تحليل تنش اطراف تونل توسط نگاشت همديس

مهدی زمانی لنجانی*

استادیار گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه یاسوج

(دریافت: ۹۶/۷/۲۰، پذیرش: ۹۷/۲/۱، نشر آنلاین: ۹۷/۲/۲)

چکیدہ

یکی از روشهای مهم در طراحی تونل در مهندسی مکانیک سنگ و ژئوتکنیک استفاده از روشهای تحلیلی است. شاید بتوان گفت در بین روشهای تحلیلی استفاده از توابع پتانسیل مختلط جهت این منظور مزایای شایانی دارد. این به خاطر آن است که وضعیت تنش و تغییر شکلهای نسبی مربوطه در اطراف تونل به طور همزمان محاسبه میشوند. توابع پتانسیل مختلف برای تونلهای با مقاطع یکنواخت و ساده از قبیل دایرهای و مربعی معمولاً راحت تر در اطراف تونل به طور همزمان محاسبه میشوند. توابع پتانسیل مختلف برای تونلهای با مقاطع یکنواخت و ساده از قبیل دایرهای و مربعی معمولاً راحت تر در اطراف تونل به طور همزمان محاسبه میشوند. توابع پتانسیل مختلف برای تونلهای با مقاطع یکنواخت و ساده از قبیل دایرهای و مربعی معمولاً راحت تر قابل تعیین اند، در صورتی که برای تونلهای مثلثی، ذوزنقهای، بیضوی و نعل اسبی به صورت مستقیم به دست نمی آیند. در اینجا اگر بتوان از مقاطع پیچیده تونلها توسط نوعی انتقال یا تبدیل، مقاطع اولیه و یکنواخت تری به دست آورد، در این صورت با استفاده از جایگزینی تبدیل فوق در توابع پتانسیلی مختلط موجود، محاسبه وضعیت تنش و تغییر شکل در اطراف تونلهای با مقاطع پیچیده میسر می شود. تا به کار رفته در این عران اگر متوان از مقاطع پیچیده تونلها توسط نوعی انتقال یا تبدیل، مقاطع اولیه و یکنواخت تری به دست آورد، در این صورت با استفاده از جایگزینی تبدیل فوق در توابع پتانسیلی مختلط موجود، محاسبه وضعیت تنش و تغییر شکل در اطراف تونلهای با مقاطع پیچیده میسر می شود. تبدیل به کار رفته در این تحقیق نگاشت همدیس میباشد که به حجم زیاد در شاخههای مختلف مهندسی از قبیل مکانیک سنگ، مهندسی آبهای زیرزمینی و مکانیک سیالات کاربرد در اینجا نگاشتهای همدیس، برای تونلهای با مقاطع نعل اسبی، در د. در اینجا نگاشتهای همدیس، می و ذوزنهای که دارای بیشترین کاربرد در طراحی تونلهای راهسازی و معدنی می برای تونلهای با مقاطی زیرزمینی و مکانیک سیالات کاربرد در درد. در اینجا نگاشتهای همدیس، برای تونلهای را ملبی، نیم در می قردیه می نگاشتهای همیاشد، تعیین گردیدند.

كليدواژهها: تونلسازى، نگاشت، همديس، توابع پتانسيل مختلط، تبديل معكوس.

۱– مقدمه

روشی که توسط آن منحنی یا مناطقی از یک صفحه را بتوان به منحنی یا مناطقی از صفحه دیگر توسط توابع تحلیلی تصویر یا تبدیل نمود در محدوده نگاشت میباشد. نگاشت به مقدار زیاد در حل معادله ديفرانسيل لاپلاس با دامنهها يا مناطقى كه داراى شکل هندسی پیچیدهای دارند، به کار میرود. نگاشت همدیس^۱ تبدیل یا انتقالی است که توسط آن زوایای بین منحنیها و روند یا جهت دوران در دو صفحه مبدأ و تصویر (دامنه و برد) یکسان و ثابت می ماند Jeffrey (۲۰۰۲). توسط نگاشت همدیس می توان توابع هارمونیک و بای هارمونیک (هارمونیک دوگانه) را از یک صفحه به توابع هارمونیک یا بای هارمونیک در صفحه یا صفحات دیگر تصویر نمود. با ابزار فوق می توان بسیاری از مسائل مهندسی دو بعدی در حیطه معادلات لاپلاس و بای هارمونیک در مناطق با قلمروهای دارای شکلهای غیر هندسی و پیچیده را حل نمود. حل در اینجا توسط نگاشت همدیس یک تابع آنالیتیک به تابع آنالیتیک دیگر انجامپذیر خواهد بود. کاربرد نگاشت همدیس برای بسیاری از مسائل دو بعدی در رشتههای مکانیک سنگ، تئوری

الاستیسیته، حرکت سیال ایدهآل، الکترواستاتیک و جریان سیال آبهای زیرزمینی می باشد. کارآئی اصلی و واقعی آن در تبدیل مناطق با مرزهای پیچیده به مناطق با مرزهای ساده و با شکلهای هندسی ساده است. بنابر این توسط نگاشت همدیس میتوان مسائل عملی دو بعدی در رابطه با توابع لاپلاس و ایری و در مناطق با شکلها و مرزهای پیچیده را حل نمود. با توجه به آن که حلهای معادلات لاپلاس و هارمونیک دوگانه برای مناطق با شکلهای ساده به صورت تحلیلی وجود دارد با استفاده از نگاشت همدیس و تبدیل مناطق پیچیده به مناطق سادهتر حل تحلیلی معادلات فوق برای این گونه مناطق هموار می گردد.

۲- نگاشت همدیس

فرض کنیم دو منحنی c_1 و c_2 با محل تقاطع p در z_0 و در صفحه z وجود دارند. اگر معادلات پارامتریک دو منحنی به صورت $a \le t \le b$ در فاصله $z_2(t)=x_2(t)+iy_2(t)$ در فاصله $a \le t \le b$ در نظر بگیریم، نقطه p مربوط به t=a و (z) f یک تابع آنالیتیک یک به یک در قلمرو D از صفحه z و به صورت w=f(z) باشد.

^{*} نویسنده مسئول؛ شماره تماس: ۳۱۰۰۵۰۰۰-۷۷۴

آدرس ایمیل: mahdi@yu.ac.ir (م. زمانی لنجانی).



شکل ۱– تبدیل منحنیهای c1 و c2 به ُc1 و ُc2 تحت تابع نگاشت (w=f(z

نگاشت همدیس w=f(z) هر نقطه از قلمرو D را به یک نقطه از برد صفحه w تصویر می کند (تصویر منفرد). بنابراین منحنی های $(r_2 e)^2 r_2$ تبدیل منحنی های $r_2 e c^2$ در صفحه w میباشند که محل تقاطع آنها p است شکل (۱). منحنی های $r_2 e c_2$ در صفحه z بر روی منحنی های مربوطه در صفحه w، $(r_2 e)^2 r_2$ توسط ضابطه w=f(z) تصویر می شوند، یا می توان گفت r_1 صفحه w میباشند c_2 توسط تابع انتقال w=f(z) از صفحه z به صفحه w میباشند میباشند c_2

۳- انتقال و دوران

تابع ساده w=z+zo جایی که zo=a+ib توسط انتقال در صفحه z بیان میشود. با به کارگیری z=x+iy و z_0 در معادله w می توان نوشت (x,y) = (x,y) در مغطه به مختصات (x,y) در صفحه z به اندازه z واحد در جهت افقی و مثبت محور حقیقی و به انداره d واحد در جهت عمودی و مثبت محور موهومی منتقل و به وضعیت جدید (x+a,y+b) c در می آید McMahan (x-x). اگر منطقه مورد بررسی در صفحه در شکل (z-1 الف) باشد انتقال آن توسط تابع $z=z+z_0$ در شکل (z-1) نشان داده شده است. تابع ابتدائی $z=re^{i\alpha}z$ می تواند به صورت دوران ساده به اندازه α در جهت مثبت محورها بیان شود. اگر $u=z+z^0$ آنگاه می توان نوشت $z=re^{i(\alpha+\theta)}$. بنابراین در صفحه w هر نقطه از دوران نقطه مشابه در منطقه یا صفحه z به اندازه زاویه α به دست می آید (شکل (γ)).



الف) منطقه مورد بررسی، ب) منطقه نگاشت یافته



شکل ۳- نگاشت از نوع دوران توسط تابع w=e^{ia}z

هنگامی که تابع انتقال توسط تابع $c_1 z = w > 2$ در آن $c_1 c$ مختلط میباشد، بیان شود آن را میتوان به صورت مختلط میباشد، بیان شود آن را میتوان به صورت وران $pe^{i\alpha} pe^{i\theta} = pe^{i(\alpha+\theta)}$ نوشت. در این حالت علاوه بر دوران قلمرو در صفحه z اندازه ها به مقدار q برابر افزایش طول مییابند یا بزرگنمائی برابر q خواهند داشت. تابع انتقال فوق حالت خاصی از تابع انتقال $c_1 z + c_2 = w$ است که سادهترین نگاشت همدیس با از تابع انتقال خطی میباشد که آن وضعیتهای دوران، انتقال و بزرگ-انتقال خطی میباشد که آن وضعیتهای دوران، انتقال و بزرگ-نمائی به طور همزمان را داراست. جائی که $c_1 c c_2$ اعداد مختلط میباشند (Yonson) و (۲۰۰۶، Silverman) و (۲۰۱۲).

۴- نگاشتهای همدیس قابل استفاده در مکانیک سنگ

تونل به دلیل آن که وضعیت تنش در اطراف مقطع یک سازه زیرزمینی مخصوصا یک تونل طولانی را میتوان توسط تحلیل تنش الاستیک دو بعدی بیان کرد، بنابراین وضعیت تنش دریک صفحه فلزی با سوراخ مشابه مقطع تحت میدان تنش یک محوری و دو محوری برابر، مشابهت نزدیک با وضعیت تنش در اطراف سازه زیرزمینی داراست. تونلهای با مقاطع دایرهای با توجه به شکل هندسی یکنواخت آنها، حفاری راحت رو توزیع تنش یکنواخت تر ساده ترین تونلها از نظر شکل و کامل بودن هستند. از طرف دیگر روش های تحلیلی مختلف آسان تر و امکان پذیر ترند. اگر به طریقی بتوان تونلهای با مقاطع دیگر و پیچیده را تبدیل به مقاطع دایره-ای نمود توزیع تنش و تغییر شکل در اطراف آنها توسط روش های مستطیلی میسر میباشد. در این تحقیق برای مقاطع بیضی شکل، مستطیلی، مثلثی، سهمی، نیم دایره ای، نیم بیضی و ذوزنقه ای شکل تری را به میشوند.

۴-۱- تونلهای بیضی شکل

استیونسون برای اولین بار رابطه $\zeta = c \cosh \zeta$ را برای نگاشت همدیس بیضی به دست آورد، که در آن $\zeta = \xi + i\eta$ مختصات قطبی در صفحه w و x + iy مختصات کارتزین در صفحه مختلط z است (Stevenson). (۱۹۴۵



شکل ۴- نگاشت همدیس تونل با مقطع بیضی شکل برای ξ های ۰، ۱، ۵/۱ و ۲

x = c به طوری که با بسط رابطه فوق برای متغیر مختلط c = c به طوری که با بسط $\xi \sin \eta$ و $c \cosh \xi \cos \eta$

رابطه دیگر که به طور مکرر برای نگاشت همدیس مقاطع تونلهای بیضوی به کار رفته معادله (۱) میباشد که توسط Muskhelishvili و Timoshenko ستفاده شده است (۱۹۵۲) Muskhelishvili و Timoshenko (۱۹۵۲)).

$$z = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) \quad , \ R > 0 \quad , \ 0 \le m \le 1 \tag{1}$$

که در آن $\zeta = \xi e^{i\eta}$ و نیم قطرهای بیضی a و b برابر b = R(1-m) و a = R(1+m)پارامترهای R و m عبارتند از:

$$R = \frac{a+b}{2} \quad , \quad m = \frac{a-b}{a+b} \tag{(1)}$$

به عنوان مثال برای تونل بیضی شکل به ابعاد a=4m و b=2m و b=2m پارامترهای فوق برابر m=1/3 و m=1/3 می باشند. نگاشت مربوطه است که در شکل (۴) مشاهده می شود. با جایگزینی مقدار z در معادله (۱) می توان نوشت:

$$x = R\left(\xi + \frac{m}{\xi}\right)\cos\eta \quad , \quad y = R\left(\xi - \frac{m}{\xi}\right)\sin\eta \tag{(7)}$$

۴-۲- تونلهای مربعی و مستطیلی شکل

Savin) کال (۱۹۶۱) برای نگاشت همدیس مقطع مربعی شکل معادله (۴) را به دست آورد و آن خلاصه شده از سری چند جملهای با تعداد جملات بینهایت و بر حسب تابع تخ است.

$$z = w(\zeta) = R(\zeta - \frac{1}{6}\zeta^{-1} + \frac{1}{56}\zeta^{-3})$$
^(f)

برای تونل مربعی به عرض 4m مقدار 2.35R است که آن توسط جایگزینی $\theta = \zeta = \rho e^{i\theta}$ در معادله (۴) به دست می آید. نگاشت حاصله در شکل (۵) ملاحظه می شود. نگاشت تونل های مستطیلی افقی و

عمودی از سری مشابه معادله (۴) با ضرائب متفاوت به دست می-آید که این ضرائب برای نسبتهای طول به عرضهای متفاوت متغیر میباشند. در مورد مقطع مستطیلی خاص و با نسبت $\frac{a}{b} = 3.2$

$$z = w(\zeta) = R(\zeta + 0.5\zeta^{-1} - 0.125\zeta^{-3} - 0.038\zeta^{-5})$$
 (Δ)

پارامتر R در معادله فوق توسط طول تونل مستطیلی محاسبه می شود. مقدار آن برای تونل به طول 6.2m برابر 2.4=R می باشد. نگاشت مربوط به معادله (۵) و برای مقطع فوق در شکل (۶) مشاهده می شود.



شكل ۵- نگاشت همدیس تونل با مقطع مربعی شكل



شکل ۶- نگاشت همدیس تونل با مقطع مستطیلی شکل

۴-۳- تونل مثلثی شکل با گوشههای گرد

رابطه نگاشت همدیس برای تونلهای با مقطع مثلثی شکل توسط ساوین به صورت معادله ساده (۶) ارائه شده است Savin (۱۹۶۱).

$$z = w(\zeta) = R(\zeta + \frac{1}{3}\zeta^{-2} + \frac{1}{45}\zeta^{-5})$$
(9)



شکل ۷- نگاشت همدیس تونل با مقطع مثلثی شکل

به طوری که برای تونل مثلثی به ارتفاع 5m مقدار 2.95R میباشد. نکاشت همدیس معادله (۶) برای مقطع مثلثی در شکل میباشد. نکاشت همدیس معادله (۶) برای مقطع مثلثی در شکل (۷) نشان داده شده است. همان طور که در شکل مشهود میباشد جهت استفاده از تقارن مقطع و برای تعیین معادله (۶) محور در جهت عمودی در نظر گرفته شده است. در غیر این صورت سادگی جهت ممدیس فوق خدشهدار خواهد شد. ضرائب معادله (۶) بستگی به میزان و نسبت طول و عرض نقاط سطحی تونل و مقدار R بستگی به اندازه یا بزرگی سطح مقطع تونل دارد.

۴-۴- تونل با مقطع سهمی شکل و کف مستقیم

گرسک نگاشت همدیس معادله (۲) را جهت تونلهای با مقطع سهمی شکل و کف مستقیم به کار برد Gercek (۱۹۹۷).

 $z = w(\zeta) = Re^{-i\frac{\pi}{4}} [\zeta + 0.1(1+i)\zeta^{-2} + 0.055\zeta^{-3}]$ (Y)

مدل دیگری که توسط نویسنده مقاله مشابه معادله (۷) ولی ساده-تر و خلاصه تر برای مقاطع سهمی شکل توسط روشهای درون-یابی ارائه شده است که توسط معادله (۸) بیان میشود.

$$z = w(\zeta) = R(c_0 + \zeta + c_2 \zeta^{-2}) \tag{(A)}$$

که در آن 0.037=c و c2=0.152 میباشد. نگاشت همدیس ارائی توسط معادله (۸) در شکل(۸) برای ۶ً های ۰۰ ۰۴/۰۰ ۲۵/۷ و ۱/۰ دیده میشود.



شکل ۸- نگاشت همدیس تونل با مقطع سهمی شکل و کف مستقیم

از تقارن مقطع سهمی شکل حول محور x مطابق شکل (۸) جهت تعیین معادله (۸) استفاده شده است در صورتی که این امر در معادله (۲) به کار نرفته و در نتیجه معادله پیچیدهتری به دست آمده است. در مقطع تونل به کار رفته در شکل (۸) مقدار R=2/7 میباشد. تونلهای با مقطع سهمی شکل و کف مستقیم اکثراً در کارهای راهسازی و معدنی به کار میروند و نسبت به مقاطع دیگر دارای ارجحیت می باشند. به طور کلی معادلات نگاشت همدیس برای تونلهای با مقاطع پیچیده و غیر هندسی از سری زیر متابعت میکنند.

$$z = w(\zeta) = R\left(\zeta + \sum_{i=1}^{n} a_i \zeta^{-i}\right) \tag{9}$$

با افزایش تعداد جملات سری فوق میتوان به شکل واقعی مقطع تونل دست یافت. ضرائب a_i اعداد مختلط میباشند و توسط روشهای تخمین و یا بهینهسازی با استفاده از سری فوریه قابل محاسبهاند. آنها بیانگر ارتباط بین مختصات طولی و عرضی نقاط مقطع تونل یا به طور کلی نمایانگر چگونگی شکل مقطع تونل میباشند. *R* مقدار حقیقی است که نشانگر اندازه (کوچکی و بزرگی) سطح مقطع تونل میباشد.

۴-۵- تونل با مقطع نیمدایرهای

ساوین نگاشت همدیس معادله زیر را جهت تونلهای با مقاطع نیم دایرهای و با مبدأ مختصات واقع در مرکز ثقل تونل و محور x ها عمود بر قطر تونل در نظر گرفت.

$$z = w(\zeta) = R(\zeta + a_1\zeta^{-1} + a_2\zeta^{-2} + a_3\zeta^{-3} + a_4\zeta^{-4} + a_5\zeta^{-5})$$
(1.)

که در معادله فوق 0.312ه. a2=-0.156، a2=-0.050. a4=0.019 و a5=0.015 است. نگارنده مقاله مدل دیگری جهت نگاشت مقاطع نیم دایرهای و به صورت معادله (۱۱) به دست آورد که دارای ضرایب کمتری است. همچنین در اینجا محور x محور تقارن تونل و جهت مثبت آن به سمت سقف تونل میباشد.

$$z = w(\zeta) = c_0 \zeta + c_1 \zeta^{-1} + c_2 \zeta^{-2} + c_3 \zeta^{-3} + c_4 \zeta^{-4}$$
(11)

که در آن $c_2=0.5$ ، $c_2=1.578$ ، $c_1=-3.144$ و $c_0=10.113$ و $c_2=0.5$ و $c_2=0.5$ برای تونل نیم دایره ای به شعاع ۱۳ متر است. نگاشت حاصله در شکل (۹) مشاهده می شود. در شکل مذکور دایرههای هم مرکز در مختصات ξ های ثابت و ξ های مربوط به ξ های ۰، ۵۰/۲۵، ۵/۰ و ۱/۰ و خطوط شعاعی با η های ثابت و هر یک به فاصله ۱۸ درجه می باشند.



شکل ۹- نگاشت همدیس تونل با مقطع نیمدایرهای

۴-۶- تونل با مقطع نیم بیضی

تونلهای با مقطع نیم بیضی به دلیل آن که دارای شکل پیچیدهای هستند تعیین تابع نگاشت آنها مشکل و نیاز به ایجاد سری طولانی میباشد. ادبیات و سوابق کاری در این زمینه هیچگونه مدلی را برای این گونه مقاطع نشان نمیدهد و کار چندانی بر روی آن انجام نگرفته است. حداقل نگارنده نتوانسته هیچگونه دسترسی به منابع آن در صورت وجود حاصل نماید. به هر حال در اینجا به سه تابع نگاشت که توسط نگارنده و با استفاده از روشهای عددی درونیابی ابداع شده است، اشاره میشود.

۴-۶-۱ مدل ۱

در اینجا از فرم استاندارد معادله (۱۰) جهت نگاشت تونل با مقطع نیم بیضی با مشخصات نیم اقطار a=6 m و b=4 m مطابق معادله (۱۲) استفاده شده است.

$$z = w(\zeta) = a_0 + pe^{\zeta} + qe^{-\zeta} + \sum_{k=2}^{22} a_k e^{-k\zeta}$$
(17)

ضرائب معادله فوق در جدول (۱) مشاهده میشود، جائی که $a_{1} = p - q$ و n ثابت در $a_{-1} = p - q$ و $a_{0} = p + q$ های ۰، ۲۵ (۰۰ ، ۲۵، ۲۰) و ۱/۰ در شکل (۱۰) مشاهده میشود.

جدول ۱- ضرائب معادله نگاشت (۱۲) برای مقطع نیم بیضی

مقادير	ضرائب	مقادير	ضرائب
-٠/٠٩٨	<i>a</i> ₁₁	•/١١•	a_0
•/•٣٣	<i>a</i> ₁₂	٣/٢٣٩	<i>a</i> -1
۰/۰۸۲	<i>a</i> ₁₃	-•/٨۵٣	a_1
-•/• 9V	a ₁₄	٠/١٣٠	a_2
-•/• YV	<i>a</i> ₁₅	٠/٣١۴	<i>a</i> ₃
٠/١۵١	<i>a</i> ₁₆	- • / \ Y Y	<i>a</i> ₄
-•/• AV	<i>a</i> ₁₇	-•/• AY	a 5
- • / \ YY	<i>a</i> ₁₈	•/١۵١	a_6
۰/۳۱۴	<i>a</i> ₁₉	- • / • YY	<i>a</i> ₇
۰/۱۳۰	<i>a</i> ₂₀	-•/• 9V	a 8
-•/٨۵٣	<i>a</i> ₂₁	۰/۰۸۲	<i>a</i> ₉
•/ \ \•	<i>a</i> ₂₂	•/•٣٣	<i>a</i> ₁₀



شکل ۱۰- نگاشت همدیس تونل با مقطع نیم بیضی مدل ۱

۴–۶–۲– مدل ۲

در این مدل از معادله زیر جهت نگاشت استفاده شده است:

$$z = w(\zeta) = a_0 + p_1 e^{\zeta} + q_1 e^{-\zeta} + \sum_{k=2}^{11} (p_k e^{-(k+1)\zeta + k\zeta} + q_k e^{-k\zeta}) + q_{12} e^{-13\zeta + 12\zeta}$$
(1°)

جائی که $p_i = p_i + q_i$ و $b_i = p_i - q_i$ پارامترهای a_0 الی a_{12} و $b_i = p_i - q_i$ و $a_i = p_i + q_i$ و b_1 الی b_1 را میتوان از جدول (۲) به دست آورد. آنها توسط نگاشت عددی و به کارگیری سری فوریه در مقطع نیمبیضی به دست آمدند.

جدول ۲- ضرائب معادله نگاشت (۱۳) برای مقطع نیم بیضی

مقادير	ضرائب	مقادير	ضرائب
41.92	b_1	•/\\•	a_0
-•/• ١٩	<i>b</i> ₂	۲/۳۸۷	<i>a</i> ₋₁
-•/١١۶	<i>b</i> ₃	•/۲۴•	<i>a</i> ₁
۰/٣٠٧	b_4	-•/۵۳۹	<i>a</i> ₂
۰/۴۰۱	b_5	-•/•¥Y	<i>a</i> ₃
-•/٣٢٨	b_6	• /YYV	<i>a</i> ₄
-•/•۶•	b 7	-•/•۲۶	<i>a</i> ₅
•/۲۴٨	b_8	-•/\\\\	<i>a</i> ₆
-•/\•A	b 9	۰/۰۵۴	<i>a</i> ₇
-•/١٣•	b_{10}	۰/۰۵۵	<i>a</i> ₈
·/\.	b_{11}	-•/•۶۴	<i>a</i> 9
		-•/• \\	<i>a</i> ₁₀
		۰/۰۳۳	<i>a</i> ₁₂



شکل ۱۱- نگاشت همدیس تونل با مقطع نیم بیضی مدل ۲

۳-۶-۴ مدل ۳

با توجه به پیچیده بودن و طولانی بودن معادلات نگاشت مدل های ۱ و ۲ سعی گردید حتیالامکان از معادلات با سری کوتاهتر، سادهتر و کاربردی تر جهت این منظور استفاده شود. معادله (۱۴) با توجه به اهداف فوق و توسط نگاشت مرحلهای به دست آمد.

$$z = w(\zeta) = \frac{1+f}{2} (c_0 e^{\zeta} + c_1 e^{-\zeta} + c_2 e^{-2\zeta} + c_3 e^{-3\zeta} + c_4 e^{-4\zeta}) + \frac{1-f}{2} (c_0 e^{\zeta} + c_1 e^{-2\xi+\zeta} + c_2 e^{-4\xi+2\zeta} + c_3 e^{-6\xi+3\zeta} + c_4 e^{-8\xi+4\zeta})$$
(14)

که در آن $f = \frac{a}{b}$ (نسبتهای اقطار بزرگ و کوچک نیمبیضی) $c_4 = -i/b$ (نسبتهای اقطار بزرگ و کوچک نیمبیضی) $c_4 = -i/b$ ($c_2 = 1/0$ א $c_2 = -7/1$ و i/b = 0 و $c_3 = -i/b$ برای میباشند. نگاشت نیمبیضی فوق به ابعاد m a = 6 و m = a = 4 برای مقادیر ثابت ξ و η در ξ های ۰، i/h، i/h، i/h، i/b و i/l و i/l و c_1 و c_2 های ۰، ۱۵، ۰۰، ... و ۳۶۰ درجه در شکل (۱۲) مشاهده می شود.



شکل ۱۲ – نگاشت همدیس تونل با مقطع نیم بیضی مدل ۳



شکل ۱۳ – نگاشت همدیس تونل با مقطع ذوزنقهای

۴-۷- تونل با مقطع ذوزنقهای

ساوین معادله نگاشت همدیس (۱۵) را برای تونلهای با مقاطع ذوزنقهای ارائـــه کرد (۱۹۶۱) در معادله مذکور مبدأ مختصات در مرکز ثقل تونل بوده و محور x ها محور تقارن تونل میباشد. جهت مثبت محور x در امتداد عمود بر قطر تونل و به طرف سقف است.

$$z = w(\zeta) = R(-0.0086 + \zeta + 0.0167\zeta^{-1} + 0.058\zeta^{-2} - 0.1505\zeta^{-3} - 0.0109\zeta^{-4})$$
(10)

برای تـونل ذوزنقهای به ابعاد قاعدههای کوچک و بزرگ به ترتیب ۳ و ۴ متر و ارتفاع ۴ متر مقدار R=2/186 مـــیباشـد. نگاشت همدیس آن در شکل (۱۳) مشاهده میشود.

برای تـــونل ذوزنقهای به ابعاد قاعدههای کوچک و بزرگ به ترتیب ۳ و ۴ متر و ارتفاع ۴ متر مقدار R=2/186 مـــــیباشــد. نگاشت همدیس آن در شکل (۱۳) مشاهده میشود.

با استفاده از توابع نگاشت همدیس برای مقاطع غیر هندسی و پیچیده و تبدیل آن به مقاطع دایرهای، میتوان وضعیت تنش و تغییر شکل را در اطراف سازههای زیرزمینی تعیین نمود. برای این کار از توابع پتانسیل مختلط مربوطه $(\tilde{z}) \varphi \in (\tilde{z}) \psi$ که شرائط مرزی تنش میدانی در آنها صدق مینمایند، استفاده میشود. معادلات تنش و تغییر شکل بر حسب توابع پتانسیل مختلط فوق به صورت معادلات زیر میباشند (Inax Muskhelishvili) و (Inax Savin). Gercek). (Inax (Inax 2006). (Inax 2006).

$$\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} = 4Re\{\varphi'[w(\zeta)]\} \tag{19}$$

$$\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi} + 2i\sigma_{\xi\eta} = \frac{2\varphi^{2}(\zeta)}{\xi^{2}\overline{w'(\zeta)}} \left\{ \overline{w(\zeta)}\varphi^{"}(\zeta) \left[w(\zeta) + w'(\zeta)\psi^{"}[w(\zeta)] \right] \right\}$$
(17)

$$2G(u+iv) = \chi \varphi(\zeta) - w(\zeta) \frac{\overline{\varphi'(\zeta)}}{\overline{w'(\zeta)}} - \overline{\psi(\zeta)}$$
(1A)

در معادلات فوق σ_{ξ} ، σ_{ξ} و $\sigma_{\xi\eta}$ به ترتیب تنشهای شعاعی، محیطی و برشیی در اطراف سازه زیر زمینی، u و v تغییر شکلهای طولی در امتداد x و v و خط تیره بر روی توابع مختلط نشانگر مزدوج مختلط آنها است. پارامتر x تابع ضریب پواسون و برای تنش صفحهای برابر (u+1)(v+1) است. و برای کرنش صفحهای برابر x-3-4v میباشد.

کارگر و همکاران (۲۰۱۴) یک روش نیمه تحلیلی و توسط توابع پتانسیل مختلط برای تعیین تنش اطراف تونــلهای غیر دایرهای پوششدار ارائه کردند. در فرمولسازی آنها از تابع نگاشت و توابع پتانسیل مختلط ماسخلیشویلی استفاده شدهاست. زمانی و همکاران (۱۳۹۴) توزیع تنش محیطی را در اطراف تونل مربعی شکل و با استفاده از روش تحلیلی و توابع پتانسیل مختلط ارائه دادند. فرمول سازی مدل ارائی به طور مفصل در مقاله مذکور برای تعقيب گام به گام خواننـــدگان آورده شده است. آنها از توابع نگاشت دو جملهای، سهجملهای و چهارجملهای برای انتقال مقطع مربعی تونل به شـکل دایرهای اسـتفاده نمودند. همچنین نشان دادند که، با افزایش جملات تابع نگاشت و کوچک شدن زاویه انحنای گوش...های تونل، میزان تمرکز تنش در گوش...ها افزایش می یابد. زمانیی و عالمی (۱۳۹۶) با ارائه فورمول سازی کامل توزیع تنش اطراف تونلهای بیضی شکل و با استفاده از تابع نگاشت استیونسون ارائه نمودند. آنها نشان دادند که تنشهای شعاعی و محیطی در اطراف تونل توسط دو روش تحلیلی استفاده از توابع نگاشت استيونسون و ماسخليشويلي كاملاً يكسان می باشند. این هماهنگی برای شرائط متفاوت تنشهای برجا و ميداني اطراف تونل بيضي شكل وجود دارد.

برای خوانندگان علاقهمند به روشهای تحلیلی در این موارد می توانند برای تونلهای دایره ای و بیضی شکل علاوه بر منابع فوق به iL و Exadahtyls (۱۹۹۷) Verruijt (۲۰۰۸)؛ Sao و همکاران (۲۰۰۳) و Satista (۲۰۱۹)؛ Kirgar (۲۰۰۹) این Sao و همکاران (۲۰۱۴) و عالمی (۲۰۹۶) تونلهای مثلثی، مربعی و مستطیلی به Huo (۱۹۶۱) Savin (۱۹۵۳) تونلهای سهمی شکل و همکاران (۲۰۰۶) و امجدیان (۱۹۹۴) و تونلهای سهمی شکل و غیر دایروی در انواع مختلف به Gercek (۱۹۹۷) و Top ا

۵- نتیجهگیری و پیشنهادات

بسیاری از مسائل مهندسی در زمینههای مکانیک سنگ، آبهای زیرزمینی، مکانیک سیالات و انتقال حرارت بااستفاده از به کارگیری نگاشت همدیس و توابع پتانسیل مختلط قابل حل

می باشند. نگاشتهای حاصله از مختصات z به مختصات $\tilde{\zeta}$ و بالعـــکس یک ارتباط یک به یک ارائه میدهــد. بنابراین قابل کاربرد در معادلات (۱۶)، (۱۷) و (۱۸) می باشیند. در این انتقال زوایای بین منحنی های پارامتریک در دو صفحه z و ζ ثابت می باشند و تغییر نمی کنند و نگاشت همدیس است. همدیس بودن منحنی های پارامتریک در مراحل قبل و بعد از انتقال امکان حل تحليلي توسط توابع مختلط و غير مختلط را فراهم ميسازد. با توجه به پیچیدگی مقطع تونل از نگاشت ترکیبیی یا انتقال مرحلهای برای تبدیل به مقاطع سادهتر میتوان استفاده کرد. برای مقطع خاص از تــونل امکان تعیین چندین نگاشت وجود دارد. بنابراین معادل___ مربوطه منحصر به فرد نیست. انتقال از منطقه محدود به منطقه غير محدود و بالعكس همچنين از منطقه غیر محدود به منطقه غیر محدود دیگر میسر میباشد. با توجه به آن که تونـلهای زیرزمینی در یک منطقه نیمه محدود (توده سنگ) احداث شدهاند، بهتر است نگاشت آن هم به منطقه نیمه محدود باشد تا بتوان احساس تعقیب و ردگیری وضعیت تنش و تمركز آن را در نقاط انتقال بهتر فراهم كرد. سه مدل نگاشت همدیس ارائی برای مقطع نیم بیضی و مدل سادهتر به دست آمده برای مقاطع نیم دایرهای قابل کاربرد در تحلیل تنش و تغییر شکل اطراف تونلهای مربوطه میباشند. توابع نگاشت فوق توسط روش نگاشت همدیس عددی به دست آمدند. به دلیل طولانی بودن محاسبات از شرح روش های عددی مربوطه خودداری شد. با توجه به دقت و توانائی بالای روش تحلیلی توابع يتانسيل مختلط، پيشنهاد مي شود براي مقاطع نعل اسبي و پیچیدهتر توابع نگاشت آنها به دست آیند. این قدم اول در تحلیل تنش و تغییر شکل اطراف این گونه تونلها میباشد.

8- مراجع

- امجدیان س، "حل تحلیلی تنش اطراف تونلهای مستطیلی به روش پتانسیل مختلط"، پایاننامه کارشناسی ارشد، دانشگاه یاسوج، ۱۳۹۴.
- زمانی م، امجدیان س، خرداد ر، "تعیین تنش اطراف تونلهای مربعی شکل با استفاده از توابع پتانسیل مختلط"، نشریه مهندسی تونل و فضاهای زیرزمینی، ۱۳۹۴، ۴ (۲)، ۵۸–۴۷، ۱۳۹۴.
- زمانی م، عالمی م، "توزیع تنش اطراف تونلهای بیضی شکل به روش استیونسون"، مجله علمی و پژوهشی شریف-مهندسی عمران، زمستان ۱۳۹۶.
- عالمی م، "حل تحلیلی تنش اطراف بیضوی تحت میدان برشی به روش توابع پتانسیل مختلط"، پایاننامه کارشناسی ارشد، دانشگاه یاسوج، ۱۳۹۲.

۵۲

- Savin GN, "Stress Concentration around Holes", Pergamon Press, 1961, London, UK.
- Sharan S, "Exact and approximate solution for displacement around circular openings in elasticbrittle-plastic Hoek-Brown rock", International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2007, (4), 542-549.
- Stevenson AC, "Complex Potentials in Two-dimensional Analysis", Proc. R. Soc., A., 1945.
- Timoshenko SP, Goodier JN, "Theory of Elasticity", 3rd Edition, McGraw-Hill Publishing Company, NY, USA, 1982.
- Verruijt A, "A complex variable solution for a deforming circular tunnel in an elastic half-plane", International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1997, 21 (2), 79-89.

کارگر ع، رحماننژاد ر، حاجعباسی م ع،" تعیین میدان تنش در اطراف مغارهای ذخیره گاز با استفاده از توابع پتانسیل مختلط و نگاشت همدیس"، نشریه مهندسی تونل و فضاهای زیرزمینی، ۱۳۹۴، ۳ (۲)، ۱۳۳–۱۴۴.

- Aslani F, "Determination of stress and deformation fields around circular tunnels using a new stress function and making a comparison between the proposed solution finite element and complex variable methods", 8th International Conference of Civil Engineering, University of Shiraz, Shiraz, Iran 2009.
- Batista M, "On the stress concentration around a hole in an infinite plate subject to a uniform load at infinity", International Journal of Mechanical Science, 2011, 53 (4), 254-261.
- Exadahtylos GE, Liolios GE, Stavropoulou MC, "A semi analytical Elastic stress-displacement solution for notched circular opening in rocks", International Journal of Solids and Structures, 2003, 40, 1165-1187.
- Gao XL, "A general solution of an Infinite elastic plate with an elliptic hole under Biaxial loading", International Journal Ves. & Piping, 1996, 67, 95-104.
- Gercek H, "An Elastic Solution for Stresses around Tunnels with Conventional Shapes", International Journal Rock Mechanics and Mining Sciences, 1997, 34, 3-4, 0.96.
- Huo H, Bobet A, Fernandez J, Ramirez J, "Analytical solution for deep rectangular structures subjected to far-field shear stresses", Tunneling and Underground Space Technology Journal, Elsevier, 2006, 613-625.
- Jeffrey A, "Advanced Engineering Mathematics", Harcourt Academic Press, New York, USA, 2002.
- Johnson RS, "An Introduction to the Theory of Complex Variables", 1st Edition, Ventus Publishing Aps, Bookboon, 2012.
- Kargar AR, Rahmannejad R, Hajabasi MA, "A semianalytical elastic solution for stress field of lined non-circular tunnels at great depth using complex variable method", International Journal of Solids and Structures, 2014, 51, 1475-1482.
- Li SC, Wang MB, "Elastic analysis of stress-displacement field for a lined circular tunnel at great depth due to ground loads and internal pressure", Tunneling and Underground Space Technology, 2008, 23, 609-617.
- McMahan D, "Complex variables Demystified", 1st Edition, Mc Graw-Hill, New York, USA, 2008.
- Muskhelishvili NI, "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity", J. R. M. Radok (tans.), Noordhoff, Groningen, Netherlands, 1953.
- Park KH, Kim YJ, "Analytical Solution for a circular opening in an elastic-brittle plastic rock", International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2006, 43 (4), 616-622.
- Ponnusamy S, Silverman H, "Complex Variables with Applications", 1st Edition, Birkhauser, Boston, USA, 2006.



EXTENDED ABSTRACT

Analysis of Stress around Tunnel by Conformal Mapping

Mehdi Zamani Lenjani *

Faculty of Technical and Engineering, University of Yasouj, Yasouj 7591874934, Iran

Received: 12 October 2017; Accepted: 20 April 2018

Keywords:

Tunneling, Mapping, Conformal, Complex potential function, Inverse transformation.

1. Introduction

One of the powerful methods in tunneling design in rock mechanics and geotechnical engineering is analytical method. Among the analytical models the best model is the use of complex potential functions one. The complex potential method applies conformal mapping. Applications of conformal mappings are made to two-dimensional boundary value problems involving rock mechanic, soil mechanic, heat flow, electrostatics and ideal fluids. Of particular interest is the ability of conformal mappings to map regions with a complicated boundary shape onto regions with a simple boundary shape McMahan (2008). This is because such mapping can be used to solve two-dimensional boundary value problems for the elasticity equations in regions of complicated shape. The required solution follows directly from the fact that conformal mappings map one analytic function into another one.

2. Methodology

The conformal mapping as one that preserves both the angle between intersecting curves and the sense of rotation from one curve to the other Ponnusamy and Silverman (2006). Then proceeds to examine some of the most important examples of these mapping to the tunneling structure. Conformal mappings are shown to map a harmonic or biharmonic function in one plane into a harmonic or biharmonic function in another plane, and it is this property that is used when boundary value problems for the two-dimensional elasticity equations are solved Muskhelishvili (1953). For tunnels with circular or square cross-sections the complex potential functions are simple and can be obtained easily Savin (1961). While for other tunnel sections such as triangle, ellipse, trapezoid and horseshoe are more difficult. If we can transform the tunnel complex shapes into a circular shape by some methods of mapping, then the first step for obtaining the governing potential function is done. The mapping that is used for that purpose is called conformal mapping. In this research the conformal mapping functions for tunnel sections are the most applicable ones for roading and geotechnical underground structures. If the obtaining of conformal mapping functions for semi-elliptic cross section is not simple and easy task but in this research at least three functions are obtained by the method of the numerical conformal mapping.

3. Results and discussion

The following conformal mapping function is used for semi-circular tunnel.

$$z = w(\zeta) = c_0 \zeta + c_1 \zeta^{-1} + c_2 \zeta^{-2} + c_3 \zeta^{-3} + c_4 \zeta^{-4}$$
⁽¹⁾

Where $c_0=10.113$, $c_1=-3.144$, $c_2=1.578$, $c_3=-0.5$ and $c_4=-0.02$ are for semi-circular tunnel of diameter 13m. The governing conformal mapping is shown in Fig. 1.

E-mail addresses: mahdi@yu.ac.ir (Mehdi Zamani).



Fig. 1. The conformal mapping of semi-circular tunnel with diameter 13m

For the conformal mapping of semi-ellipse tunnels three models are obtained by the numerical approximation method. The model 3 of conformal mapping is more accurate and more powerful and gives the smoother curve as Eq. 2.

$$z = w(\zeta) = \frac{1+e}{2} \left(c_0 e^{\zeta} + c_1 e^{-\zeta} + c_2 e^{-2\zeta} + c_3 e^{-3\zeta} + c_4 e^{-4\zeta} \right) + \frac{1-e}{2} \left(c_0 e^{\zeta} + c_1 e^{-2\xi+\zeta} + c_2 e^{-4\xi+2\zeta} + c_3 e^{-6\xi+3\zeta} + c_4 e^{-8\xi+4\zeta} \right)$$

Where e=a/b (the ratio of half longer diameter to the half smaller diameter of ellipse), $c_0=10.113$, $c_1=-3.144$, $c_2=1.578$, $c_3=-0.5$ and $c_4=-0.02$. Fig. 2 shows the conformal mapping of semi-ellipse tunnel with half diameters a=6.0m and b=4.0m.

(2)



Fig. 2. The conformal mapping of semi-ellipse tunnel with *a*=6m and *b*=4.0m

4. Conclusions

One of the basic steps of the complex variable method for analysis the stress and strain around underground structure is to determine the conformal mapping functions. The presented models for different tunnel cross-sections are sufficient for obtaining the governing complex potential functions. For unsymmetrical cross-sections of tunnels the multiple conformal mapping should be used. The results show the third model function which is used for mapping of the semi-elliptic closed curve is one by one mapping and prefers for the calculations of stresses and deformations around and on the surface of tunnel. It is recommended to obtain the conformal mapping functions such as horseshoe, irregular, asymmetrical and uneven shapes.

5. References

McMahan D, "Complex variables Demystified", 1st Edition, Mc Graw-Hill, New York, USA, 2008.

Ponnusamy S, Silverman H, "Complex Variables with Applications", 1st Edition, Birkhauser, Boston, USA, 2006. Muskhelishvili NI, "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity", J. R. M. Radok (tans.), Noordhoff, Groningen, Netherlands, 1953.

Savin GN, "Stress Concentration around Holes", Pergamon Press, 1961, London, UK.