشنهادی نیز ۶۲۱ نیوتن به دست آمده است که خطای آن نسبت به پاسخ دقیق ۴/۳۳ درصد می‌باشد.



شکل ۷- قاب پرتال با حرکت جانبی



Day AS, "An introduction to dynamic relaxation", The Engineer, 1965, 219, 218-221.

Deshpande S, "Buckling and post buckling of structural components", in Mechanical Engineering, 2010, United States, Texas, Ann Arbor.

Felippa CA, "Dynamic relaxation under general increment control", Mathematical Programming, 1982, 24, 103-133.

Frankel SP, "Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations", Math. Tables and Other Aids to Computation, 1950, 4 (30), 65-75.

Hook PM, Rushton KR, "Buckling of beams and plates onto an intermediate support studied by the dynamic relaxation method", The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 1975, 10 (3), 153-158.

Kadkhodayan M, Alamatian J, Turvey GJ, "A new fictitious time for the dynamic relaxation (DXDR) method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, 74 (6), 996-1018.

Kadkhodayan M, Zhang LC, Sowerby R, "Analyses of wrinkling and buckling of elastic plates by DXDR method", Computers & Structures, 1997, 65 (4), 561-574.

Kaveh A, Salimbahrami B, "Buckling load of symmetric plane frames using canonical forms", Comput. Struct., 2007, 85 (17-18), 1420-1430.

Lee KS, Han SE, Park T, "A simple explicit arc-length method using the dynamic relaxation method with kinetic damping", Computers & Structures, 2011, 89 (1-2), 216-233.

Munjiza A, "A Km proportional damping for dynamic relaxation", International Journal for Engineering Modelling, 1996, 9 (1-4), 1-9.

Munjiza A, Owen DRJ, Crook AJL, "An M(M-1K)m proportional damping in explicit integration of dynamic structural systems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, 41 (7), 1277-1296.

O'Rourke M, Zebrowski T, "Buckling load for nonuniform columns", Computers & Structures, 1977, 7 (6), 717-720.

Otter JRH, "Computations for prestressed concrete reactor pressure vessels using dynamic relaxation", Nuclear Structural Engineering, 1965, 1 (1), 61-75.

Otter JRH, Day AS, "Tidal computations", The Engineer 1960, 289, 177-182.

Otter J, et al., "Discussion: dynamic relaxation, in ICE Proceedings", 1967, Ice Virtual Library. 723-750.

Papadrakakis M, "A method for the automatic evaluation of the dynamic relaxation parameters", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1981, 25 (1), 35-48.

Qiang S, "An adaptive dynamic relaxation method for nonlinear problems", Computers & Structures, 1988, 30 (4), 855-859.

Ramesh G, Krishnamoorthy CS, "Post-buckling analysis of structures by dynamic relaxation", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1993, 36 (8), 1339-1364.

Ramesh G, Krishnamoorthy CS, "Inelastic post-buckling analysis of truss structures by dynamic relaxation method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37 (21), 3633-3657.

با وجود این، روش پیشنهادی به سادگی قاب‌های متقارن، توانسته بار کمانشی آن را ارائه دهد. لازم به یادآوری است، در روش کاوه و سلیم بهرامی تنها قاب‌های متقارن بررسی و تحلیل شده‌اند؛ حال آن که روش پیشنهادی می‌تواند بار کمانشی هر نوع قابی را ارائه دهد (Kaveh و Salimbahrami، ۲۰۰۷؛ Tajmir و همکاران، ۲۰۱۷).

#### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، شیوه نوین برای محاسبه بار کمانشی ستون‌ها و قاب‌ها با روش رهایی پویا ارائه گردید. این کار با معرفی بار کمانش، روش رهایی پویا و رابطه‌های آن آغاز شد. سپس، با استفاده از روش نمودار بار- تغییرمکان شیوه نوینی برای محاسبه بار کمانشی ارائه گردید. محاسبه بار کمانشی با فرایند پیشنهادی خودکار و بدون شرط بوده و در آن فقط از محاسبات برداری استفاده می‌شود.

در شیوه پیشنهادی، نخست نقص اولیه ساختگی در سازه ایجاد می‌شود. در ادامه، جهش نمودار بار- تغییر مکان در هنگام رسیدن به نقطه کمانشی، بار کمانشی را ارائه می‌دهد. پاسخ نمونه-های عددی دقت و کارایی بالای این روش در تعیین بار کمانشی را نشان می‌دهد. بیشینه خطا در پاسخ‌های روش پیشنهادی نسبت به مقدار دقیق، ۵ درصد بود. باید دانست، مقدار بار کمانشی به دست آمده از رهایی پویا از پاسخ دقیق بیشتر است. دلیل این موضوع را می‌توان در مدل‌سازی سازه با شیوه اجزای محدود جستجو کرد.

#### ۶- مراجع

Alamatian J, "A new formulation for fictitious mass of the Dynamic Relaxation method with kinetic damping", Computers & Structures, 2012, 90-91, 42-54.

Alamatian J, "Displacement-based methods for calculating the buckling load and tracing the post-buckling regions with dynamic relaxation method", Computers & Structures, 2013, 114-115 (0), 84-97.

Brew JS, Brotton DM, "Nonlinear structural analysis by dynamic relaxation", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1971, 3 (4), 463-483.

Bunce JW, "A note on the estimation of critical damping in dynamic relaxation", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1972, 4 (2), 301-303.

Cassell A, Kinsey P, Sefton D, "Cylindrical shell analysis by dynamic relaxation, in ICE Proceedings", 1968, Ice Virtual Library, 75-84.

Chajes A, "Principles of Structural Stability Theory", 1974, Engelwood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Chen WF, Lui EM, "Structural Stability: Theory and Implementation", 1987, PTR Prentice Hall.

بر این اساس و با استفاده از روابط (۷) تا (۱۰)، ماتریس‌های سختی به صورت زیر خواهند بود. ماتریس سختی کل نیز از جمع این دو ماتریس حاصل می‌شود.

$$[K_L] = E \begin{bmatrix} \frac{A}{L} & 0 & 0 & -\frac{A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I}{L^3} & \frac{6I}{L^2} & 0 & -\frac{12I}{L^3} & \frac{6I}{L^2} \\ 0 & \frac{6I}{L^2} & \frac{4I}{L} & 0 & -\frac{6I}{L^2} & \frac{2I}{L} \\ -\frac{A}{L} & 0 & 0 & \frac{A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I}{L^3} & -\frac{6I}{L^2} & 0 & \frac{12I}{L^3} & -\frac{6I}{L^2} \\ 0 & \frac{6I}{L^2} & \frac{2I}{L} & 0 & -\frac{6I}{L^2} & \frac{4I}{L} \end{bmatrix}$$

$$[K_G] = \frac{P}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & -3L & -L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 36 & -3L \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی در مختصات کلی با استفاده از ماتریس دوران به دست می‌آید. این ماتریس از درایه‌های زیر تشکیل شده است. یادآوری می‌شود که جهت مثبت دوران به صورت پاد ساعتگرد از راستای مثبت محور افق سنجیده می‌گردد.

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = R^T K_E R = R^T K_L R + R^T K_G R$$

- Rezaiee Pajand M, Alamatian J, "Nonlinear dynamic analysis by dynamic relaxation method", *Structural Engineering & Mechanics*, 2008, 28 (5), 549-570.
- Rezaiee Pajand M, Alamatian J, "The dynamic relaxation method using new formulation for fictitious mass and damping", *Structural engineering & mechanics*, 2010, 34 (1), 109-133.
- Rezaiee Pajand M, Alamatian J, "Automatic DR structural analysis of snap-through and snap-back using optimized load increments", *Journal of Structural Engineering*, 2011, 137 (1), 109-116.
- Rezaiee Pajand M, Kadkhodayan M, Alamatian J, "Timestep selection for dynamic relaxation method", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2012, 40 (1), 42-72.
- Rezaiee Pajand M, Kadkhodayan M, Alamatian J, Zhang LC, "A new method of fictitious viscous damping determination for the dynamic relaxation method", *Computers & Structures*, 2011, 89 (9-10), 783-794.
- Rushton KR, "Large deflexion of variable-thickness plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, 1968, 10 (9), 723-735.
- Rushton KR, "Postbuckling of tapered plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, 1969, 11 (5), 461-480.
- Tajmir Riahi H, Zaynalian M, Rabiei A, "A numerical study on seismic behavior of K-braced cold formed steel frames", *Journal of Civil and Environmental Engineering*, University of Tabriz, 2017, 47.3 (88), 47-58.
- Turvey G, Wittrick W, "The large deflection and post-buckling behaviour of some laminated plates", *Aeronautical Quarterly*, 1973, 24, 77-86.
- Underwood P, "Dynamic relaxation (in structural transient analysis)", *Computational methods for transient analysis (A 84-29160 12-64)*. Amsterdam, North-Holland, 1983, 245-265.
- Wood WL, "Note on dynamic relaxation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1971, 3 (1), 145-147.
- Zhang LC, Kadkhodayan M, Mai YW, "Development of the maDR method", *Computers & Structures*, 1994, 52 (1), 1-8.
- Zhang LG, Yu TX, "Modified adaptive Dynamic Relaxation method and its application to elastic-plastic bending and wrinkling of circular plates", *Computers & Structures*, 1989, 33 (2), 609-614.

### پیوست

در شکل زیر، درجات آزادی المان تیری در مختصات محلی نشان داده شده است.



شکل ۱۰- المان تیری در مختصات محلی

## EXTENDED ABSTRACT

# Dynamic Relaxation Method for Calculating Buckling Load of Frames

Javad Alamatian<sup>\*</sup>, Seyed Mohammad Hosseini-Nejad Goshik

Faculty of Engineering, Mashhad Branch, Islamic Azad University, Mashhad 5166616471, Iran

Received: 21 August 2015; Accepted: 14 July 2016

### Keywords:

Dynamic Relaxation (DR), Buckling load, Vector operation, Frame structures.

## 1. Introduction

In the present paper, an explicit algorithm is developed for calculating buckling load of frames. Here, the modified Dynamic Relaxation method is utilized so that the first structural buckling load is achieved.

## 2. Methodology

### 2.1. Theoretical Concept

Formulating the equilibrium equations of structure is the first step for calculating buckling load, which is performed using finite element or finite difference approaches (Rezaiee-Pajand and Alamatian, 2011);

$$SD=F=\lambda P_{ref} \quad (1)$$

Where  $S=[S_{ij}]$  is a  $q \times q$  real symmetric matrix of the structural stiffness and  $D=\{d_i\}$ ,  $F=\{f_i\}$  and  $P_{ref}=\{p_{i,ref}\}$ , are  $q \times 1$  column vectors of the structural displacement, the internal forces and the reference external applied loads, respectively with  $q$  being number of degrees of freedom. Also,  $\lambda$  is load factor that controls the external load. In buckling condition, the nodal displacements extremely increase and the structure fails i.e.

$$D(tS)=0_{ref} \quad (2)$$

Therefore, calculating the buckling load by direct solution of Eq (2), (traditional/common approach) is quite difficult and time consuming procedure and leads to a nonlinear eigenvalue problem.

### 2.2. Proposed Algorithm for Calculating Buckling Load

Here, Dynamic Relaxation method with viscous damping is utilized for calculating buckling load of structures. For this purpose, Eq. (1) is transferred to a virtual dynamic space by adding fictitious inertia and damping forces;

fails i.e

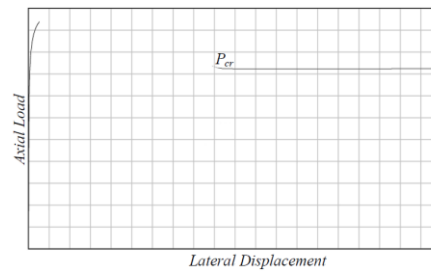
$$M^n \ddot{D}^n + C^n \dot{D}^n + S^n D^n = F^n = \lambda^n P_{ref} \quad (3)$$

Here,  $M^n=[m_{ii}^n]$  and  $C^n=[c_{ii}^n]$  and are  $q \times q$  diagonal fictitious mass and damping matrices, respectively with superscript  $n$  meaning values at  $n^{\text{th}}$  iteration ( $n^{\text{th}}$  fictitious time step). Super dots also denote the mathematical

\* Corresponding Author

E-mail addresses: alamatian@mshdiau.ac.ir (Javad Alamatian), hosseininezhad68@gmail.com (Seyed Mohammad Hosseini-Nejad Goshik).

definitions of the first and second derivatives of the displacement vector with respect to the fictitious time variable (fictitious velocity and acceleration vectors)( Kadkhodayan et al., 2008). Figure 1 shows the proposed technique for determining the buckling load schematically. First a small initial imperfection is imposed on the structure. Then the DR iteration with updated load factor algorithm starts so that equilibrium positions are determined successively. When a converged point is achieved, this position is compared with the previous equilibrium point. If there is a considerable gap between these two points, jumping occurred and the structure has buckled. Therefore, the load factor of the point adjacent jumping is the first buckling load of structure. Hence, the developed algorithm presents the quasi exact of the lowest buckling load with explicit and automatic algorithm. The calculated buckling load from the proposed algorithm has enough accuracy because the updated load factor algorithms trace the statical path with very small increments.



**Fig. 1.** The load-displacement curve in Dynamic Relaxation method for determining the buckling load

### 3. Results and discussion

For verifying the proposed algorithm, buckling load of columns with different boundary conditions is calculated. Results show that the developed algorithm presents the quasi exact of buckling load with enough accuracy because the updated load factor algorithms trace the statical path with very small increments.

### 4. Conclusions

The proposed framework for calculating buckling load runs by full vector operations so that it could be replaced by the complicated common approaches, which require solving eigenvalue problems. Therefore, the suggested algorithm is an explicit method with simple vector calculations. Moreover, this general procedure could be utilized for both symmetric and unsymmetric structures. Results show that the proposed framework has suitable accuracy so that the numerical errors are less than 5 percent. On the other hand, the suggested method is more efficient in comparison with the decomposition technique, which requires complex matrix operations as solving an eigenvalue problem (Kaveh and Salimbahrami 2007). Moreover, the proposed technique has similar steps for both symmetric and unsymmetric systems; however, the common approaches have some serious difficulties in unsymmetric structures. On the other hand, the calculated buckling load in the suggested framework does not depend on the initial imperfection and time step size. Briefly, full vector operations, simple approach, suitable accuracy and similar procedure for all kinds of structures are main specifications of the developed algorithm.

### 5. References

- Alamatian J, "Displacement-based methods for calculating the buckling load and tracing the post-buckling regions with Dynamic Relaxation method", *Computers and Structures*, 2013, 114-115, 84-97.
- American Welding Society, "Structural welding code: AWS D 1.1", Miami, US, 2002.
- Kadkhodayan M, Alamatian J, Turvey GJ, "A new fictitious time for the Dynamic Relaxation (DXDR) method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, 74, 996-1018.
- Kaveh A, Salimbahrami B, "Buckling load of symmetric plane frames using canonical forms", *Computers and Structures*, 2007, 85, 1420-1430.