# تحلیل خمشی صفحات مستطیلی ضخیم همسانگرد جانبی واقع بر بستر الاستیک دو پارامتری

غزاله صمدی[۱]، بهرام نوائی‌نیا*[۲] و پروانه ناطقی بابگی[۳]

[۱] کارشناس ارشد سازه، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل
[۲]دانشیار گروه سازه، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل
[۳] دانشجوی دکتری سازه، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

(دریافت: ۹۶/۶/۷، پذیرش: ۹۷/۲/۱، نشر آنلاین: ۹۷/۲/۲)

**چکیده**

در این پژوهش، حل دقیق خمش صفحات ضخیم همسانگرد جانبی واقع بر بستر الاستیک دو پارامتری با استفاده از توابع پتانسیل تغییر مکان ارائه می‌شود. برای این منظور با استفاده از معادلات سه‌بعدی الاستیسیته، دستگاه معادلات حاصل از شش معادله کرنش- جابه‌جایی، شش معادله ساختاری و سه معادله تعادل در هم ادغام و بر حسب تغییرمکان‌ها بیان شده است. سپس با استفاده از توابع پتانسیل جابه‌جایی، پانزده معادله به دو معادله دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دو و چهار مستقل از یکدیگر بر حسب دو تابع پتانسیل تغییر مکان تبدیل گردیدند. حل معادلات حاکم به روش جداسازی متغیرها و اعمال دقیق شرایط مرزی صورت پذیرفته و بر اساس آن پاسخ تغییرمکان‌ها، تنش‌ها، برش‌ها و نیز لنگرها در صفحه بر روی بستر دوپارامتری به دست آمدند. نتایج در حالت خاص برای صفحه نازک همسانگرد و صفحه نسبتاً ضخیم همسانگرد با جواب‌های موجود مقایسه گردیدند که نشان‌دهنده صحت و درستی نتایج می‌باشند. در ادامه رفتار خمشی چهار ماده همسانگرد جانبی منیزیم، اپوکسی گرافیت، اپوکسی شیشه‌ای، الیاف کربنی و نیز و فولاد به عنوان یک ماده همسانگرد کامل با یکدیگر مقایسه شد. نتایج حاکی از آن است که منیزیم و الیاف کربنی به ترتیب بیش‌ترین و کم‌ترین میزان تغییرات تغییرمکان را در مقابل افزایش ضخامت از خود نشان می‌دهند.

**کلیدواژه‌ها:** صفحات ضخیم مستطیلی، همسانگرد جانبی، بستر الاستیک دو پارامتری، تابع پتانسیل تغییر مکان، الیاف کربنی.

## ۱- مقدمه

صفحه واقع بر بستر الاستیک کاربردهای بسیار وسیعی در رشته‌های مختلف مهندسی نظیر عمران، مکانیک، هوافضا، مهندسی هسته‌ای و دریایی دارد که به عنوان نمونه می‌توان به روسازی فرودگاه‌ها یا راه‌های شوسه و شالوده سازه‌های مختلف بر روی محیط نیمه بی‌نهایت خاک اشاره نمود. از آنجائی که رفتار خاک تابع عوامل متعددی می‌باشد، ارائه مدلی کامل و جامع و دربرگیرنده همه عوامل اگر غیرممکن نباشد، بسیار پیچیده می‌باشد. لذا در عمل از مدل‌های ساده‌تری به منظور بیان خصوصیات بستر بر مبنای خاصیت الاستیک استفاده می‌گردد که از آن جمله می‌توان به مدل‌های وینکلر، الاستیک پیوسته، فیلوننکو- برودیچ، هتنی، کرت و پسترناک اشاره نمود (Costa و Brebbia، ۱۹۸۵). تئوری وینکلر که در سال ۱۸۶۷ مطرح گردیده و بر اساس رفتار الاستیک خطی استوار است، همچنان مورد توجه محققین می‌باشد. این تئوری بستر را با فنرهای الاستیک مدل کرده و فقط اثر تنش نرمال در بستر را در نظر می‌گیرد به همین دلیل حرکت عرضی فنرها مستقل از هم می‌باشد (Winkler، ۱۸۶۷). برای افزایش دقت مدل‌سازی و برطرف نمودن این نقیصه، مطرح گردیدند که اثر تنش‌های برشی در بستر را نیز لحاظ می‌کنند. در این مدل‌ها علاوه بر ضریبی که وینکلر مطرح نمود، پارامتر جدیدی به منظور برقراری اتصال مکانیکی بین فنرهای مستقل مطرح می‌شود. در بین مدل‌های دو پارامتری موجود، مدل پسترناک با در نظر گرفتن اندرکنش برشی بین فنرهای وینکلر از مقبولیت بیشتری برخوردار است (Pasternak، ۱۹۵۴). برای تحلیل محیط‌های پیوسته نظیر تیر و صفحه واقع بر بستر الاستیک عمدتاً از مدل‌های یک و دو پارامتری مذکور استفاده شده است.

* نویسنده مسئول؛ شماره تماس: ۰۱۱-۳۲۳۳۱۷۰۷

آدرس ایمیل: samadi@stu.nit.ac.ir (غ. صمدی)، navayi@nit.ac.ir (ب. نوائی‌نیا)، p.nateghi2@stu.nit.ac.ir (پ. ناطقی بابگی).

Hetenyi (۱۹۷۱) و Hayashi (۱۹۲۱) برای مدل‌سازی تیر بر بستر الاستیک از مدل وینکلر استفاده نمودند. Wang و همکاران (۱۹۹۸) نیز اثر مدل‌های مختلف بستر الاستیک نظیر وینکلر، پسترناک و ولاسو را بر پاسخ دقیق تیر تیموشنکو بررسی کردند.

استفاده از مدل‌های فوق در تحلیل صفحات واقع بر بستر الاستیک به دلیل وجود اندرکنش بین خاک و صفحه از پیچیدگی بیشتری برخوردار می‌باشد. برای تحلیل صفحات نازک می‌توان با تقریب بسیار خوبی از اثر کرنش‌های برشی در راستای ضخامت صرف نظر کرد. ولی بدیهی است که پیچیدگی تحلیل صفحات با ضخیم‌تر شدن آن‌ها به دلیل اهمیت پیدا کردن اثر کرنش‌های برشی در ضخامت صفحه بیشتر می‌گردد. مطالعات بسیاری در خصوص حل صفحات نازک واقع بر بستر الاستیک با استفاده از روش‌های مختلف تحلیلی، تقریبی و عددی نظیر انتگرال فوریه، المان محدود و المان مرزی صورت پذیرفته است.

Bezine (۱۹۸۸)، Leon و Paris (۱۹۸۹) با استفاده از روش المان مرزی به تحلیل صفحه کیرشهف واقع بر بستر الاستیک وینکلر پرداختند همچنین Huang و Thambiratnam (۲۰۰۱) با بهره‌گیری از روش باریکه بی‌نهایت این مسأله را مورد بررسی قرار دادند.

Pan و همکاران (۲۰۱۳) نیز برای ارائه راه حل تحلیلی خود از تئوری وینکلر برای مدل‌سازی بستر الاستیک استفاده نمود. مدل دو پارامتری پسترناک نیز توسط Kerr (۱۹۶۴) و El-Zafrany و Fadhil (۱۹۹۶) برای تحلیل صفحات نازک واقع بر بستر الاستیک مورد استفاده قرار گرفته است.

با افزایش ضخامت ورق اثرات اینرسی دورانی و کرنش‌های برشی در راستای ضخامت ورق قابل صرف نظر کردن نبوده و استفاده از تئوری ورق‌های نازک را با تردید جدی مواجهه می‌نماید. از طرف دیگر حل سازه‌های ضخیم با پیچیدگی‌های بسیار بیشتری همراه بوده و روش‌های پیشنهادی برای حل این صفحات اغلب تقریبی و با فرضیات ساده شونده همراه می‌باشند. به منظور در نظر گرفتن اثر کرنش‌های برشی و نیز اینرسی دورانی در صفحات، تئوری‌های برشی مرتبه اول و مراتب بالاتر توسط محققین مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. در تئوری مرتبه اول توزیع تنش برشی در ضخامت صفحه ثابت فرض می‌گردد که امکان اقناع شرایط مرزی در سطوح بالا و پائین صفحه را غیرممکن می‌سازد که برای جبران این نقیصه یک ضریب اصلاح برش در نظر گرفته شده است (Szilard، ۲۰۰۴). تحلیل صفحات نسبتاً ضخیم با استفاده از تئوری‌های ریسنر و میندلین واقع بر بستر الاستیک یک پارامتری وینکلر به روش‌های متنوعی مورد مطالعه قرار گرفته است.

Henwood و همکاران (۱۹۸۲) با بهره‌گیری از سری فوریه و تئوری مرتبه اول صفحات، مسئله فوق را بررسی کردند. در ادامه، حل صفحه میندلین واقع بر بستر وینکلر به فرم فوریه و لوی توسط Voyiadjis و همکاران (۱۹۸۶) ارائه شد. همچنین AL-Hosani و همکاران (۱۹۹۹ و ۲۰۰۱) و Tian و همکاران (۲۰۱۵) از روش تبدیلات انتگرالی به ترتیب برای دستیابی به پاسخ صفحه ریسنر و میندلین واقع بر بستر تک پارامتری استفاده کردند.

Erattl و Akoz (۱۹۹۷)؛ Silva و همکاران (۲۰۰۱)؛ Liew و همکاران (۱۹۹۶)؛ Liu (۲۰۰۰) نیز مسئله مذکور را به روش‌های المان محدود و اختلاف محدود مورد مطالعه قرار دادند.

تحلیل صفحات نسبتاً ضخیم واقع بر بستر الاستیک دو پارامتری نیز توسط محققین بسیاری به روش‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته که به عنوان نمونه می‌توان به مطالعات انجام شده توسط Wang و همکاران (۱۹۹۲)؛ Han و Liew (۱۹۹۷)؛ Huang و همکاران (۲۰۰۸)؛ Kamal و Durvasola (۱۹۸۳)؛ Ozgan و Daloglu (۲۰۰۸)؛ Teo و Liew (۲۰۰۲) اشاره نمود. به علت پیچیدگی حل مسائل صفحه واقع بر بستر الاستیک، به خصوص اگر صفحه هندسه منظمی نداشته یا بارگذاری پیچیده‌ای داشته باشد، روش‌های عددی نظیر اجزا محدود کاربرد وسیعی پیدا نمودند.

Bergmann (۱۹۳۳) و Lam و همکاران (۲۰۰۰)، معادلات حاکم بر ورق ضخیم واقع بر بستر دو پارامتری را به کمک تابع گرین حل نمودند.

Matsunaga (۱۹۹۲، ۱۹۹۴ و ۱۹۹۷) با بسط سری‌های توانی و تئوری برشی مراتب بالا پایداری ورق مستطیلی ضخیم را مورد بررسی قرار داد.

اخوان و همکاران (۱۳۸۶) پاسخ کمانش صفحات مستطیلی میندلین را واقع بر بستر پسترناک به دست آوردند.

نوبختی و اقوام (۱۳۸۸ و ۲۰۱۱) از روش دیفرانسیل کوادرچر تعمیم یافته (Generalized quadrature differential) به تحلیل استاتیکی ورق ریسنر واقع بر بستر الاستیک دو پارامتری با شرایط مرزی مختلف پرداختند. استفاده از موجک نیز در سال‌های اخیر در حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر محیط‌های مختلف مطرح و توسط صفاری و حسینی (۱۳۸۶) برای حل معادله دیفرانسیل حاکم بر صفحات به کار گرفته شده است. عمده مطالعات صورت پذیرفته مذکور محدود به صفحات نازک با نسبت ضخامت به طول کم‌تر از ۰/۰۱ یا نسبتاً ضخیم با نسبت ضخامت به طول کم‌تر از ۰/۲ می‌باشد و برای صفحات ضخیم کارهای صورت گرفته بسیار معدود و محدود به فرضیات ساده شونده زیادی می‌باشند که عملاً کاربرد آن برای صفحات ضخیم واقعی را با تردید همراه می‌سازد. علاوه بر این در اکثر تحقیقات صورت‌پذیرفته در این زمینه مصالح همسانگرد کامل فرض شده است.

استفاده از توابع پتانسیل روشی کارا و مؤثر در تحلیل مسائل الاستیسیته می‌باشد که در این میان توابع پتانسیل تغییرمکان به

دلیل تعداد کم‌تر معادلات نسبت به توابع پتانسیل تنش کاربرد بیشتری یافته است. مجموعه شناخته شده‌ای از توابع پتانسیل برای دو محیط همسانگرد و همسانگرد جانبی معرفی شده‌اند که برای محیط‌های همسانگرد می‌توان از توابع Love ،Lame، augmented Love و برای محیط‌های ایزوترپ جانبی می‌توان از توابع پتانسیل Lekhnitskii, Hu, Nowacki, Elliott, Lodge Kellogg, Eskandari-ghadi, به عنوان توابع با کاربرد بیشتر یاد نمود (نوائی‌نیا، ۱۳۹۳).

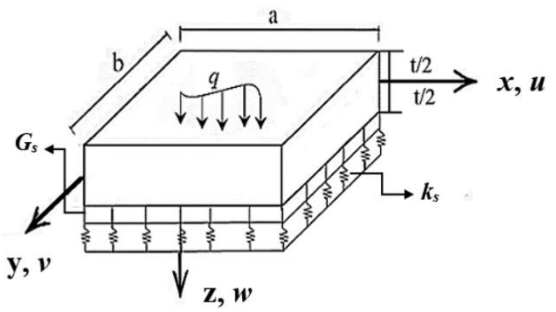
Wang و Shi (۱۹۹۷) از توابع هارمونیک حل الاستیسیته سه‌بعدی پاپکویچ- نوبر برای تحلیل صفحات استفاده نمودند.

Qian و همکاران (۲۰۰۳) با تحلیل تغییرشکل‌های بی‌نهایت کوچک حل خمش صفحه الاستیک ایزوتروپ ضخیم را به کمک تئوری مرتبه بالای برشی و نرمال انجام دادند.

Li و همکاران (۲۰۰۵) با به کارگیری مبانی سه بعدی تئوری الاستیسیته به جای فرضیات متداول صفحه، از روش یاد شده برای تحلیل صفحات ضخیم انعطاف‌پذیر برشی بهره بردند. توابع پتانسیل اسکندری قادی که با تعمیم توابع پتانسیل حاکم بر محیط های همسانگرد جانبی از حالت استاتیکی به دینامیکی در مرجع (Eskandari-ghadi، ۲۰۰۵) معرفی شده در تحلیل محیط های بی‌نهایت و نیمه بی‌نهایت به طور وسیعی به کار گرفته شده است (Khojasteh و همکاران، ۲۰۰۶، Ardeshir و Eskandari-Ghadi، ۲۰۰۹).

Rahimian و همکاران (۲۰۰۷) عملکرد توابع پتانسیل اسکندری قادی را برای محیط‌های همسانگرد جانبی مورد مطالعه قرار دادند. همچنین Eskandari-Ghadi و Amiri-Hezaveh (۲۰۱۳) توابع پتانسیل اسکندری قادی را برای محیط‌های ناهمگن ارتقا داده و برای تحلیل محیط نیمه بی‌نهایت از آن بهره گرفته‌اند. توابع پتانسیل لخنیستکی- هو- نواکی، در تحلیل خمشی صفحات مستطیلی همسانگرد جانبی برای اولین بار توسط Nematzadeh و همکاران (۲۰۱۰) و سپس توسط Moslemi و همکاران (۲۰۱۶، ۲۰۱۷) برای تحلیل کمانش صفحات ضخیم همسانگرد و همسانگرد جانبی با موفقیت مورد استفاده قرار گرفته است.

هدف این مقاله تحلیل صفحات همسانگرد جانبی در حالت کلی و همسانگرد کامل در حالت خاص واقع بر روی بستر الاستیک دو پارامتری با استفاده از توابع پتانسیل تغییرمکان لخنیستکی- هو- نواکی می‌باشد. ویژگی عمده کار حاضر، برخلاف سایر کارهای انجام شده، عدم محدودیت در ضخامت صفحات مورد بررسی می‌باشد بدین معنی که برای صفحات نازک، ضخیم نسبی و ضخیم بدون فرض ساده شونده‌ای در توزیع تنش یا کرنش برشی در ضخامت صفحه می‌باشد. علاوه بر این، در این تحقیق صفحات مورد بررسی در حالت کلی همسانگرد جانبی می‌باشند که در کار سایرین مورد توجه قرار نگرفته است.




**شکل ۱- ابعاد و مختصات صفحه مستطیلی همسانگرد جانبی واقع بر بستر الاستیک دوپارامتری پسترناک**

## ۲- تئوری

### ۲-۱- معادلات حاکم

صفحه مستطیلی با ضخامت دلخواه از مصالح الاستیک خطی و همسانگرد جانبی متکی بر بستر الاستیک دو پارامتری، مطابق شکل (۱) در نظر گرفته می‌شود. صفحه $xy$ منطبق با صفحه همسانگردی و محور $z$ عمود بر آن است. همچنین ابعاد صفحه، شامل: طول، عرض و ضخامت، به ترتیب برابر با $a$،$b$ و $t$ می‌باشد.

برای مواد همسانگرد جانبی، روابط (۱) بین تنش و کرنش برقرار است (Sadd، ۲۰۰۹).

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{yy} + C_{13}\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{yy} = C_{12}\varepsilon_{xx} + C_{11}\varepsilon_{yy} + C_{13}\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{zz} = C_{13}\varepsilon_{xx} + C_{13}\varepsilon_{yy} + C_{33}\varepsilon_{zz} \\ \tau_{xy} = (C_{11} - C_{12})\varepsilon_{xy} \\ \tau_{xz} = 2C_{44}\varepsilon_{xz} \\ \tau_{yz} = 2C_{44}\varepsilon_{yz} \end{cases} \tag{۱}$$

که در آن $\sigma_{ij}$ ، $\varepsilon_{ij}$ و $C_{ij}$ به ترتیب تانسور تنش، کرنش و نیز تانسور ثابت‌های الاستیک مصالح است که این ثابت‌ها، از طریق روابط (۲) با $E, E', \nu, \nu', G$ و $G'$ مرتبط می‌شوند (Lekhnitskii، ۱۹۸۱)، که در آن $E$ مدول یانگ، $\nu$ ضریب پواسون و $G$ مدول برشی در صفحه همسانگردی و $E', \nu'$ و $G'$ به ترتیب مدول یانگ، ضریب پواسون و مدول برشی در صفحات نیز عمود بر صفحه همسانگردی می‌باشند.

$$\begin{cases} C_{11} = \dfrac{E\left(1 - \frac{E}{E'}\nu'^2\right)}{(1+\nu)\left(1 - \nu - 2\frac{E}{E'}\nu'^2\right)} \\ C_{13} = \dfrac{E\nu'}{\left(1 - \nu - 2\frac{E}{E'}\nu'^2\right)} \\ C_{33} = \dfrac{E'(1-\nu)}{\left(1 - \nu - 2\frac{E}{E'}\nu'^2\right)} \\ C_{44} = G' \\ C_{66} = G = \dfrac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{cases} \tag{۲}$$

با جای‌گذاری شش رابطه کرنش- تغییرمکان در روابط (۱) و نیز جای‌گذاری روابط حاصله در سه رابطه تعادل و ساده‌سازی، روابط زیر حاصل می‌گردند که در واقع همان معادلات تعادل بر حسب تغییرمکان‌ها می‌باشند.

$$\begin{aligned}&C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{C_{11}-C_{12}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+C_{44}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\\&+\frac{C_{11}+C_{12}}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+(C_{13}+C_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=0\\&\frac{C_{11}+C_{12}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{C_{11}-C_{12}}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+C_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\\&+C_{44}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+(C_{13}+C_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}=0\\&(C_{13}+C_{44})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+(C_{13}+C_{44})\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}\\&+C_{44}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})+C_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0\end{aligned} \quad (۳)$$

در روابط فوق $v,u$ و $w$ توابع تغییرمکان محیط مورد بررسی به ترتیب در راستای $y,x$ و $z$ می‌باشند.

همانطور که مشاهده می‌گردد معادلات تعادل بر حسب تغییرمکان‌ها به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل درگیر با مشتقات جزئی می‌باشند. برای جداسازی این معادلات از توابع پتانسیل مربوط به محیط‌های همسانگرد جانبی لخنیتسکی- هو-نواکی استفاده می‌گردد که بر طبق آن سه مؤلفه تغییرمکان بر حسب توابع پتانسیل $F$ و $\chi$ به صورت زیر تعریف می‌شوند (Nematzadeh و همکاران، ۲۰۱۰).

$$\begin{cases}u=-\alpha_3\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}-\dfrac{\partial\chi}{\partial y}\\ v=-\alpha_3\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}+\dfrac{\partial\chi}{\partial x}\\ w=(1+\alpha_1)\left(\nabla^2+\beta\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F\end{cases} \quad (۴)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}&\alpha_1=\frac{C_{12}+C_{66}}{C_{66}};\ \alpha_2=\frac{C_{44}}{C_{66}}\\&\alpha_3=\frac{C_{13}+C_{44}}{C_{66}};\ \beta=\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}\\&\nabla^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\end{aligned} \quad (۵)$$

با قرار دادن روابط (۴) در معادلات (۳) و ساده‌سازی، معادلات حاکم بر حسب دو تابع پتانسیل $F$ و $\chi$ به شرح روابط (۶) و (۷) حاصل می‌گردد:

$$C_{66}(\nabla^2\chi)+C_{44}\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}=0 \quad (۶)$$

$$\begin{aligned}&\left[-2C_{13}C_{44}-{C_{13}}^2+C_{11}C_{33}\right]\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\nabla^2 F)\\&+C_{33}C_{44}\frac{\partial^4 F}{\partial z^4}+C_{11}C_{44}(\nabla^4 F)=0\end{aligned} \quad (۷)$$

که:

$$\nabla^4=\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}\right) \quad (۸)$$

معادله مشخصه رابطه (۷) نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}&C_{33}C_{44}.s^4+(-2C_{13}C_{44}-{C_{13}}^2\\&+C_{11}C_{33}).s^2+C_{11}C_{44}=0\end{aligned} \quad (۹)$$

که در آن $s_i^2$ $(i=1,2)$ ریشه‌های معادله (۹) می‌باشند که منفی یا صفر نبوده و روابط زیر بین آنها برقرار است (Nematzadeh و همکاران، ۲۰۱۰):

$$\begin{aligned}&{s_1}^2+{s_2}^2=\frac{-2C_{13}C_{44}-{C_{13}}^2+C_{11}C_{33}}{C_{33}C_{44}}\\&{s_1}^2{s_2}^2=\frac{C_{11}}{C_{33}}\end{aligned} \quad (۱۰)$$

اگر ${s_0}^2=\frac{C_{66}}{C_{44}}$ در نظرگرفته شود، می‌توان معادلات (۶) و (۷) را به شکل زیر ساده‌سازی کرد:

$$\nabla_1^2\nabla_2^2F_{(x,y,z)}=0 \quad (۱۱)$$

$$\nabla_0^2\chi_{(x,y,z)}=0 \quad (۱۲)$$

که در آن:

$$\nabla_i^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{{s_i}^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (۱۳)$$

به منظور حل معادلات دیفرانسیل حاکم به روش جداسازی متغیرها، توابع پتانسیل $F$ و $\chi$ به صورت ضرب سه تابع مستقل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$F=f(x)g(y)h(z) \quad (۱۴)$$

$$\chi=f_1(x)g_1(y)h_1(z) \quad (۱۵)$$

با جای‌گذاری روابط (۱۴) و (۱۵) در معادلات حاکم (۱۱) و (۱۲) و حل معادلات حاصل به روش جداسازی متغیرها، جواب-های ممکن *برای* $f, g, f_1$ و $g_1$ که شرایط مرزی را نیز اقناع کنند به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}&f(x)=c_1\sin(\alpha_m x)+c_2\cos(\alpha_m x)\\&g(y)=c_3\sin(\alpha_n y)+c_4\cos(\alpha_n y)\end{aligned} \quad (۱۶)$$

$$\begin{aligned}&f_1(x)=c_1'\sin({\alpha'}_m x)+c_2'\cos({\alpha'}_m x)\\&g_1(y)=c_3'\sin({\alpha'}_n y)+c_4'\cos({\alpha'}_n y)\end{aligned} \quad (۱۷)$$

که $c_1$ تا $c_4$، $c_1'$ تا $c_4'$، $\alpha_m$،$\alpha_n$،$\alpha'_m$ و $\alpha'_n$ ضرایب ثابت و مجهول می‌باشند که با اعمال شرایط مرزی باید تعیین گردند و m و n نیز اعداد صحیح و مثبت می‌باشند.

با جای‌گذاری روابط (۱۶) و (۱۷) در معادلات دیفرانسیل حاکم (۱۱) و (۱۲) در نهایت معادلات دیفرانسیل کامل بر حسب توابع $h$ و $h_1$ به شکل زیر تبدیل می‌شوند:

$$\frac{d^4h}{dz^4}-({s_1}^2+{s_2}^2)\alpha_{mn}^2\frac{d^2h}{dz^2}+{s_1}^2{s_2}^2\alpha_{mn}^4 h=0 \qquad (۱۸)$$

$$-C_{66}\alpha_{mn}^2 h_1+C_{44}\frac{d^2h_1}{dz^2}=0 \qquad (۱۹)$$

با حل معادلات فوق توابع $h$ و $h_1$ به شکل روابط (۲۰) و (۲۱) حاصل می‌شوند:

$$h(z)=c_5\,sinh(\beta_1 z)+c_6\,cosh(\beta_1 z)+c_7\,sinh(\beta_2 z)+c_8\,cosh(\beta_2 z) \qquad (۲۰)$$

$$h_1(z)=c_5'\,sinh(\beta_3 z)+c_6'\,cosh(\beta_3 z) \qquad (۲۱)$$

که در روابط فوق $c_5$ تا $c_8$، $c_5'$ و $c_6'$ ضرایب ثابت و مجهول و پارامترهای $\beta_1$، $\beta_2$ و $\beta_3$ نیز ازروابط زیر قابل محاسبه می‌باشند:

$$\begin{cases}\beta_1=s_1\alpha_{mn},\ \beta_2=s_2\alpha_{mn}\\ \beta_3=\dfrac{\alpha_{mn}(C_{44}C_{66})^{\frac{1}{2}}}{C_{44}}\\ \alpha_{mn}^2=\alpha_m^2+\alpha_n^2\end{cases} \qquad (۲۲)$$

به منظور تعیین ضرایب مجهول مذکور لازم است از شرایط مرزی استفاده گردد.

### ۲-۲- شرایط مرزی

شرایط مرزی هندسی و استاتیکی برای یک صفحه مستطیلی واقع بر تکیه‌گاه‌های ساده به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{cases}x=0\,,x=a & \rightarrow\begin{cases}w=0\\M_x=0\end{cases}\\ y=0\,,y=b & \rightarrow\begin{cases}w=0\\M_y=0\end{cases}\end{cases} \qquad (۲۳)$$

که در آن $M_x$ و $M_y$ لنگر خمشی به ترتیب حول محورهای $x$ و $y$ می‌باشند. با اقناع شرایط مرزی فوق ضرایب ثابت $c_2$، $c_4$، $c_1'$،$c_3'$ برابر صفر و ضرایب $\alpha_m$،$\alpha_n$،$\alpha'_m$ و $\alpha'_n$ به صورت رابطه (۲۴) به دست می‌آیند:

$$\alpha_m=\alpha'_m=\frac{m\pi}{a},\alpha_n=\ \alpha'_n=\frac{n\pi}{b} \qquad (۲۴)$$

با اعمال نتایج فوق، در نهایت توابع پتانسیل $F$ و $\chi$ به شرح روابط (۲۵) و (۲۶) حاصل می‌گردند که ضرایب جدید $\tilde{c}_1$ تا $\tilde{c}_6$ برای جلوگیری از طولانی شدن روابط در نظر گرفته شده‌اند:

$$F(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}sin(\alpha_m x)\,sin(\alpha_n y)\,(\tilde{c}_1 sinh(\beta_1 z)+\tilde{c}_2\,cosh(\beta_1 z)+\tilde{c}_3\,sinh(\beta_2 z)+\tilde{c}_4\,cosh(\beta_2 z)) \qquad (۲۵)$$

$$\chi(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}cos(\alpha_m x)\,cos(\alpha_n y)\,(\tilde{c}_3\,sinh(\beta_3 z)+\tilde{c}_3\,cosh(\beta_3 z)) \qquad (۲۶)$$

علاوه بر این در سطح فوقانی صفحه شرایط مرزی نیرویی زیر باید اقناع شوند:

$$z=-{}^{t}\!/_{2}\quad\rightarrow\begin{cases}\tau_{zx}=0\\ \tau_{zy}=0\\ \sigma_z=-q\end{cases} \qquad (۲۷)$$

که در آن $\sigma_z$ ، $\tau_{zx}$،$\tau_{zy}$ و $q$ به ترتیب تنش قائم، تنش‌های برشی در جهت $x$ و $y$ و بار خارجی مؤثر وارد بر صفحه می‌باشند.

در سطح پائینی صفحه علاوه بر صفر بودن تنش‌های برشی، تنش قائم نیز بر اساس (Liu، ۲۰۰۰) به شرح ذیل باید اقناع گردد:

$$z={}^{t}\!/_{2}\quad\rightarrow\begin{cases}\tau_{zx}=0\\ \tau_{zy}=0\\ \sigma_z=-K_s w+G_s\nabla^2 w\end{cases} \qquad (۲۸)$$

که $K_s$ و $G_s$ به ترتیب ضریب عکس‌العمل بستر (خاک) و سختی برشی خاک می‌باشند. لازم به ذکر است که در شرط مرزی مربوط به کف بستر چنانچه $G_s=0$ باشد، مدل وینکلر و چنانچه $G_s=K_s=0$ صفحه بدون بستر و در حالت $G_s\neq 0,K_s\neq 0$ مدل دو پارامتری پسترناک حاصل خواهد شد.

با اعمال شرایط مرزی (۲۷) و (۲۸) در نهایت تابع پتانسیل χ برابر صفر می‌شود. همچنین، با در نظر گرفتن بار $q$ به صورت سری دوگانه سینوسی فوریه، یک دستگاه چهار معادله و چهار مجهولی حاصل می‌گردد که با حل آن چهار ضریب مجهول باقی‌مانده مربوط به تابع $F$ محاسبه خواهند شد. در این تحقیق به منظور حل روند فوق از نرم‌افزار *MATLAB* نسخه ۸/۱ استفاده شده است.

## ۳- نتایج عددی

### ۳-۱- صحت‌سنجی

برای بررسی صحت نتایج و روند حل ارائه شده در این پژوهش، نتایج به دست آمده در حالت خاص همسانگرد کامل برای یک صفحه مربعی تحت بار یکنواخت با نتایج موجود ارائه شده در مراجع (Wang و همکاران، ۱۹۹۲)؛ (Han و همکاران، ۱۹۹۷) و (Teo و همکاران، ۲۰۰۲) مقایسه شده است. مواد همسانگرد کامل

حالت خاصی از مـواد همسانگـرد جانبی هستند که در این حالت $\beta_2 = \beta_1$ و در نتیجه معادله مفسـر رابطه (۱۸) دارای دو ریشـه مضاعـف می‌باشد که در آنها روابـط زیر بین ضرایب الاستیسیته برقـرار است:

$$\begin{cases} C_{11} = C_{33} = \dfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{12} = C_{13} = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{44} = C_{66} = \dfrac{E}{2(1+\nu)} \end{cases} \tag{۲۹}$$

تمام نتایـج ارائه شده در این تحقیق به شیوه زیر بی‌بعد شده‌اند تا نتیجه‌گیری‌ها مستقل از ابعاد صفحه و نیز مقدار بار وارد بر صفحه مورد بررسی باشد.

$$\begin{cases} w_c = \dfrac{wD * 10^2}{qa^4} \\ M_{xc} = \dfrac{M_x * 10}{qa^2} \\ \tau_{zx} = \dfrac{\tau_{xz}}{qa} \\ k_s = \dfrac{(K_s a^4)}{D} \\ g_s = \dfrac{(G_s a^2)}{D} \end{cases} \tag{۳۰}$$

که در آن $D = Et^3/12(1-\nu^2)$ سختی خمشی صفحه می‌باشد. در جدول (۱) نتایج تغییرمکان و لنگر خمشی مرکز صفحه به دست آمده از روش حاضر و دیگر مراجع موجود ارائه شده است. بدین منظور از خصوصیات مکانیکی زیر برای صفحه همسانگرد و بستر الاستیک استفاده شده است:

$$\begin{aligned} &E = 210\ GPa;\ \nu = 0.3 \\ &k_s = 200;\ g_s = 5 \end{aligned} \tag{۳۱}$$

از نتایج ارائه شده در جدول (۱) کاملاً مشهود است که تطابق کاملی بین پاسخ‌های کار حاضر و سایرین برای صفحات نازک (t/a=۰/۰۰۵) وجود دارد ولی با افزایش ضخامت صفحه اختلافات انـدکی بین نتایـج دیده می‌شود که ناشـی از در نظر گرفتن برخـــی فرضیات ساده شونده نظیر توزیع فرضـی تنش برشی در ضخامـت و اعمال ضـریب اصلاح برش در تئوری‌های دیگر می‌باشد.

در حالت همسانگرد جانبی روابط به دست آمده به روش حاضر را می‌توان با مطالعه انجام شده توسط Nematzadeh و همکاران (۲۰۱۰) با صفر در نظر گرفتن ضرایب بستر مقایسه نمود که در این صورت روابط حاصل از تطابق کامل برخوردارند.

**جدول ۱- مقایسه نتایج تغییرمکان و لنگر خمشی در مرکز صفحه همسانگرد مستطیلی حاصل از مطالعه حاضر با نتایج موجود دیگر مراجع**

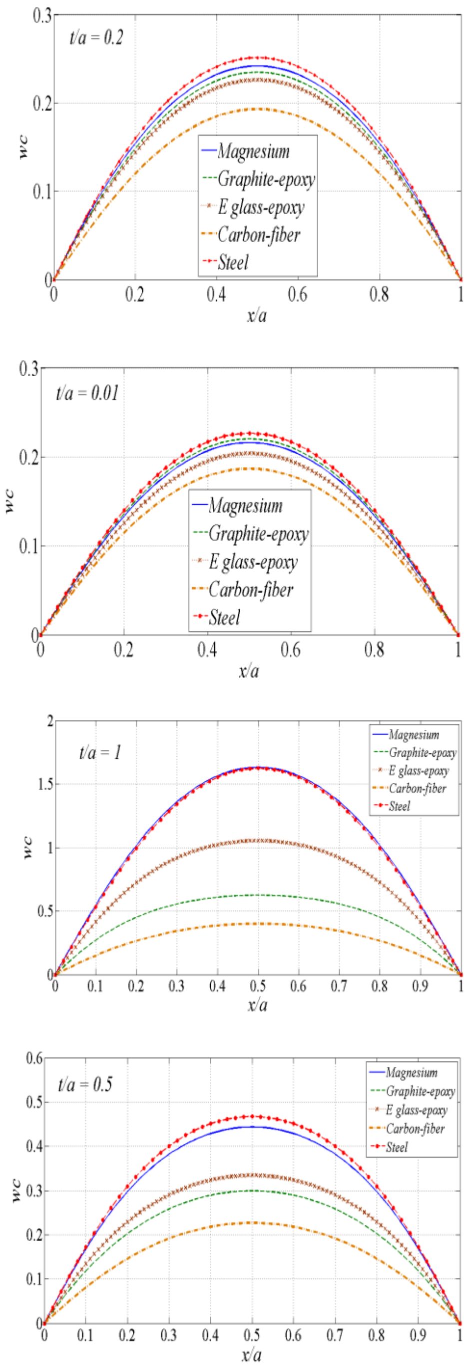
| $t/a$ | مراجع | $M_{xc}$ | $w_c$ |
|---|---|---|---|
| ۰/۰۰۵ | (Wang و همکاران، ۱۹۹۲) | ۰/۲۴۰۷ | ۰/۲۲۵۰ |
| | (Han و همکاران، ۱۹۹۷) | ۰/۲۴۱۸ | ۰/۲۲۶۴ |
| | (Teo و همکاران، ۲۰۰۲) | ۰/۲۴۱۸ | ۰/۲۲۶۴ |
| | پژوهش حاضر | ۰/۲۵۱۳ | ۰/۲۲۶۴ |
| ۰/۱ | (Wang و همکاران، ۱۹۹۲) | ۰/۲۳۵۲ | ۰/۲۳۰۳ |
| | (Han و همکاران، ۱۹۹۷) | ۰/۲۳۶۲ | ۰/۲۳۱۴ |
| | (Teo و همکاران، ۲۰۰۲) | ۰/۲۳۶۲ | ۰/۲۳۱۴ |
| | پژوهش حاضر | ۰/۲۴۷۴ | ۰/۲۳۲۳ |
| ۰/۲ | (Wang و همکاران، ۱۹۹۲) | ۰/۲۱۹۹ | ۰/۲۴۴۱ |
| | (Han و همکاران، ۱۹۹۷) | ۰/۲۲۰۸ | ۰/۲۴۵۰ |
| | (Teo و همکاران، ۲۰۰۲) | ۰/۲۲۰۸ | ۰/۲۴۵۰ |
| | پژوهش حاضر | ۰/۲۳۸۹ | ۰/۲۵۱۱ |

### ۳-۲- بررسی تأثیر ضخامت صفحه

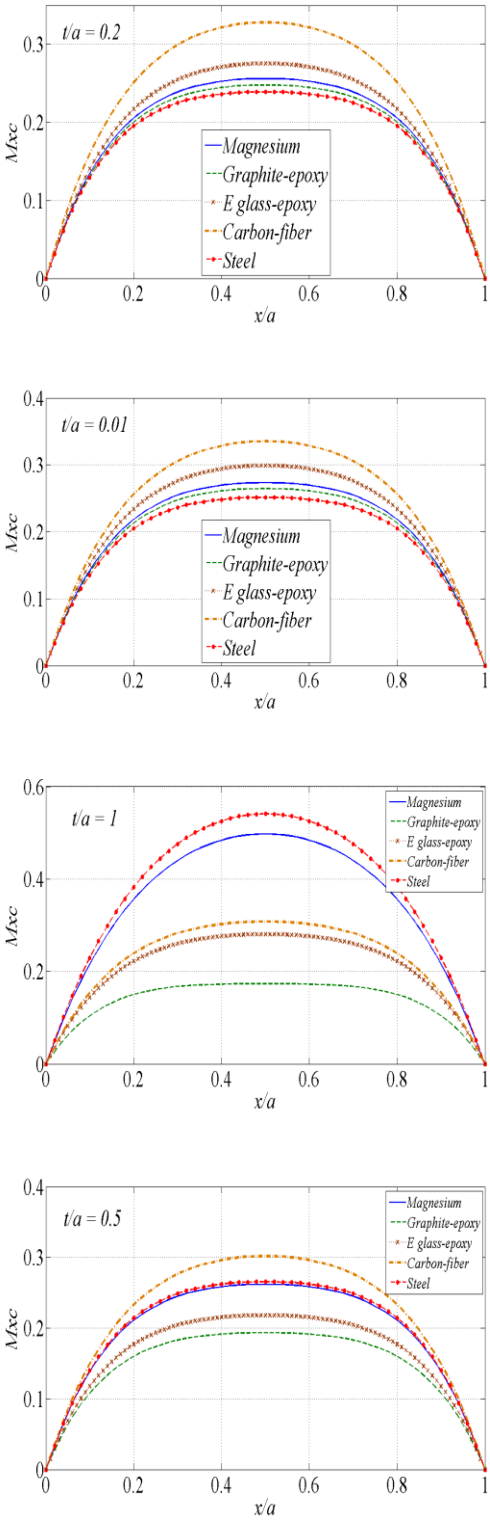
برای بررسی اثر نسبت ضخامت‌های مختلف بر میزان پاسخ صفحه، نمودار تغییرمکان بی‌بعد یک صفحه مربعی تحت بار یکنواخت برای $z = 0$ و $y = b/2$، نمودار لنگر خمشی بی‌بعد نیز برای $y = b/2$ و همچنین تنش برشی عرضی بی‌بعد برای خط $x = a$ و $y = b/2$ به ازای چهار نسبت ضخامت به عرض ۰/۰۱، ۰/۲، ۰/۵ و ۱ در شکل‌های (۲)، (۳) و (۴) ارائه شده است. نسبت‌های ضخامت به عرض ۰/۰۱ برای صفحات نازک، ۰/۲ برای صفحات نسبتاً ضخیم و نسبت ضخامت‌های ۰/۵ و ۱ نیز معرف صفحات ضخیم می‌باشند. در تمام مثال‌های حل شده در این قسمت رفتار چهار ماده همسانگرد جانبی منیزیم، اپوکسی گرافیت، اپوکسی شیشه‌ای و الیاف کربنی با ضرایب الاستیسیته بیان شده در جدول (۲) و همچنین فولاد به عنوان یک ماده همسانگرد کامل مورد بررسی قرار گرفته است. برای آن که تنها اثر تغییرات نسبت ضخامت بررسی شود ضرایب بستر $K_s$ و $G_s$ ثابت در نظر گرفته شده است.

جدول ۲- ضرایب الاستیسیته مواد همسانگرد جانبی و ماده همسانگرد کامل فولاد (GPa) (Ding و همکاران، ۲۰۰۶)

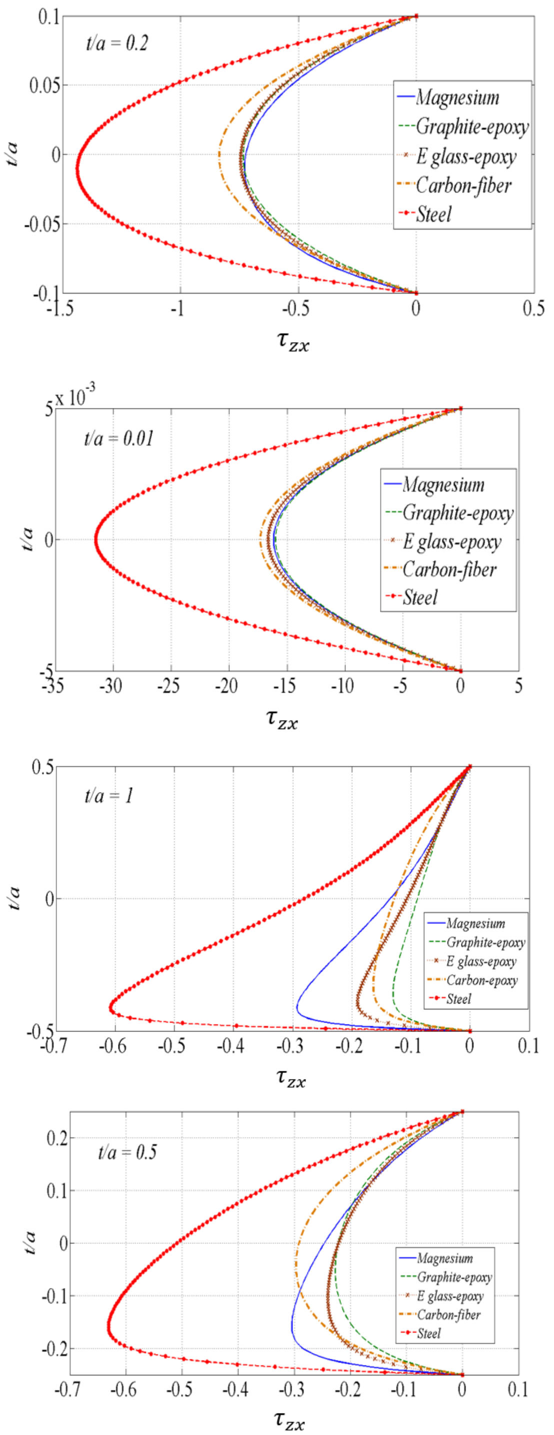
| مواد | $C_{11}$ | $C_{12}$ | $C_{13}$ | $C_{33}$ | $C_{44}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| منیزیم | ۵۹/۷ | ۲۶/۲ | ۲۱/۷ | ۶۱/۷ | ۱۶/۴ |
| اپوکسی گرافیت | ۸/۲۷ | ۲/۷۶۷ | ۰/۲۸۵ | ۸۶/۸ | ۴/۱۴۷ |
| اپوکسی شیشه | ۱۴/۹۳ | ۶/۵۶۷ | ۵/۲۴۴ | ۴۷/۲۷ | ۴/۷۴۵ |
| الیاف کربنی | ۲۰ | ۹/۹۸ | ۶/۴۵ | ۲۳۵ | ۲۴ |
| فولاد | ۲۸۲/۷ | ۱۱۲/۲ | ۱۱۲/۲ | ۲۸۲/۷ | ۸۰/۷۷ |




شکل ۲- تغییرمکان میان صفحه بی‌بعد شده برای $y = b/2$، به ازای $k_s = 200; g_s = 5$




شکل ۳- لنگر خمشی میان صفحه بی‌بعد شده برای $y = b/2$، به ازای $k_s = 200; g_s = 5$




**شکل ۴- تنش برشی بی‌بعد شده صفحه در $x = a$ و $y = b/2$، به ازای $k_s = 200; g_s = 5$**

همان طور که در شکل (۲) مشاهده می‌شود، منیزیم و الیاف کربنی به ترتیب با محدوده تغییرات (۰/۲۱۶۰ تا ۱/۶۳۱۴) و (۰/۱۸۶۷ تا ۰/۳۹۹۷) بیش‌ترین و کم‌ترین میزان تغییرات تغییرمکان در مقابل افزایش ضخامت را از خود نشان می‌دهند. ماده همسانگرد جانبی اپوکسی گرافیت برای صفحات نازک و نسبتاً ضخیم دارای تغییرمکان بیشتری نسبت به اپوکسی شیشه‌ای می‌باشد ولی با افزایش ضخامت تا محدوده صفحات ضخیم این نسبت معکوس می‌شود. همچنین، ماده همسانگرد کامل فولاد بیش‌ترین میزان تغییرمکان بی‌بعد را در مقایسه با دیگر مواد در تمام نسبت ضخامت‌ها دارا می‌باشند.

شکل (۳) نشان می‌دهد که ماده همسانگرد جانبی الیاف کربنی با محدوده تغییرات (۰/۳۳۴۰ تا ۰/۳۰۷۹) بیش‌ترین مقدار لنگر خمشی را برای نسبت ضخامت‌های ۰/۰۱ تا ۰/۵ دارا می‌باشد اما در نسبت ضخامت ۱، لنگر خمشی مواد منیزیم و فولاد به مراتب بیشتر از الیاف کربنی می‌شود. علاوه بر این، کم‌ترین و بیش‌ترین میزان در تغییرات لنگر نیز به ترتیب متعلق به مصالح الیاف کربنی با محدوده تغییرات (۰/۳۳۴۰ تا ۰/۳۰۷۹) و فولاد با محدوده تغییرات (۰/۲۵۱۲ تا ۰/۵۴۰۸) می‌باشد.

با مقایسه نمودارهای موجود در شکل (۴) ملاحظه می‌گردد که توزیع تنش برشی به دست آمده برای تمامی مصالح مورد بررسی در صفحات نازک (به ازای نسبت ضخامت ۰/۰۱) به دلیل ناچیز بودن مقدار تنش برشی توزیع آن در ضخامت متقارن می‌باشد ولی این توزیع با افزایش ضخامت تا محدوده صفحات نسبتاً ضخیم برای مواد فولاد و منیزیم از تقارن خارج شده و در نسبت ضخامت ۰/۵ و ۱، برای تمامی مصالح مورد بررسی از حالت تقارن خارج و با توجه به وجود بستر الاستیک مطابق انتظار حداکثر مقدار تنش برشی آنها از مرکز به سمت بالای صفحه متمایل می‌شود. علاوه بر این، مشاهده می‌شود که بیش‌ترین میزان تنش برشی بی‌بعد برای همه ضخامت‌ها مربوط به ماده همسانگرد کامل فولاد به میزان ۳۱/۵ و کم‌ترین میزان تنش برشی بی‌بعد نیز متعلق به ماده همسانگرد جانبی اپوکسی گرافیت به میزان ۰/۱۳۰۴ می‌باشد. تغییرات رفتاری مواد مورد بررسی در ضخامت‌های مختلف را می‌توان به متفاوت بودن نسبت ضرایب الاستیسیته در جهت‌های مختلف آنها ارتباط داد.

## ۳-۳- بررسی تأثیر ضرایب بستر

برای بررسی تأثیر ضرایب بستر بر میزان پاسخ صفحه، حداکثر تغییرمکان، لنگر خمشی و تنش برشی بی‌بعد یک صفحه مربعی تحت بار یکنواخت با ضرایب بستر مختلف برای چهار ماده همسانگرد جانبی و یک ماده همسانگرد کامل در جداول (۳) تا (۵) ارائه شده است. نتایج در این جداول برای چهار حالت متفاوت بدون بستر الاستیک، بستر الاستیک وینکلر، بستر الاستیک پسترناک با سختی برشی کم و زیاد به ازای نسبت ضخامت‌های مختلف مقایسه شده‌اند.

**جدول ۳- حداکثر تغییرمکان صفحه به ازای ضرایب بستر و ضخامت‌های مختلف**

| $k_s$ | $g_s$ | مواد | $t/a =$ ۰/۰۱ | $t/a =$ ۰/۲ | $t/a =$ ۰/۵ | $t/a =$ ۱ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | منیزیم | ۰/۳۷۳۶ | ۰/۴۵۱۶ | ۰/۸۴۳۲ | ۱/۹۵۳۶ |
| | | اپوکسی گرافیتی | ۰/۳۸۶۳ | ۰/۴۴۱۹ | ۰/۷۳۰۴ | ۱/۷۱۴۵ |
| | | اپوکسی شیشه‌ای | ۰/۳۳۸۴ | ۰/۴۱۰۱ | ۰/۷۷۸۸ | ۱/۹۸۷۶ |
| | | الیاف کربن | ۰/۲۹۳۴ | ۰/۳۱۰۴ | ۰/۳۹۹۰ | ۰/۶۹۷۹ |
| | | فولاد | ۰/۴۰۶۴ | ۰/۴۸۰۳ | ۰/۸۴۹۳ | ۱/۸۴۵۹ |
| ۲۰۰ | ۰ | منیزیم | ۰/۲۵۱۱ | ۰/۲۸۵۰ | ۰/۴۹۷۴ | ۱/۶۴۴۲ |
| | | اپوکسی گرافیتی | ۰/۲۵۶۷ | ۰/۲۷۷۶ | ۰/۳۶۵۴ | ۰/۷۰۸۶ |
| | | اپوکسی شیشه‌ای | ۰/۲۳۴۸ | ۰/۲۶۵۰ | ۰/۳۹۹۱ | ۱/۱۱۰۸ |
| | | الیاف کربن | ۰/۲۱۲۲ | ۰/۲۲۰۵ | ۰/۲۶۲۹ | ۰/۴۴۱۷ |
| | | فولاد | ۰/۲۶۵۴ | ۰/۲۹۷۴ | ۰/۵۱۸۷ | ۱/۶۳۱۵ |
| ۲۰۰ | ۵ | منیزیم | ۰/۲۱۶۰ | ۰/۲۴۱۸ | ۰/۴۴۳۳ | ۱/۶۳۱۴ |
| | | اپوکسی گرافیتی | ۰/۲۲۰۱ | ۰/۲۳۴۶ | ۰/۲۹۹۱ | ۰/۶۲۴۷ |
| | | اپوکسی شیشه‌ای | ۰/۲۰۳۸ | ۰/۲۲۶۰ | ۰/۳۳۴۲ | ۱/۰۵۴۰ |
| | | الیاف کربن | ۰/۱۸۶۷ | ۰/۱۹۳۰ | ۰/۲۲۶۷ | ۰/۳۹۹۷ |
| | | فولاد | ۰/۲۲۶۴ | ۰/۲۵۱۱ | ۰/۴۶۶۸ | ۱/۶۲۳۰ |
| ۲۰۰ | ۲۰ | منیزیم | ۰/۱۵۱۸ | ۰/۱۶۶۸ | ۰/۳۶۶۲ | ۱/۶۱۷۴ |
| | | اپوکسی گرافیتی | ۰/۱۵۳۸ | ۰/۱۶۰۰ | ۰/۱۹۷۷ | ۰/۵۱۵۱ |
| | | اپوکسی شیشه‌ای | ۰/۱۴۵۸ | ۰/۱۵۶۶ | ۰/۲۳۶۲ | ۰/۹۸۵۷ |
| | | الیاف کربن | ۰/۱۳۶۹ | ۰/۱۴۰۱ | ۰/۱۶۲۴ | ۰/۳۳۹۲ |
| | | فولاد | ۰/۱۵۶۸ | ۰/۱۷۱۹ | ۰/۳۹۳۶ | ۱/۶۱۳۵ |

**جدول ۴- حداکثر لنگر خمشی صفحه به ازای ضرایب بستر و ضخامت‌های مختلف**

| $k_s$ | $g_s$ | مواد | $t/a =$ ۰/۰۱ | $t/a =$ ۰/۲ | $t/a =$ ۰/۵ | $t/a =$ ۱ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | منیزیم | ۰/۴۹۹۵ | ۰/۵۰۳۸ | ۰/۵۲۷۰ | ۰/۶۱۲۳ |
| | | اپوکسی گرافیتی | ۰/۴۹۱۴ | ۰/۴۹۱۴ | ۰/۴۹۱۶ | ۰/۴۹۲۴ |
| | | اپوکسی شیشه‌ای | ۰/۵۲۱۸ | ۰/۵۲۳۰ | ۰/۵۲۹۵ | ۰/۵۵۲۹ |
| | | الیاف کربن | ۰/۵۵۰۳ | ۰/۵۵۰۵ | ۰/۵۵۱۹ | ۰/۵۵۷۰ |
| | | فولاد | ۰/۴۷۸۷ | ۰/۴۸۴۳ | ۰/۵۱۵۲ | ۰/۶۳۰۰ |
| ۲۰۰ | ۰ | منیزیم | ۰/۳۲۲۲ | ۰/۳۰۴۹ | ۰/۲۹۶۴ | ۰/۵۰۱۷ |
| | | اپوکسی گرافیتی | ۰/۳۱۲۹ | ۰/۲۹۶۱ | ۰/۲۳۶۶ | ۰/۱۹۶۷ |
| | | اپوکسی شیشه‌ای | ۰/۳۴۸۷ | ۰/۳۲۵۹ | ۰/۲۶۱۱ | ۰/۲۹۶۳ |
| | | الیاف کربن | ۰/۳۸۴۴ | ۰/۳۷۸۸ | ۰/۳۵۲۵ | ۰/۳۴۲۱ |
| | | فولاد | ۰/۲۹۸۹ | ۰/۲۸۶۴ | ۰/۲۹۸۲ | ۰/۵۴۴۲ |
| ۲۰۰ | ۵ | منیزیم | ۰/۲۷۳۳ | ۰/۲۵۶۰ | ۰/۲۶۱۹ | ۰/۴۹۷۲ |
| | | اپوکسی گرافیتی | ۰/۲۶۴۵ | ۰/۲۴۷۷ | ۰/۱۹۳۳ | ۰/۱۷۳۳ |
| | | اپوکسی شیشه‌ای | ۰/۲۹۸۹ | ۰/۲۷۵۴ | ۰/۲۱۸ | ۰/۲۸۰۳ |
| | | الیاف کربن | ۰/۳۳۴ | ۰/۳۲۸۱ | ۰/۳۰۱۸ | ۰/۳۰۷۹ |
| | | فولاد | ۰/۲۵۱۲ | ۰/۲۳۸۹ | ۰/۲۶۵۵ | ۰/۵۴۰۸ |
| ۲۰۰ | ۲۰ | منیزیم | ۰/۱۸۵۳ | ۰/۱۷۲۲ | ۰/۲۱۱۶ | ۰/۴۹۲۲ |
| | | اپوکسی گرافیتی | ۰/۱۷۸۱ | ۰/۱۶۴۹ | ۰/۱۲۶۷ | ۰/۱۴۱۶ |
| | | اپوکسی شیشه‌ای | ۰/۲۰۶۸ | ۰/۱۸۷۱ | ۰/۱۵۱۸ | ۰/۲۶۰۶ |
| | | الیاف کربن | ۰/۲۳۷۲ | ۰/۲۳۲۰ | ۰/۲۱۲۱ | ۰/۳۰۷۸ |
| | | فولاد | ۰/۱۶۷۵ | ۰/۱۵۸۸ | ۰/۲۱۸۳ | ۰/۵۳۷۱ |

جدول ۵- حداکثر تنش برشی بی‌بعد شده به ازای ضرایب بستر و ضخامت‌های مختلف

| $k_s$ | $g_s$ | مواد | $t/a=$ ۰/۰۱ | $t/a=$ ۰/۲ | $t/a=$ ۰/۵ | $t/a=$ ۱ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | منیزیم | -۲۴/۳۴۴۱ | -۱/۱۷۳۰ | -۰/۴۳۴۳ | -۰/۲۹۹۹ |
| | | اپوکسی گرافیتی | -۲۴/۳۴۴۵ | -۱/۱۹۰۰ | -۰/۴۴۷۹ | -۰/۲۰۹۸ |
| | | اپوکسی شیشه‌ای | -۲۴/۳۴۳۷ | -۱/۱۸۰۰ | -۰/۴۳۶۰ | -۰/۲۳۱۴ |
| | | الیاف کربن | -۲۴/۳۵۰۰ | -۱/۲۰۲۰ | -۰/۴۵۸۲ | -۰/۲۱۷۱ |
| | | فولاد | -۴۸/۶۹۰۰ | -۲/۳۵۱۰ | -۰/۸۷۳۵ | -۰/۶۱۷۴ |
| ۲۰۰ | ۰ | منیزیم | -۱۸/۰۹۰۰ | -۰/۸۲۸۶ | -۰/۳۱۹۹ | -۰/۲۹۳ |
| | | اپوکسی گرافیتی | -۱۷/۹۵۰۰ | -۰/۸۳۹۶ | -۰/۲۶۸۶ | -۰/۱۳۶۷ |
| | | اپوکسی شیشه‌ای | -۱۸/۵۰۰۰ | -۰/۸۴۸۵ | -۰/۲۷۱۹ | -۰/۱۹۲۹ |
| | | الیاف کربن | -۱۹/۰۷۰۰ | -۰/۹۲۷۹ | -۰/۳۳۳۶ | -۰/۱۷۰۴ |
| | | فولاد | -۳۵/۴۵۰۰ | -۱/۶۳۹۰ | -۰/۶۵۹۵ | -۰/۶۰۸۶ |
| ۲۰۰ | ۵ | منیزیم | -۱۶/۱۶۰۰ | -۰/۷۲۸۰ | -۰/۳۰۴۳ | -۰/۲۹۲۷ |
| | | اپوکسی گرافیتی | -۱۶/۰۰۰۰ | -۰/۷۳۳۹ | -۰/۲۲۶۷ | -۰/۱۳۰۴ |
| | | اپوکسی شیشه‌ای | -۱۶/۶۴۰۰ | -۰/۷۴۵۴ | -۰/۲۴۰۱ | -۰/۱۹۰۵ |
| | | الیاف کربن | -۱۷/۳۱۰۰ | -۰/۸۳۶۳ | -۰/۲۹۶۹ | -۰/۱۶۳۷ |
| | | فولاد | -۳۱/۵۰۰۰ | -۱/۴۳۸۰ | -۰/۶۳۱۲ | -۰/۶۰۸۳ |
| ۲۰۰ | ۲۰ | منیزیم | -۱۲/۵۲۰۰ | -۰/۵۵۰۳ | -۰/۲۸۴۶ | -۰/۲۹۲۴ |
| | | اپوکسی گرافیتی | -۱۲/۳۵۰۰ | -۰/۵۴۱۶ | -۰/۱۶۷۲ | -۰/۱۲۳۷ |
| | | اپوکسی شیشه‌ای | -۱۳/۰۳۰۰ | -۰/۵۵۶۱ | -۰/۱۹۸۹ | -۰/۱۵۵۰ |
| | | الیاف کربن | -۱۳/۷۸۰۰ | -۰/۶۵۵۴ | -۰/۲۳۲۶ | -۰/۱۸۷۸ |
| | | فولاد | -۲۴/۱۸۰۰ | -۱/۰۸۸۰ | -۰/۵۹۵۲ | -۰/۶۰۷۹ |

از جدول (۳) ملاحظه می‌شود که برای هر نسبتی از ضخامت و نیز نوع ماده تشکیل‌دهنده صفحه، حداکثر تغییرمکان در حالت بدون بستر بیشترین مقدار و با افزودن ضرایب بستر از مقدار آن کاسته می‌شود که این کاهش در مرحله انتقال از حالت بدون بستر به بستر وینکلر بیش‌ترین مقدار را دارا می‌باشد. با مقایسه نتایج دو حالت بستر یک و دو پارامتری مشاهده می‌شود که حداکثر تغییرمکان صفحه در حالت بستر دوپارامتری حتی با سختی برشی کم خاک، اختلافی حدود ۲۰٪ را نشان می‌دهد و با افزایش سختی برشی خاک این اختلاف به طور قابل ملاحظه‌ای در حدود ۶۰٪ افزایش می‌یابد. بیش‌ترین میزان تغییرات به وجود آمده در نتایج به ازای نسبت ضخامت‌های ۰/۰۱ و ۰/۲ برای فولاد و در نسبت ضخامت‌های ۰/۵ و ۱ مربوط به اپوکسی گرافیت است در حالی که کم‌ترین تغییرات در پاسخ برای نسبت ضخامت‌های ۰/۰۱، ۰/۲ و ۰/۵ متعلق به الیاف کربنی و در نسبت ضخامت ۱ مربوط به فولاد است. همان طور که در جدول (۴) مشاهده می‌شود، الیاف کربنی کم‌ترین میزان تغییرات و بیش‌ترین مقدار لنگر خمشی را در حالت‌های مختلف وجود بستر الاستیک و برای تمام نسبت ضخامت‌ها به جز نسبت ضخامت ۱ دارا می‌باشد. با مقایسه نتایج لنگر خمشی به دست آمده برای دو حالت بستر یک و دو پارامتری مشاهده می‌شود که حداکثر لنگر خمشی صفحه در حالت بستر دو پارامتری با سختی برشی بی‌بعد خاک برابر ۵، اختلاف حدود ۱۸٪ را با تئوری وینکلر نشان می‌دهد که این اختلاف با افزایش سختی برشی خاک از مقدار بی‌بعد ۵ به ۲۰، به طور قابل ملاحظه‌ای در حدود ۷۰٪ افزایش می‌یابد. جدول (۵) نشان می‌دهد که بیش‌ترین مقدار تنش برشی در تمام حالات مربوط به ماده همسانگرد کامل فولاد می‌باشد. علاوه براین، با مقایسه نتایج تنش برشی به دست آمده برای دو حالت بستر یک و دو پارامتری مشاهده می‌شود که حداکثر تنش برشی صفحه در حالت بستر دو پارامتری با سختی برشی بی‌بعد خاک برابر ۵، اختلاف حدود ۱۲٪ را با تئوری وینکلر دارا می‌باشد در حالی که این اختلاف با افزایش سختی برشی خاک تا مقدار بی‌بعد ۲۰، در حدود ۵۰ ٪ افزایش یافته است.

## ۴- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، توابع پتانسیل تغییرمکان به صورت موفقیت‌آمیزی برای حل صفحات ضخیم همسانگرد جانبی مستطیلی واقع بر بستر الاستیک دو پارامتری به کار گرفته شد. معادلات دیفرانسیل حاکم با استفاده از روش جداسازی متغیرها و اعمال دقیق شرایط مرزی حل و پاسخ‌های تغییرمکان، لنگرخمشی و تنش برشی صفحه برای حالات مختلف ضرایب بستر و نسبت ضخامت محاسبه شد.

رفتار خمشی چهار ماده همسانگرد جانبی و فولاد به عنوان یک ماده همسانگرد کامل با یکدیگر مقایسه شد. نتایج حاکی از آن است که مواد منیزیم و الیاف کربنی به ترتیب بیش‌ترین و

کم‌ترین میزان تغییرات تغییرمکان در مقابل افزایش ضخامت را از خود نشان می‌دهند در حالی که کم‌ترین و بیش‌ترین میزان در تغییرات لنگر به ترتیب متعلق به مصالح الیاف کربنی و فولاد می‌باشد. علاوه بر این، مشاهده می‌شود که بیش‌ترین میزان تنش برشی برای همه ضخامت‌ها مربوط به ماده همسانگرد کامل فولاد و کم‌ترین میزان تنش برشی نیز متعلق به ماده همسانگرد جانبی اپوکسی گرافیت می‌باشد. با مقایسه نتایج دو حالت بستر یک و دو پارامتری مشاهده می‌شود که حداکثر تغییرمکان، لنگر خمشی و تنش برشی صفحه در حالت بستر دو پارامتری حتی با سختی برشی کم خاک، به ترتیب اختلافی حدود ۲۰، ۱۸ و ۱۲ درصدی را از خود نشان می‌دهند و با افزایش سختی برشی خاک تا مقدار بی‌بعد ۲۰، اختلافات فوق به ترتیب به حدود ۶۰، ۷۰ و ۵۰ درصد تبدیل می‌شوند که نشان‌دهنده تأثیر قابل توجه سختی برشی خاک در میزان پاسخ صفحه است.

## ۵- مراجع


اخوان ح، علی‌بیگلو ا، "تحلیل کمانش ورق‌های ضخیم مستطیلی برروی بستر الاستیک دو پارامتری، تحت بار صفحه‌ای یکنواخت با چهار تکیه‌گاه ساده"، پانزدهمین کنفرانس سالانه بین‌المللی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ۱۳۸۶، تهران، ۲۵-۲۷.

صفاری ح، حسینی خرمی س ا، "حل معادله دیفرانسیل حاکم بر تعادل صفحات با استفاده از موجک هار"، سومین کنگره ملی مهندسی عمران، ۱۳۸۶.

نوائی‌نیا ب، "حل دقیق ارتعاش آزاد صفحات همسانگرد مستطیلی ضخیم بر روی تکیه‌گاه‌های ساده با استفاده از توابع پتانسیل تغییر مکان"، مهندسی عمران شریف، بهار ۱۳۹۳، ۳۰-۲ (۱)، ۳۳-۴۱.

نوبختی ص، محمدی اقدم، م، "تحلیل استاتیکی ورق رایسنر روی بستر الاستیک دو پارامتره با شرایط مرزی گوناگون"، هفدهمین کنفرانس سالانه بین‌المللی مهندسی مکانیک، ۱۳۸۸، اردیبهشت، دانشگاه تهران، ۲۹-۳۱.

Al-Hosani K, "A non-singular fundamental solution for boundary element analysis of thick plates on Winkler foundation under generalized loading", Computers and Structures, 2001, 79 (31), 2767-2780.

Al-Hosani K, Fadhil S, El-Zafrany A, "Fundamental solution and boundary element analysis of thick plates on Winkler foundation", Computers and Structures, 1999, 70, 325-336.

Ardeshir Behrestaghi A, Eskandari-Ghadi M, "Two layers half-space transversely isotropic medium under horizontal load on surface in frequency domain", Journal of Civil and Surveying Engineering, 2009, 43 (1), 1-13.

Bergmann LA, Hall JK, Lueschen GGG, McFarland DM, "Dynamic Green's function for Levy plates", Sound Vibration, 1993, 162, 281-310.

Bezine G, "A new boundary element method for bending of plates on elastic foundations", International Journal of Solids and Structures, 1988, 24 (6), 557-565.

Costa JA, Brebbia CA, "The boundary element method applied to plates on elastic foundation", Engineering Analysis, 1985, 2, 174-183.

Ding H, Chen W, Zhang L, "Elasticity of transversely isotropic materials", Springer Science and Business Media, 2006.

El-Zafrany A, Fadhil S, "A modified Kirchhoff theory for boundary element analysis of thin plates resting on two-parameter foundation", Engineering Structures, 1996, 18 (2), 102-114.

Erattl N, Akoz AY, "The mixed finite element formulation for the thick plates on elastic foundations", Computers and Structures, 1997, 64 (4), 515-529.

Eskandari-Ghadi M, "A complete solution of the wave equations for transversely isotropic media", Journal of Elasticity, 2005, 81, 1-19.

Eskandari-Ghadi M, Amiri-Hezaveh A, "Wave propagations in exponentially graded transversely isotropic half-space with potential function method", Mechanics of Materials, 2013.

Han JB, Liew KM, "Numerical differential quadrature method for Reissner/Mindlin plates on two parameter foundations", International Journal of Mechanical Sciences, 1997, 39 (9), 977-989.

Hayashi K, "Theory of beams on elastic foundation", Springer-verlag, German, 1921.

Henwood DJ, Whiteman JR, Yettram AL, "Fourier series solution for a rectangular thick plate with free edges on an elastic foundation", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1982, 18 (12), 1801-1820.

Hetenyi M, "Beams on Elastic Foundation: theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering", University of Michigan, Michigan, 0-472-08445-3, 1971.

Huang MH, Thambiratnam DP, "Analysis of plates resting on elastic supported and elastic foundation by finite strip method", Computers and Structures, 2001, 79, 2547-2557.

Huang ZY, Lu CF, Chen WQ, "Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations", Composite Structures, 2008, 85, 95-104.

Kamal K, Durvasula S, "Bending of Circular Plate on Elastic Foundation", Journal of Engineering Mechanics, 1983, 109 (5), 1293-1298.

Kerr A, "Elastic and Viscoelastic Foundation Models", Journal of Applied Mechanics, 1964, 491-498.

Khojasteh A, Rahimian M, Eskandari-Ghadi M, "3D static analysis of a transversely isotropic half space", Journal of Faculty of Technology, University of Technology, 2006, 40 (5), 611-624.

Lam KY, Wang CM, He XQ, "Canonical exact solutions for Levy-plates on two-parameter foundation using Green's functions", Engineering Structures, 2000, 22, 364-378.

local Petrov-Galerkin (MLPG) Methods", CMES, 2003, 4, 161-175.

Rahimian M, Eskandari-Ghadi M, Pak RYS, Khojasteh A, "Three dimensional dynamic analysis of a transversely isotropic half-space", ASCE Journal of Engineering Mechanics, 2007, 133,134-1145.

Sadd MH, "Elasticity: theory, applications, and numeric", Academic Press, 2009.

Silva ARD, Silveira RAM, Goncalves PB, "Numerical methods for analysis of plates on tensionless elastic foundations", International Journal of Solids and Structures, 2001, 38, 2083-2100.

Szilard R, "Theories and Applications of Plates Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods", John Wiley & sons. Inc., 2004.

Teo TM, Liew KM, "Differential cubature method for analysis of shear deformable rectangular plates on Pasternak foundation", International Journal of Mechanical Sciences, 2002, 44, 1179-1194.

Tian B, Li R, Zhong Y, "Integral transform solutions to the bending problems of moderately thick rectangular plates with all edges free resting on elastic foundations", Applied Mathematical Modelling, 2015, 39 ,128-136.

Voyiadjis GZ, Kattan PI, "Thick rectangular plates on an elastic foundation", Journal of Engineering Mechanices, 1986, 112, 1218-1240.

Wang CM, Lam KY, He XQ, "Solutions for Timoshenko Beams on Elastic Foundations Using Green's Functions", Mechanics of Structures and Machines, 1998, 26 (1), 101-113.

Wang J, Wang X, Huang M, "Fundamental solutions and boundary integral equations for Reissner's plates on two parameter foundation", International Journal of Solids and Structures, 1992, 29 (10), 1233-1239.

Wang W, Shi MX, "Thick plate theory based ongeneral solutions of elasticity", Acta Mechanica, 1997, 123, 27-36.

Winkler E, "Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit", 1867.

Lekhnitskii SG, "Theory of elasticity of an anisotropic body", Mir publishers Moscow, 1981.

Leon Sde, Paris F, "Analysis of thin plates on elastic foundations with boundary element method", Engineering Analysis with Boundary Elements, 1989, 6 (4), 192-196.

Li Q, Soric J, "A locking-free meshless local Petrov Galerkin formulation for thick and thin plates", Journal of Computational Physics, 2005, 208 (1), 66-79.

Liew KM, Han JB, Xiao ZM, Du H, "Differential quadrature method for Mindlin plates on Winkler foundations", International Journal of Mechanical Sciences, 1996, 38 (4), 405-421.

Liu FL, "Rectangular thick plates on Winkler foundation: differential Quadrature element solution", International Journal of Solids and Structures, 2000, 37, 1743-1763.

Matsunaga H, "An application of a two dimensional higher-order theory for the analyses of a thick elastic plate", Computers and Structures, 1992, 45, 633-648.

Matsunaga H, "Buckling instabilities of thick elastic plates subjected to in-plane stress", Journal of computer and Structures, 1997, 62, 205-214.

Matsunaga H, "Free vibration and stability of thick elastic plate subjected to in-plane forces", International Journal of Solids and Structures, 1994, 31, 3113-3124.

Moslemi A, Navayi Neya B, Vaseghi Amiri J, "Benchmark solution for buckling of thick rectangular transversely isotropic plates under biaxial load", International Journal of Mechanical Sciences, 2017, 131-132, 356-367.

Moslemi A, Navayi Neya B, Vaseghi Amiri J, "3-D Elasticity Buckling Solution for Simply Supported Thick Rectangular Plates using Displacement Potential Functions", Applied Mathematical Modelling, 2016.

Nematzadeh M, Eskandari-Ghadi M, Navayi Neya B, "An Analytical Solution for Transversely Isotropic Simply Supported Thick Rectangular Plates using Displacement Potential Function", Journal of Strain Analysis, 2010, 46,120-141.

Nobakhti S, Aghdam MM, "Static analysis of rectangular thick plates resting on two-parameter elastic boundary strips", European Journal of Mechanics and Solids, 2011, 30, 442-448.

Ozgan K, Daloglu A, T, "Effect of transverse shear strains on plates resting on elastic foundation using modified Vlasov model", Thin-Walled Structures, 2008, 46, 1236-1250.

Pan B, Li R, Su Y, Wang B, Zhong T, "Analytical bending solutions of clamped rectangular thin plates resting on elastic foundations by the simplistic superposition method", Applied Mathematics Letters, 2013, 26, 355-361.

Pasternak PL, "On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants", Gps. Izd. Lit. Po Strait. I Arkh. (In Russian), 1954.

Qian LF, Batra RC, Chen LM, "Elastostatic deformations of a thick plate by using a higher-order shear and normal deformable plate theory and two meshless

University of Tabriz

*Journal of Civil and Environmental Engineering*
Volume 49 (2019), Issue 3 (Autumn), 53-64

**EXTENDED ABSTRACT**

# Bending Analysis of Transversely Isotropic Thick Rectangular Plates on Two-Parameter Elastic Foundation

Ghazaleh Samadi, Bahram Navayi Neya *, Parvaneh Nateghi Babagi

*Faculty of Civil Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol 47148-71167, Iran*

**Received:** 29 August 2017; **Accepted:** 20 April 2018

**Keywords:**
Thick rectangular plate, Transversely isotropic, Two-parameter elastic foundation, Potential functions.

## 1. Introduction

The analysis of plates on elastic foundation has a wide range of applications in various fields of engineering, such as civil, mechanical, aerospace, nuclear and marine engineering. Due to soil behavior is dependent on numerous factors, providing full and comprehensive model for foundation is very complicated. Therefore, in order to express properties of the substrate are used the simpler models based on the elastic properties. The simplest of those models, which was presented by winkler in 1867, assumes that the soil medium containing a system of independent spring (Liew et al, 1996). To increase the accuracy of modeling two-parameter models arose that the effect of shear stresses in the substrate is also included. In these models a new parameter is proposed to establish a mechanical connection between the independent springs. An approximate solution for the bending of moderately thick rectangular plates using numerical differential quadrature method was proposed by Han and Liew (1997). Teo and Liew (2002), presented a solution for analysis of shear deformable rectangular plates on Pasternak foundations by using differential cubature method.
Displacement potential functions (DPF) method is one of the effective and efficient techniques that can be used to solve elasticity problems. The most advantage of DPF method is that the system of differential equations is uncoupled or at least simplified. This method has been used for 3D analysis of plates by a number of researchers such as Nematzadeh et al (2010) and Moslemi et al (2016) for the bending and buckling solution, respectively.

In this paper, 3D elasticity equations of plates on Pasternak foundations are considered. The exact solution of a simply supported rectangular plates with constant but arbitrary thickness on two-parameter foundation by using displacement potential functions, is presented. Advantage of present work is that thickness of plates are arbitrary and results can be used for thin, moderately thick and thick plates without simplifying assumption in regard to strain or stress distribution in plate thickness.

## 2. Theoretical formulations

A simply supported transversely isotropic rectangular plate with linear behavior and dimensions a, b and arbitrary constant thickness t, in Cartesian coordinate system (x, y, z) on two-parameter elastic foundation under arbitrary loading, is considered (Fig. 1).

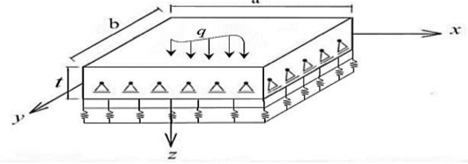



**Fig. 1.** Axis position, displacement directions and dimensions of the rectangular plate on Pasternak foundation

* Corresponding Author
*E-mail addresses:* samadi@stu.nit.ac.ir (Ghazaleh Samadi), navayi@nit.ac.ir (Bahram Navayi Neya), p.nateghi2@stu.nit.ac.ir (Parvaneh Nateghi_Babagi).

The exact solution of transversely isotropic thick rectangular plate supported on Pasternak foundation determined by using 3D elasticity equations in terms of displacements and displacement potential functions F, $\chi(x, y, z)$, offered by Lekhnitskii-Hu-Nowakii, in the form of Equation 1.

$$\begin{cases} u = -\alpha_3 \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} - \dfrac{\partial \chi}{\partial y} \\ v = -\alpha_3 \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \dfrac{\partial \chi}{\partial x} \\ w = (1+\alpha_1)\left(\nabla_{xy}^2 + \beta \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right) F \end{cases} \tag{1}$$

where $u$, $v$, $w$ = the displacement components in the $x, y, z$ directions, respectively and

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \frac{C_{12}+C_{66}}{C_{66}};\ \alpha_2 = \frac{C_{44}}{C_{66}} \\ &\alpha_3 = \frac{C_{13}+C_{44}}{C_{66}};\ \beta = \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \\ &\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

where $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{33}, C_{44}, C_{66}$ are constants of elasticity.

Substituting Equation 3 and 4 into 3D elasticity equations in terms of displacements, and simplifying the governing equations of motion are obtained as follows:

$$\nabla_1^2 \nabla_2^2 F_{(x,y,z)} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla_0^2 \chi_{(x,y,z)} = 0 \tag{4}$$

in which

$$\nabla_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{{s_i}^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{5}$$

where

$$\begin{aligned} &{s_1}^2 + {s_2}^2 = \frac{-2C_{13}C_{44} - {C_{13}}^2 + C_{11}C_{33}}{C_{33}C_{44}} \\ &{s_1}^2 {s_2}^2 = \frac{C_{11}}{C_{33}} \end{aligned} \tag{6}$$

The governing Equations 2 and 3 are solved by use of the separation of variable method. Then potential functions by Satisfying the kinematic, Static & Traction boundary conditions, are determined.

## 3. Results and discussion

In this study, the material properties of a simply supported square plate under uniform load on two-parameter elastic foundation are given as follows:

**Table 1.** Material constants of transversely isotropic materials

| Material | $C_{11}$ | $C_{12}$ | $C_{13}$ | $C_{33}$ | $C_{44}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| magnesium | 59.7 | 26.2 | 21.7 | 61.7 | 16.4 |
| Graphite-epoxy | 8.27 | 2.767 | 0.285 | 86.8 | 4.147 |
| E glass-epoxy | 14.93 | 6.567 | 5.244 | 47.27 | 4.745 |
| Carbon fiber | 20 | 9.98 | 6.45 | 235 | 24 |
| Steel | 282.7 | 112.2 | 112.2 | 282.7 | 80.77 |

The maximum non-dimensional displacement of y = b/2 and z = 0 for different thickness ratio (t/a) are determined in Fig. 1. The presented results are normalized as follows:

$$\begin{cases} w_c = \dfrac{wD * 10^2}{qa^4} \\ k_s = \dfrac{(K_s a^4)}{D} \\ g_s = \dfrac{(G_s a^2)}{D} \end{cases} \tag{7}$$

where $D = Et^3/12(1\text{-}\nu^2)$, E and ν are modulus of elasticity (Young's modulus) and Poisson's ratio.

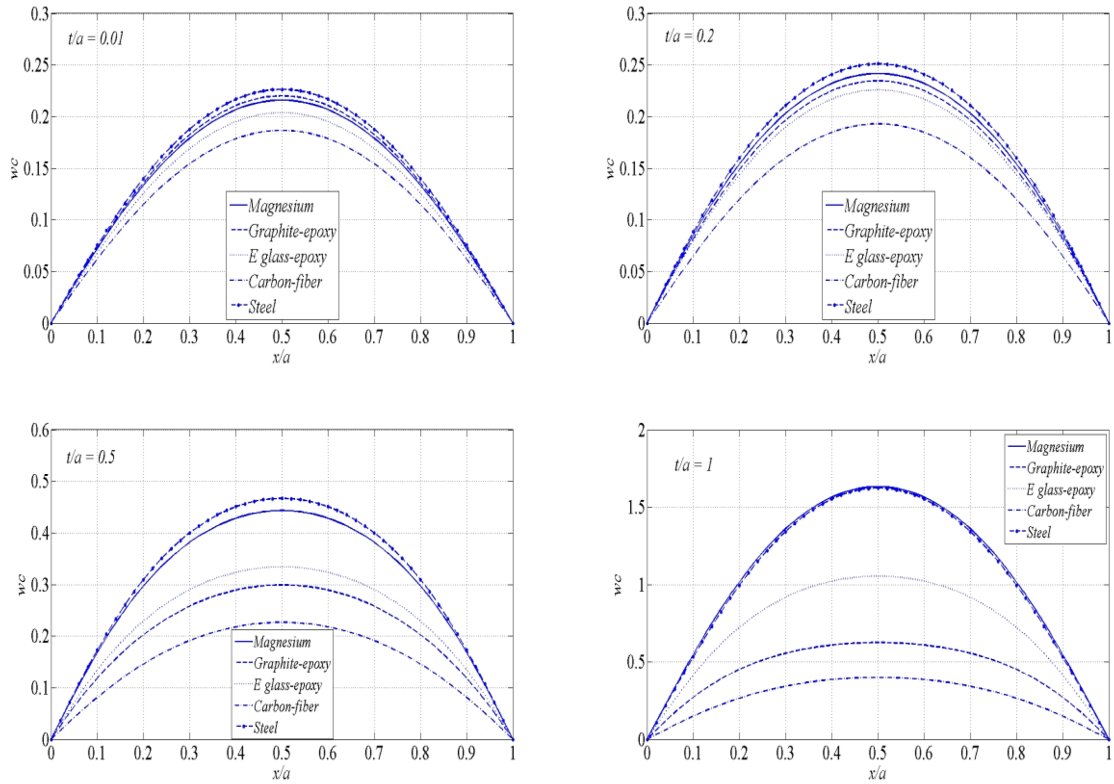



**Fig. 2.** Maximum displacement of mid plan for line y = b/2

Fig. 2 is indicated that as the thickness ratio increases, maximum response of plate consist of magnesium and carbon fiber have maximum and minimum variation, respectively.

## 4. Conclusions

In this article, the displacement potential functions applied successfully to solve the transversely isotropic thick rectangular plates on two-parameter foundation. The governing equations of motion has been solved by use of the separation of variable method. The privilege of present work is that the exact results can be obtained for thin, moderately thick and thick rectangular plates, without simplifying the assumptions.

## 5. References

Han JB, Liew KM, "Numerical differential quadrature method for Reissner/Mindlin plates on two parameter foundations", International Journal of Mechanical Sciences, 1997, 39 (9), 977-989.

Liew KM, Han JB, Xiao ZM, Du H, "Differential quadrature method for Mindlin plates on Winkler foundations", International Journal of Mechanical Sciences, 1996, 38 (4), 405-421.Moslemi A, Navayi neya B, Vaseghi Amiri J, "3-D Elasticity Buckling Solution for Simply Supported Thick Rectangular Plates using Displacement Potential Functions", Applied Mathematical Modelling, 2016.

Moslemi A Navayi Neya B, Vaseghi Amiri J, "3-D elasticity buckling solution for simply supported thick rectangular plates using displacement potential functions", Applied Mathematical Modelling, 2016, 40, 5717-5730.

Nematzadeh M, Navayi Nneya B, "An Analytical Solution for Transversely Isotropic Simply Supported Thick Rectangular Plates using Displacement Potential Function", Journal of Strain Analysis, 2010, 46,120-141.

Teo TM, Liew KM, "Differential cubature method for analysis of shear deformable rectangular plates on Pasternak foundation", International Journal of Mechanical Sciences, 2002, 44, 1179-1194.