

## روش بهبود یافته هیدرودینامیک ذرات روان برای شبیه‌سازی جریان سرریز لبه تیز

علی مهدوی\*

استادیار گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک

(دریافت: ۹۶/۶/۳۱، پذیرش: ۹۷/۲/۲، نشر آنلاین: ۹۷/۲/۳)

### چکیده

تحقیق پیش رو به بررسی عددی جریان روگذر از یک سرریز لبه تیز بر اساس روش هیدرودینامیک ذرات روان در حالت دو بعدی می‌پردازد. میدان جریان حاصل شدیداً پویا بوده و سطح آزاد آن به دلیل جریان روگذر تغییر شکل و انحنای زیادی دارد. دامنه حل در امتداد افق بین مرزهای ورودی (بالادست) و خروجی جریان (پایین دست) گسترش یافته حال آن که جریان در امتداد قائم بین کف آبراهه و سطح آزاد متحرک محدود است. رویکردی متفاوت برای شروع محاسبات و اختصاص شرایط اولیه پیشنهاد شده است که همگرایی نسبتاً سریع جریان به حالت ماندگار را به دنبال دارد. همچنین جمله تصحیح هیدرواستاتیک با هدف بهبود خاصیت حفظ حجم سیال به معادله بقای جرم در شکل گسسته افزوده شده است. صحت این ادعا با شبیه‌سازی طولانی مدت مخزن هیدرواستاتیک در حضور و نیز عدم حضور جمله مذکور تصدیق می‌شود. افزون بر آن، نتایج از افزایش دقت محاسبات در پیش‌بینی تراز افتان آب در مخزن بالادست سرریز برای حالت بدون جریان ورودی حکایت می‌کند. بدین منظور یک رابطه تقریبی در قالب حل تحلیلی معادله بقای جرم ارائه شده است. ضمن مقایسه نتایج تحقیق حاضر با داده‌های آزمایشگاهی موجود برای نیم‌رخ تیغه جریان عبوری از سرریز و نیز توزیع سرعت و فشار، تطابق رضایت‌بخش حاصل شده است.

**کلیدواژه‌ها:** شرایط مرزی جریان ورودی و خروجی، توزیع غیرهیدرواستاتیک فشار، معادلات ناویر-استوکس، روش لاگرانژی.

### ۱- مقدمه

شبیه‌سازی عددی جریان عبوری از روی سرریز لبه تیز با پیچیدگی‌های بسیار توأم است که از آن جمله می‌توان به حالت غیر هیدرواستاتیک جریان و وجود دو مرز متحرک (تیغه‌های زیرین و زبرین) اشاره نمود. همچنین مدل عددی بایستی قادر به حل هم‌زمان جریان‌های زیر بحرانی و فوق بحرانی در حالت ناماندگار باشد. شبیه‌سازی هندسه سطح آزاد جریان در چارچوب اولی‌ری عموماً با مشکلاتی همراه است زیرا رفتار این مرز متحرک، به عنوان تابعی از زمان و مکان، در شروع و نیز در خلال محاسبات به راحتی قابل پیش‌بینی نیست. برخی از تلاش‌های موفقیت‌آمیز در برخورد با جریان روگذر از سرریز عبارتند از روش حجم سیال (VOF)<sup>۱</sup> (Lv و همکاران، ۲۰۱۱)، روش شبکه‌بندی متحرک<sup>۲</sup> (Haun و همکاران، ۲۰۱۱) و روش سعی و خطا بر اساس ثابت برنولی (Mello، ۲۰۱۴).

لازم به ذکر است شرایط مذکور، فرضیات بنیادین حاکم بر معادلات آب کم عمق (سن ونان) را کاملاً مخدوش می‌کند به طوری که نمی‌توان از مدل‌های متوسط‌گیری شده در عمق با

سرریزهای لبه تیز همواره به عنوان ابزاری قابل اطمینان جهت اندازه‌گیری جریان در هر دو مقیاس آزمایشگاهی و صنعتی در علوم مهندسی مورد توجه قرار گرفته‌اند. این سازه هیدرولیکی یک رابطه صریح جبری میان شار حجمی جریان و عمق سیال بالادست را با دقتی مطلوب فراهم می‌کند. از دیدگاه نظری، علی‌رغم ساختار ساده سرریز لبه تیز، میدان جریان حاصل از آن بسیار پیچیده است: یک صفحه نفوذناپذیر نازک که به صورت قائم در مقابل جریان نصب شده است، با ایجاد مانع در برابر جریان سبب افزایش تدریجی تراز سیال در وجه بالادست خود می‌شود. در نهایت این صفحه با یک جت سقوط آزاد روبرو خواهد شد که به نوبه خود باعث ایجاد شکاف در جریان در مدت کوتاهی پس از برخورد با کانال پایین دست می‌شود. انحنای قابل توجه جریان در نزدیکی تاج سرریز سبب می‌شود تا شتاب قائم نقشی کلیدی در آن نواحی ایفا کند. همچنین از دیدگاه کاربردی، هندسه تیغه عبوری جریان روگذر به عنوان زیربنای طراحی سرریز اوجی به شمار می‌رود.

سرریز لبه تیز است. در آغاز محاسبات بخش بالایی (دریچه) به طور ناگهانی برداشته می‌شود تا ذرات SPH آزادانه از روی بخش زیرین (سرریز) عبور کنند. از آنجا که مخزن حجمی محدود دارد، جریان حاصل هرگز به حالت کاملاً ماندگار نخواهد رسید؛ در عوض، شرایط شبه‌ماندگار به صورت لحظه‌ای رخ می‌دهد. این مشکل با قرار دادن یک ناحیه ورود جریان به جای دیواره بالادست مخزن قابل رفع است. مطابق روشی جایگزین، آبراهه در دو سمت سرریز در ابتدای محاسبات عاری از سیال و به صورت خشک تعریف می‌شود. سپس ناحیه بالادست تا تثبیت تراز مدنظر با آب ورودی تدریجاً پر می‌شود. این امر با تزریق ذرات سیال در فاصله‌ای دور از سرریز و هم‌زمان افزایش تدریجی تراز آب در ناحیه ورودی میسر است. نهایتاً، شرایط ماندگار پس از روگذری ذرات سیال از سرریز به دست می‌آید (Meister و همکاران، ۲۰۱۴).

تحقیق حاضر به شبیه‌سازی جریان روگذر از سرریز لبه تیز با ارائه روشی متفاوت برای شروع محاسبات می‌پردازد. در این چارچوب، یک الگوی موجود SPH پس از تصحیح پیشنهادی، بهبود یافته و مورد استفاده قرار می‌گیرد. این موضوع با افزایش دقت محاسبات در حفظ طولانی مدت انرژی پتانسیل یک مخزن هیدرواستاتیک همراه است. الگوی جریان حاصل و نیز نیمرخ‌های سطح آزاد به طور دقیق بررسی خواهند شد. در این راستا، تیغه‌های زیرین و زیرین جریان روگذر، نیمرخ سرعت افقی و توزیع فشار محاسباتی با نتایج موجود آزمایشگاهی مقایسه می‌گردند.

## ۲- معادلات حاکم

مطالعه حاضر بر حل معادلات ناویر-استوکس در حالت غیر لزج (معادلات اوایلر) به همراه معادله حرکت ذره با رویکرد لاگرانژی متمرکز شده است:

$$\frac{Dp}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{F} \quad (2)$$

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \mathbf{u} \quad (3)$$

معادلات (۱) و (۲) قوانین بنیادین بقای جرم و اندازه حرکت را بیان می‌کنند که در آن  $t$  زمان،  $\rho$  چگالی سیال،  $\mathbf{u}$  سرعت جریان،  $p$  فشار و  $\mathbf{F}$  نیروی خارجی بر واحد جرم است که معمولاً شامل نیروی ثقل (ناشی از شتاب جاذبه  $g$ ) و نیروهای مرزی دافعه (که بعداً تشریح می‌شود) خواهد بود. با توجه ماهیت لاگرانژی SPH، پیش‌بینی حرکت هر ذره از سیال به صورت انفرادی ممکن است. این قابلیت به عنوان مزیت کلیدی این روش شمرده می‌شود،

توزیع هیدرواستاتیک فشار نظیر Talebbeydokhti و Mahdavi (۲۰۱۱)، برای شبیه‌سازی جریان عبوری از سرریز استفاده نمود. روش عددی هیدرواستاتیک ذرات روان<sup>۳</sup> (SPH)، به عنوان الگویی بدون شبکه<sup>۴</sup> در چارچوب لاگرانژی، در اصل برای شبیه‌سازی‌های نجومی ابداع گردیده است. تاکنون پیشرفت‌های بسیاری در کاربرد این روش در زمینه‌هایی همچون جریان‌های پیچیده سطح آزاد (Monaghan, ۱۹۹۴) و بررسی ساختار امواج (Dalrymple و Gómez-Gesteira, ۲۰۰۴) حاصل شده است. برای دستیابی به شناختی کامل از روش هیدرواستاتیک ذرات روان می‌توان به مطالعات انجام شده توسط Liu و Liu (۲۰۱۰) مراجعه نمود. مدل‌سازی سطح آزاد به عنوان یکی از نقاط قوت روش هیدرواستاتیک ذرات روان شمرده می‌شود. در این روش، سطح آزاد به صورت خودکار ترسیم می‌گردد و این ویژگی حتی برای هندسه‌های پیچیده نیز برقرار است. محیط سیال در قالب مجموعه‌ای متناهی از ذرات که تعیین‌کننده موقعیت سیستم در هر زمان می‌باشد، تجزیه می‌گردد. جابه‌جایی این ذرات تنها در چارچوب معادلات حاکم بر حرکت سیال ممکن خواهد بود. فرآیند تر-خشک شدن نیز به صورت صریح قابل شبیه‌سازی می‌باشد که این امر بدون هیچ‌گونه کار اضافی اعم از نگاهت محاسباتی (Mahdavi, ۲۰۱۲) یا روش‌های تولید مجدد شبکه‌بندی میسر خواهد بود. به صورت کلی، چنین ویژگی‌هایی به ماهیت لاگرانژی این روش اشاره دارد.

اگرچه توانایی روش SPH به منظور تعیین مرزهای سطح آزاد اثبات شده است، با این حال، توجه دقیق به مدل‌سازی مناسب مرزهای جامدی که در برگیرنده جریان سیال می‌باشد مهم به نظر می‌رسد. پیاده‌سازی نامناسب مرزهای جامد ممکن است باعث ایجاد مشکلات جدی در کل دامنه محاسبات گردد که در نتیجه پیش‌بینی‌های اشتباهی را در محاسبات به دنبال خواهد داشت. همچنین ممکن است با گذشت زمان، موجب ناپایداری عددی در مدل‌سازی شود. علاوه بر این، بایستی از نفوذ غیر واقعی ذرات سیال به مرزهای جامد ممانعت به عمل آید.

تاکنون روش‌های گوناگونی برای شبیه‌سازی جریان روگذر از سرریز لبه تیز در چارچوب هیدرواستاتیک ذرات روان پیشنهاد شده است. یک روش مرسوم عبارت است از مخزنی از آب ساکن که بین دیواره‌های نفوذناپذیر قائم در دو انتهای بالادست و پایین دست محدود شده است (Ferrari و همکاران ۲۰۱۰؛ Ghadampour و Talebbeydokhti ۲۰۱۵؛ Mahdavi, ۲۰۱۵). بخش زیرین دیواره پایین دست بر روی کف آبراهه به صورت ثابت مستقر است حال آن که بخش بالایی مانند یک دریچه تعریف می‌گردد. عملکرد هیدرولیکی بخش زیرین درست شبیه یک

خصوصیات مطلوب تابع گاوسی مرسوم است و در عین حال دارای دامنه حمایت معین می‌باشد و به صورت زیر بیان می‌گردد (Landrini و Colagrossi, ۲۰۰۳):

$$W_{ij} = \begin{cases} \phi [e^{-s_{ij}^2} - e^{-\kappa^2}] & \text{for } 0 \leq s_{ij} \leq \kappa, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (5)$$

در این جا  $s_{ij} = |x_{ij}|/d$  و  $x_{ij} = -x_{ji} = x_i - x_j$  بردار رابط دو ذره متعامل  $i$  و  $j$  است. همچنین:

$$\phi = \left[ 2\pi d^2 \int_0^\kappa \psi (e^{-\psi^2} - e^{-\kappa^2}) d\psi \right]^{-1} \quad (6)$$

در این مطالعه، طول مشخصه هموار  $d$  برابر فاصله بین ذره‌ای اولیه در نظر گرفته می‌شود و  $\kappa = 3$  فرض شده است. لازم به ذکر است که ویژگی کم‌تراکم‌پذیر بودن SPH با نوسانات غیر واقعی میدان‌های چگالی و فشار همراه می‌باشد که ممکن است در بعضی حالات به ناپایداری کششی و حتی واگرایی در فرآیند حل بیانجامد. در این مطالعه، پایدار نمودن میدان چگالی بر اساس روش ارائه شده توسط Ferrari (۲۰۰۹) پایه‌گذاری شده است که نیازی به هیچ پارامتر اضافی نداشته و به راحتی قابل استفاده است. معادله پیوستگی مطابق این روش به صورت زیر قابل بیان است:

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \rho_i \sum_j V_j (u_i - u_j) \cdot \nabla_i W_{ij} - \sum_j c_{ij} V_j (\rho_i - \rho_j + \Pi_{ij}) n_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (7)$$

در اینجا  $n_{ij} = x_{ji}/|x_{ji}|$  فاصله نرمال شده بین جفت ذره متعامل را تعریف می‌کند. شبیه‌سازی SPH بر روی مجموعه‌ای از ذرات مجاور (که با پانویس نشان داده شده‌اند) پیاده‌سازی می‌شود که موقعیت آنها درون دامنه حمایتی مربوط به ذره  $i$  قرار می‌گیرند. بنابراین، همه جفت‌ذراتی که توسط دامنه حمایتی احاطه شده‌اند، در هر گام زمانی تعیین می‌شوند. گرادیان تابع هسته برای ذره  $i$  محاسبه می‌گردد و با  $\nabla_i W_{ij}$  نشان داده می‌شود. معادله (۷) از ایجاد نوسانات جعلی میدان چگالی جلوگیری می‌کند که به پایداری بیشتر میدان فشار منجر می‌شود. در اینجا  $c_{ij} = \max(c_i, c_j)$  تعیین کننده بیش‌ترین مقدار تندی موج مابین هر جفت از ذرات متعامل می‌باشد. با توجه به فرض سیال کم تراکم‌پذیر، تندی موج به صورت صریح به میدان‌های فشار و چگالی مرتبط می‌گردد:

$$c_i = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_i} = c_0 \left(\frac{\rho_i}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad (8)$$

خصوصاً در حضور مرزهای متحرک نظیر سطح آزاد سیال. به عبارتی دیگر، به حل معادلات اضافی برای ترسیم سطح آزاد سیال نیازی نیست. همچنین معادله لاگرانژی اندازه حرکت فاقد مؤلفه انتقالی می‌باشد و با توجه به معادله (۳) موقعیت ذرات به سادگی به‌نگام سازی می‌شود که در آن  $x = xi + zk$  نشان دهنده بردار موقعیت ذره سیال در هر زمان است. حرکت کلی جریان با انتگرال‌گیری از معادله (۳) برای تک تک ذرات سیال حاصل می‌شود. معمولاً در SPH، سیال به صورت کم تراکم‌پذیر<sup>۵</sup> در نظر گرفته می‌شود. این رویکرد اجازه می‌دهد که مقادیر فشار به صورت منحصر به فرد از طریق میدان چگالی تعیین گردد و این امر به واسطه معادله حالت امکان‌پذیر است. برای جریان‌های سطح آزاد معمولاً معادله حالت زیر به کار می‌رود (Monaghan, ۱۹۹۴):

$$p = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left( \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma - 1 \right) \quad (4)$$

در این مطالعه  $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$  به عنوان چگالی مرجع آب در نظر گرفته شده است. توان  $\gamma$  معمولاً برای جریان‌های سطح آزاد برابر ۷ در نظر گرفته می‌شود (Landrini و Colagrossi, ۲۰۰۳). سرعت صوت در چگالی مرجع،  $c_0$ ، به صورتی انتخاب می‌گردد که در کل زمان شبیه‌سازی، تغییرات چگالی در حد  $0.01\rho_0$  باقی بماند (Monaghan, ۱۹۹۴). این امر با توجه به فرض کم تراکم‌پذیر بودن سیال برقرار است.

### ۳- روش عددی

#### ۳-۱- گسسته‌سازی SPH

ایده اصلی روش SPH، تجزیه محیط سیال به مجموعه‌ای متناهی از ذرات گسسته لاگرانژی می‌باشد که هر یک مقادیر فیزیکی خاصی را انتقال می‌دهند و از معادلات حاکم بر جریان سیال تبعیت می‌کنند. این ذرات معمولاً در ابتدا بر روی یک سیستم مختصات کارتزین توزیع می‌شوند و یک طرح منظم با فواصل یکسان را تشکیل می‌دهند. هرچند که با افزایش تعداد ذرات، ویژگی‌های جریان به نحوی مطلوب‌تر تعیین می‌شوند، ولی محاسبات با صرف زمان بیشتری همراه خواهد بود. به هر ذره یک جرم معین  $m$ ، نسبت داده می‌شود. به واسطه جرم، ذره حجمی از فضا را به صورت تابعی از زمان اشغال می‌کند،  $V = m/\rho$ ، که ناشی از تغییرات ذاتی چگالی در یک سیال کم تراکم‌پذیر است. از بین انتخاب‌های گوناگون برای تابع هسته که محققین مختلف پیشنهاد داده‌اند، یک تابع هسته گاوسی اصلاح شده به دلیل برخورداری از پایداری بهبود یافته و کارایی مطلوب در پیاده‌سازی رایانه‌ای برگزیده شده است. این تابع قادر به حفظ

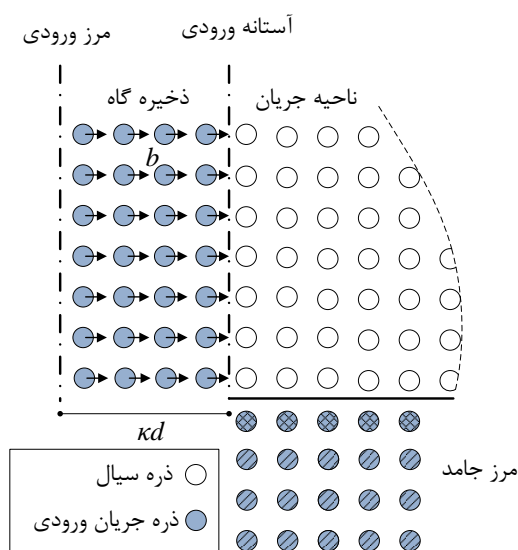
حاکمی از گونه‌ای حرکت دوره‌ای است به نحوی که ذخیره‌گاه همواره حاوی تعداد مشخصی ذره برای جریان ماندگار ورودی است.

ذرات متحرک درون ذخیره‌گاه بایستی حامل مقادیر مناسبی از متغیرهای میدان جریان باشند چراکه آنها در تقریبات SPH مربوط به ذرات داخلی سهیم‌اند. اطلاعات مورد نیاز ممکن است مستقیماً اختصاص یافته و یا از برون یابی متغیرهای درون ناحیه حل حاصل گردند، به استثنای مؤلفه‌های سرعت ذرات که همواره به وسیله کاربر تعریف می‌شود.

هرچند نیم‌رخ دلخواه برای سرعت ذرات ورودی قابل تصور است، ولی بنابر مطالعات پیشین در اینجا توزیعی یکنواخت برای سرعت در عمق لحاظ شده است (Kirkgoz و همکاران، ۲۰۰۸). مؤلفه افقی موقعیت ذرات ورودی پس از انتگرال‌گیری زمانی میدان سرعت افقی حاصل می‌گردد، حال آن که مؤلفه قائم موقعیت این ذرات در خلال حل ثابت نگه داشته می‌شود.

فشار در مرز ورودی می‌تواند به صورت هیدرواستاتیک یا با هر توزیع دلخواه اختصاص یابد. انتخاب نوع مناسب به بررسی دقیق ماهیت جریان مورد مطالعه بستگی دارد، در غیر این صورت ممکن است نوسان‌های غیرفیزیکی فشار به دامنه حل وارد شوند. در اینجا رویکردی نسبتاً متفاوت برای کاستن از تبعات این عدم سازگاری اتخاذ می‌گردد. مطابق شکل (۱)، فشار برای یک ذره نوعی در ذخیره‌گاه، که با پانویس  $b$  نمایان شده است، از مقادیر فشار ذرات سیال مجاور آن، با فرض تغییرات هیدرواستاتیک فشار در ورودی، برون‌یابی می‌شود. در نتیجه:

$$p_b = \frac{\sum_a (p_a + \rho_a g(z_a - z_b)) W_{ba} V_a}{\sum_a W_{ba} V_a} \quad (11)$$



شکل ۱- ذرات تشکیل دهنده مرز جریان ورودی

معادله (۷) با آنچه توسط Ferrari (۲۰۰۹) پیشنهاد شده تفاوت دارد و در آن عبارت تصحیح هیدرواستاتیک برای چگالی دو ذره متعامل به کار رفته است. افزودن این عبارت به حفظ بهتر تعادل هیدرواستاتیک می‌انجامد خصوصاً در مواردی که شبیه-سازی بلند مدت جریان مدنظر است. در غیر این صورت، به روز انحرافی چشم‌گیر از حالت تعادل، حتی با وجود استفاده از ذرات نسبتاً زیاد در شبیه‌سازی، اجتناب‌ناپذیر خواهد بود. در این مطالعه، عبارت تصحیح هیدرواستاتیک به صورت زیر لحاظ شده است (Mahdavi, ۲۰۱۸):

$$\Pi_{ij} = \frac{g}{2} \left( \frac{\rho_i}{c_i^2} + \frac{\rho_j}{c_j^2} \right) (z_i - z_j) \quad (9)$$

الگوهای متعددی برای گسسته‌سازی عبارت گرادیان فشار در معادله اندازه حرکت قابل انتخاب است. روش پیشنهاد شده توسط Adams و Hu (۲۰۰۶) در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفته است. مطابق این روش معادله اندازه حرکت به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{m_i} \sum_j (V_i^2 + V_j^2) \left( \frac{\rho_j p_i + \rho_i p_j}{\rho_i + \rho_j} \right) \nabla_i W_{ij} + F_i \quad (10)$$

خاصیت پادتقارن مربوط به گرادیان فشار در معادله (۱۰) سبب می‌شود که نیروی فشاری بین ذرات  $i$  و  $j$  با یکدیگر برابر و مختلف‌الجهت باشد، که گویای برقراری قانون سوم نیوتون و بقای اندازه حرکت در این روش می‌باشد.

### ۲-۳- مرزهای جریان ورودی و جریان خروجی

تاکنون کاربردهایی گسترده از روش هیدرودینامیک ذرات روان برای شبیه‌سازی جریان‌های محدود به مرزهای جامد، که سیالی از خلال آن عبور نمی‌کند، گزارش شده است. در مطالعه حاضر، برای اعمال شرط مرزی جریان ورودی از روش پیشنهادی Federico و همکاران (۲۰۱۲)، با ایجاد تغییراتی تبعیت شده است. مطابق شکل (۱)، ناحیه ورود جریان متشکل از یک ذخیره‌گاه است که گستره‌ای حداقل به اندازه شعاع حمایتی ذرات مجاور سیال  $\kappa d$  را پوشش می‌دهد. محدوده ذخیره ضمن جبران کمبود چگالی در نزدیکی خط مرزی، یک آستانه ورودی را نیز ترسیم می‌کند. یک ذره جریان ورودی به محض گذر از آستانه ورود به عنوان ذره سیال داخلی شناخته می‌شود و در همین حین ذره‌ای جدید به ورودی محدوده ذخیره تزریق می‌شود. بر این اساس، ذره اخیراً تزریق شده به سمت ناحیه حل حرکت کرده و همین که در محدوده حمایتی یک ذره سیال داخلی قرار گرفت، فعال گردیده و در محاسبات مربوط به آن ذره داخلی سهیم می‌شود. این رویکرد

سطح آزاد پیش از این به اثبات رسیده است (Mahdavi, ۲۰۱۸). همچنین تمامی محاسبات در محیط Fortran 90 و بر روی سخت‌افزاری با پردازنده مرکزی Intel Core i7 (3.4 GHz) به همراه 8 GB حافظه RAM صورت پذیرفته است.

#### ۴-۱- مخزن هیدرواستاتیک

در ابتدا، خاصیت بهبود یافته الگوی عددی برای حفظ تعادل هیدرواستاتیک در قالب یک آزمون ساده، و در عین حال گویا، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد که مطابق آن مخزنی دو بعدی به طول (بعد افقی  $x$ )  $L = 1$  m حاوی آب ساکن به عمق  $H = 0.5$  m تعریف شده است. در این شبیه‌سازی ذرات سیال به طور یکنواخت و با فواصل یکسان  $\Delta x$  در هر دو راستای  $x$  و  $z$  ناحیه حل به ابعاد  $H \times L$  را می‌پوشانند. به جز مرز بالایی ( $z = H$ ) که در تماس مستقیم با اتمسفر محلی است ( $p = 0$ )، سایر مرزها به دیواره‌های جامد محدودند. شرایط اولیه شامل مؤلفه‌های صفر برای سرعت ذرات سیال به همراه توزیع فشار هیدرواستاتیک در عمق است.

توزیع مکانی ذرات سیال برای حالت  $H/\Delta x = 40$  در شکل (۲) نشان داده شده است، که در آن ذرات برحسب فشار بدون بعد  $p/\rho_0 g H$  رنگ‌آمیزی شده‌اند. نتایج نشان داده شده در شکل (۲-الف) با لحاظ عبارت تصحیح هیدرواستاتیک،  $\Pi_{ij}$ ، در قانون بقای جرم به دست آمده‌اند. در حالی که این عبارت با جایگذاری  $\Pi_{ij} = 0$  در نتایج شکل (۲-ب) حذف شده است. نتایج مربوط به زمان بی‌بعد  $t^* = t(\frac{g}{H})^{1/2} = 100$  می‌باشند که پس از حدود 68000 گام زمانی به دست آمده است.

به روشنی، با اعمال تصحیح هیدرواستاتیک پیشنهادی حجم اولیه سیال حتی در خلال این شبیه‌سازی بلند مدت به خوبی حفظ شده است (شکل (۲-الف)). از دیگر سو، در غیاب چنین تصحیحی، بخش عمده‌ای از سیال به نوعی تورم غیر واقعی تمایل داشته و ذرات تشکیل دهنده سطح مشترک سیال- هوا از ردیف ذرات بلافاصله واقع در زیر آنها به تدریج جدا شده‌اند (شکل (۲-ب)). این در نهایت سبب ایجاد انحرافی قابل توجه از سطح آزاد تحلیلی (نشان داده شده با خط چین) می‌شود که از تغییرات مجاز حجم مربوط به کم تراکم‌پذیری مفروض فراتر است.

از آنجا که مخزن حاوی سیال ساکن است، انتظار می‌رود انرژی پتانسیل مجموعه در خلال محاسبات ثابت بماند. انرژی پتانسیل سیال (به ازای واحد عرض مخزن)،  $E_{pot}$ ، با جمع سهم تک تک ذرات سیال و به صورت  $E_{pot} = g \sum_i m_i z_i$  قابل بیان است که در آن تراز کف مخزن به عنوان مبنای سنجش پتانسیل تعریف شده است.

در اینجا عملگر جمع بر روی آن دسته از ذرات سیال اعمال می‌شود که با ذره  $b$  در تعاملند. چگالی ذره،  $\rho_b$ ، نیز از معادله حالت به دست می‌آید. جرم ذره،  $m_b$ ، ثابت و برابر جرم ذرات مجاور سیال است، هرچند حجم آن در هر گام زمانی متغیر بوده و به صورت  $m_b/\rho_b$  محاسبه می‌شود.

شرایط مرز باز در خروجی جریان مطابق روش Aristodemo و همکاران (۲۰۱۵) پیاده‌سازی شده است. ذرات عبوری از یک آستانه خروجی پیش تعریف شده، وارد ذخیره‌گاهی به عرض  $kd$  در انتهای پایین دست دامنه محاسباتی می‌شوند. این فرآیند با ثابت نگه داشتن تمامی متغیرهای میدان برای ذره، به جز موقعیت متغیر آن، تکمیل می‌شود. از این رهگذر، گرادیان صفر برای سرعت و چگالی در مجاورت مرز خروجی میسر می‌گردد که خود سبب خروج بدون انعکاس یا انباشت غیر واقعی جریان از دامنه حل می‌شود. ذرات جریان خروجی به محض برون رفت از ذخیره‌گاه، از مجموعه جفت‌های متعامل حذف خواهند شد.

#### ۳-۳- سناریوی شبیه‌سازی سرریز لبه تیز

در اینجا رهیافتی متفاوت برای اعمال شرایط اولیه جریان در شروع محاسبات پیشنهاد گردیده است. مطابق این روش، عمق اولیه آب در مخزن بالادست و نیز مؤلفه افقی سرعت ذرات سیال در لحظه  $t = 0$  از رابطه رایج دبی-هد مربوط به سرریز لبه تیز حاصل می‌گردند:

$$q = \frac{2\sqrt{2g}}{3} \left( 0.611 + 0.075 \frac{\bar{h}_0}{\bar{w}} \right) \bar{h}_0^{-3/2} \quad (12)$$

در رابطه فوق،  $q$ ،  $\bar{w}$ ،  $\bar{h}_0$  به ترتیب معرف دبی عبوری از سرریز (در واحد عرض آبراهه)، ارتفاع و هد سرریز می‌باشند. در شروع محاسبات، سرعت عمودی ذرات سیال برابر با صفر اختصاص می‌یابد. همچنین عمق اولیه آب در مخزن هم تراز با عمق جریان در ناحیه ورودی است به نحوی که هر دو به اندازه  $\bar{h}_0$  بالاتر از تراز تاج سرریز قرار می‌گیرند. به دیگر بیان، عمق اولیه در تمامی نقاط بالادست سرریز برابر  $\bar{w} + \bar{h}_0$  است. قسمت بالایی سرریز در  $t = 0$  به طور ناگهانی برداشته می‌شود و دامنه حل به صورت پیوسته با تزریق ذرات از مرز بالادست تغذیه می‌گردد. در مقایسه با حالتی که محاسبات از مخزن ساکن شروع می‌شود، شرایط فوق سبب تسریع روند همگرایی به حالت ماندگار می‌گردد.

#### ۴- نتایج و بحث

در شبیه‌سازی‌های پیش رو از روش مرسوم چهار مرحله‌ای رانج-کوتا برای گسسته‌سازی زمانی معادلات SPH استفاده شده است. پایداری و دقت این روش در حل مسائل پیچیده جریان

جدول ۱- تأثیر فاصله بین ذره‌ای بر انحراف از انرژی پتانسیل اولیه

$H/\Delta x$	۲۰	۳۰	۴۰	۶۰
$[E_{pot}(100) - E_{pot}(0)]/E_{pot}(0)$	-۰/۰۰۱۲۵۸	-۰/۰۰۱۱۳۱	-۰/۰۰۱۱	-۰/۰۰۰۹۰۶۲

۴-۲- شبیه‌سازی سرریز بدون جریان ورودی به مخزن

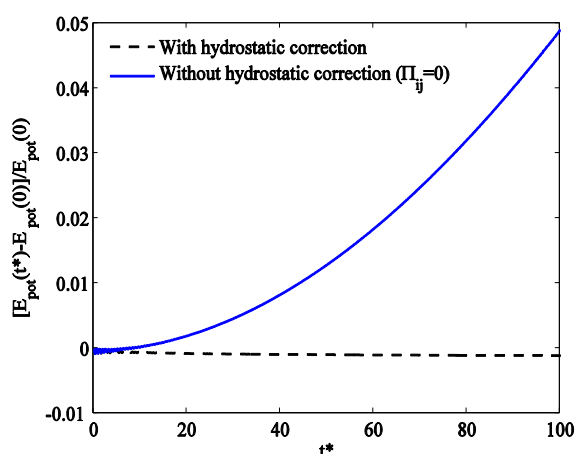
در این بخش جریان عبوری از روی سرریز در یک شبیه‌سازی طولانی مدت و چگونگی افت تراز سطح آزاد مخزن برای حالت بدون جریان ورودی به مخزن بررسی می‌شود. هندسه مخزن شبیه حالت قبل (مخزن هیدرواستاتیک) بوده با این تفاوت که ارتفاع دیواره پایین دست به اندازه  $\delta = 0.1 \text{ m}$  پایین‌تر از تراز اولیه آب مخزن تعریف شده است. حجم اضافی آب از روی این دیواره به صورت پیوسته به پایین دست تخلیه می‌شود به نحوی که می‌توان آن را به مثابه سرریزی لبه تیز به ارتفاع  $\bar{w} = 0.4 \text{ m}$  پنداشت. همان‌طور که در پیوست (الف) نشان داده شده است، تاریخچه زمانی تراز آب مخزن با رابطه زیر تخمین زده می‌شود:

$$t = \Gamma(h) - \Gamma(\delta) \tag{۱۳}$$

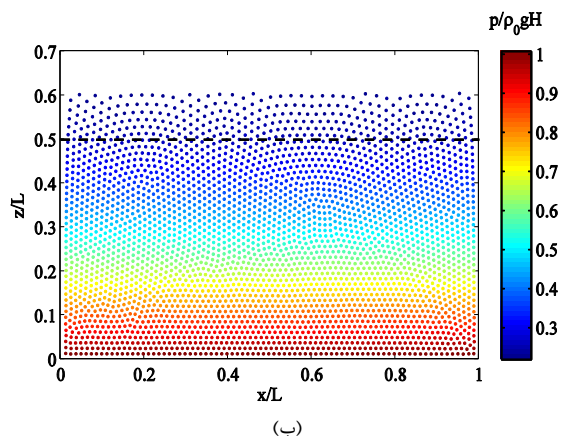
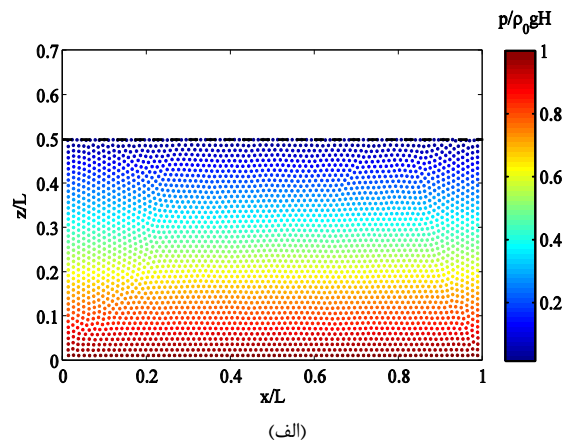
که در آن:

$$\Gamma(\theta) = \frac{3L}{0.611\sqrt{2g}} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\frac{0.075}{0.611\bar{w}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{0.075\theta}{0.611\bar{w}}}} \right\} \tag{۱۴}$$

در اینجا  $t$  زمان لازم برای کاهش هد سرریز از  $\delta$  به  $h$  را می‌سنجد.

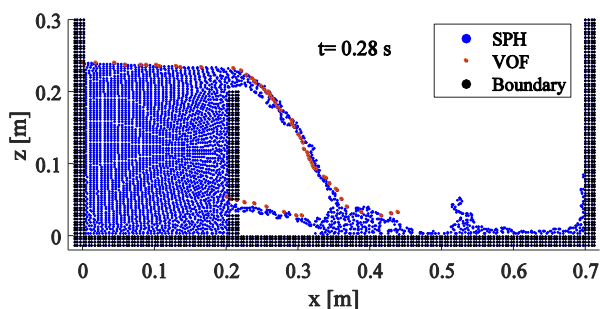


شکل ۳- انحراف از انرژی پتانسیل اولیه به صورت تابعی از زمان



شکل ۲- مخزن هیدرواستاتیک در لحظه  $t^* = 100$  پس از شروع شبیه‌سازی: (الف) با اعمال عبارت تصحیح هیدرواستاتیک، (ب) بدون اعمال این تصحیح

اختلاف میان انرژی پتانسیل محاسباتی در لحظه  $t^*$  و انرژی پتانسیل اولیه به صورت بدون بعد  $[E_{pot}(t^*) - E_{pot}(0)]/E_{pot}(0)$  در شکل (۳) نمایش داده شده است. در نبود تصحیح هیدرواستاتیک، انرژی پتانسیل روندی افزایشی با زمان نشان می‌دهد که ناشی از افزایش غیر واقعی حجم سیال درون مخزن است. در حضور تصحیح هیدرواستاتیک، بقای انرژی پتانسیل برای پیکره آب ساکن به خوبی حفظ شده و خطایی به اندازه 0.11% در پایان شبیه‌سازی،  $t^* = 100$ ، به وجود آمده است. با هدف ارزیابی نقش فاصله بین ذره‌ای،  $\Delta x$ ، سه شبیه‌سازی مجزا با  $H/\Delta x = 20, 30, 60$  (به ترتیب معادل 1800، 800 و 7200 ذره سیال) نیز صورت گرفت. همان‌طور که جدول (۱) نشان می‌دهد، کوچک‌تر شدن  $\Delta x$  به افزایش دقت محاسبه انرژی پتانسیل می‌انجامد.



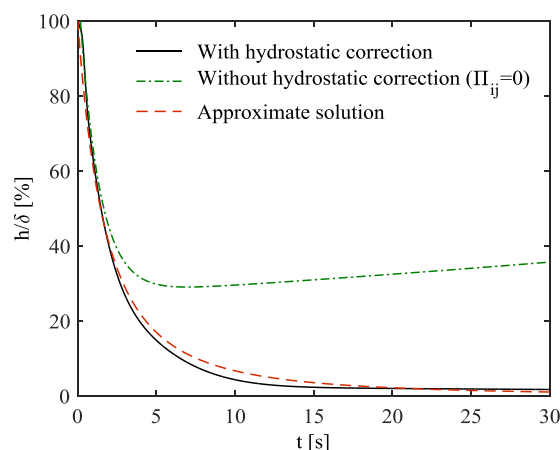
شکل ۵- جریان هم‌زمان سرریز و دریچه

همان‌طور که مشاهده می‌شود این دو روش عددی از تطابقی رضایت‌بخش در پیش‌بینی نیم‌رخ‌های جریان روگذر و زیرگذر برخوردارند. مشخصات محاسباتی جریان مورد مطالعه در جدول (۲) ارائه شده است. با هدف ارزیابی هزینه محاسباتی ناشی از روش پیشنهادی، نتایج عددی یکبار بدون لحاظ عبارت تصحیح هیدرواستاتیک و بار دیگر با اعمال آن به دست آمده است (آنچه در شکل (۵) آورده شد). نتایج حاکی از افزایش ۲/۵ درصدی زمان پردازنده مرکزی<sup>۶</sup> در حضور عبارت تصحیح است. این افزایش نسبتاً ناچیز به ماهیت روش پیشنهادی قابل انتساب است زیرا مطابق عبارت انتهایی سمت راست معادله (۷)، محاسبه تصحیح هیدرواستاتیک به اجرای جداگانه الگوریتم جستجوی لیست پیوندی (به عنوان زمان برترین بخش محاسبات) نیازی نداشته و اثر آن در حلقه محاسباتی روش Ferrari (۲۰۰۹)، به سهولت وارد می‌شود.

هرچند عموماً روش ISPH بهبود نسبی دقت پیش‌بینی میدان فشار را به همراه دارد، تعیین فشار در این روش بر اساس معادله موسوم به پواسون صورت می‌پذیرد که پس از گسسته‌سازی به دستگاهی از معادلات جبری بر حسب فشار منجر می‌شود. تعداد معادلات دستگاه کمابیش برابر تعداد ذرات سیال است و حل آن در هر گام زمانی سبب طولانی‌تر شدن زمان اجرای برنامه می‌شود. به عنوان نمونه، زمان اجرای برنامه برای مثال سرریز-دریچه با استفاده از روش حاضر برابر ۴۹۶ ثانیه به دست آمد (جدول (۲)) درحالی که همین حل در چارچوب ISPH (با تعداد کمابیش یکسان ذرات) مطابق آنچه توسط Ghadampour (۲۰۱۵)، گزارش شده، به ۲۷۰۸ ثانیه زمان نیاز دارد.

#### ۴-۴- شبیه‌سازی سرریز در حضور جریان ورودی به مخزن

تفاوت بنیادین شبیه‌سازی پیش‌رو با حالات پیشین در اعمال جریان ورودی به عنوان شرط مرزی بالادست مخزن است. دامنه محاسباتی در قالب یک فلووم افقی بین مرز ورودی در  $x = 0$  و مرز خروجی در  $x = 2.8$  m گسترده شده است (شکل (۶)).



شکل ۶- تغییرات زمانی هد سرریز هنگام تخلیه مخزن در مقایسه با حل تقریبی

از رابطه (۱۳) به روشنی چنین دریافت می‌شود که اگر  $t \rightarrow \infty$  آن‌گاه  $h = 0$ ؛ موضوعی که در هماهنگی کامل با فیزیک واقعی جریان است. شکل (۴) تغییرات  $h/\delta$  را بر حسب زمان نشان می‌دهد. همچنین این شکل نمایانگر نتایج SPH است که بر اساس عمق آب در خط مرکزی مخزن محاسبه شده‌اند. بار دیگر تصحیح هیدرواستاتیک در راستای افزایش دقت محاسبات عمل نموده و روند کاهشی هد سرریز به خوبی از حل تقریبی تبعیت می‌نماید (نمودار خط پیوسته). در غیر این صورت، خطایی قابل ملاحظه به شکل عمق باقی‌مانده آب بالاتر از تراز سرریز (مقادیر نا صفر  $h$ ) به وجود می‌آید که برخلاف شرایط واقعی جریان حتی در زمان طولانی نیز از بین نرفته‌اند (نمودار نقطه-خط چین).

#### ۴-۳- شبیه‌سازی جریان هم‌زمان سرریز و دریچه

جریان هم‌زمان سرریز و دریچه در برخی از موارد به عنوان عاملی برای بهبود کارایی استهلاک انرژی در سازه‌های هیدرولیکی مورد توجه قرار گرفته است. برخورد نیم‌رخ جریان‌های روگذر و زیرگذر سبب ایجاد پیچیدگی در هیدرولیک جریان و در نتیجه مدل‌سازی آن می‌شود. در اینجا، شرایط اولیه شبیه‌سازی متشکل از مخزنی به طول 0.2 m است که با آب ساکن تا عمق 0.3 m پر شده است. دیواره بالادست مخزن ارتفاعی هم تراز با آب ساکن دارد ولی دیواره پایین دست به ارتفاع 0.2 m مانند مثال قبل به صورت سرریز لبه تیز عمل می‌کند، با این تفاوت که در مثال حاضر دریچه‌ای به مرکزیت  $z = 0.04$  m و باز شدگی 0.02 m بر روی آن تعبیه شده است. نتایج شبیه‌سازی جریان هم‌زمان سرریز و دریچه در لحظه  $t = 0.28$  s در شکل (۵) نشان داده شده است. همچنین نتایج حاصل از روش VOF گزارش شده توسط Ghadampour و همکاران (۲۰۱۵) برای مقایسه آورده شده است.

جدول ۲- مشخصات محاسباتی جریان‌های شبیه‌سازی شده

مدت زمان واقعی جریان (ثانیه)	تعداد ذرات سیال در شروع محاسبات	تعداد گام‌های محاسباتی	زمان پردازنده مرکزی بدون احتساب تصحیح هیدرواستاتیک (ثانیه)	زمان پردازنده مرکزی با اعمال تصحیح هیدرواستاتیک (ثانیه)
مثال بخش ۳-۴	۰/۲۸	۳۰۰۰	۴۸۴	۴۹۶
مثال بخش ۴-۴	۳/۰۱	۱۹۹۲۰	۲۶۰۱۲	۲۶۶۷۶

سرریز است. همگرایی خطوط جریان حوالی تاج سرریز با ایجاد شتاب مثبت در امتداد جریان سبب روگذری ذرات سیال می‌شود (شکل (۸)). همچنین یک موج منفی در اثر پایین افتادگی سطح آب در نزدیکی سرریز به وجود می‌آید که در حین انتشار به بالادست، سبب کاهش تدریجی تراز آب مخزن می‌شود. ثابت باقی ماندن سطح آب مخزن در نواحی دور از سرریز بر صحت پیاده سازی شرط مرزی جریان ورودی دلالت دارد. جریان پس از حدود  $t = 3$  s به حالت ماندگار می‌رسد.

در کنار ارزیابی‌های کیفی فوق‌الذکر، دیدگاهی کمی‌تر از رهگذر صحت‌سنجی نتایج با داده‌های آزمایشگاهی حاصل می‌گردد. این مقایسه شامل نیم‌رخ تیغه‌های آب و نیز توزیع سرعت و فشار است. چند جمله‌ای‌های زیر که از تطابقی مناسب با نیم‌رخ آزمایشگاهی تیغه آب برخوردارند، بر اساس روش کمینه مربعات به ترتیب برای تیغه زبرین و تیغه زیرین پیشنهاد شده‌اند (Lodomez, ۲۰۱۴):

$$Z = -0.0455X^3 - 0.2269X^2 - 0.2217X + 0.8729$$

for  $-1 < X < 2$  (۱۵)

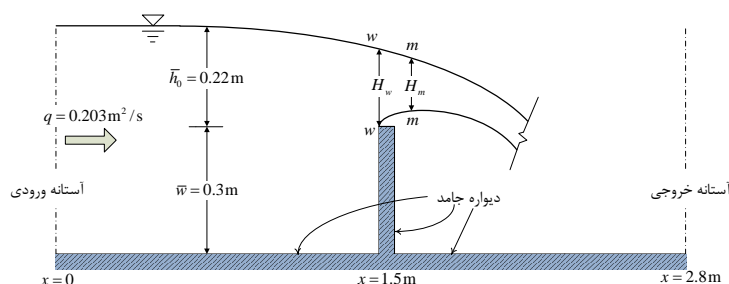
$$Z = -0.2871X^4 + 1.1018X^3 - 1.9044X^2 + 0.8773X + 0.0217$$

for  $0 < X < 1.5$  (۱۶)

متغیرهای کمکی  $X = \bar{x}/\bar{h}_0$  و  $Z = \bar{z}/\bar{h}_0$  در روابط (۱۵) و (۱۶) به مختصات بی‌بعد لازم برای ترسیم نیم‌رخ‌های تیغه آب اشاره دارند. مختصات  $(\bar{x}, \bar{z})$  درست شبیه  $(x, z)$  بوده با این تفاوت که مبدأ سنجش آن بر تاج سرریز منطبق است.

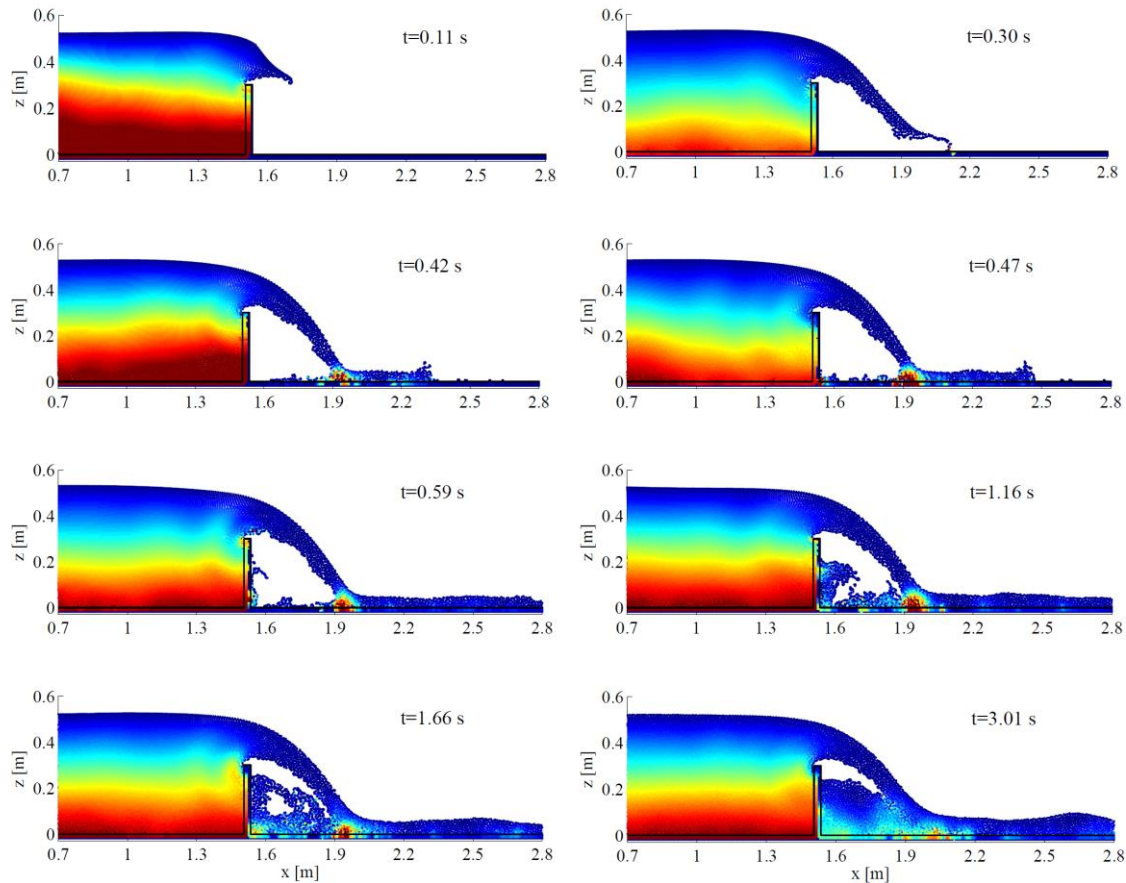
سرریزی لبه تیز به ارتفاع  $\bar{w} = 0.3$  m واقع در  $x = 1.5$  m مخزن بالادست را از بخش خشک پایین دست جدا می‌کند. در اینجا هدف نگه داشتن سطح آزاد مخزن در تراز ثابت  $H = 0.52$  m در نواحی دور از سرریز است. بنابراین دبی ورودی به میزان  $q = 0.203$  m<sup>2</sup>/s مخزن را به طور پیوسته از ذخیره‌گاه تغذیه می‌کند. مطابق رابطه (۱۲)، مشخصات هیدرولیکی اختصاص یافته متناظر با هد  $\bar{h}_0 = 0.22$  m می‌باشد. برای اجتناب از اثرات بازتابی سرریز، ناحیه ورودی جریان در فاصله کافی از سرریز تعبیه شده است. مؤلفه‌های افقی سرعت ذرات سیال تزریق شده در ناحیه ورودی از تقسیم دبی معلوم بر عمق مخزن حاصل می‌شود. در این شبیه‌سازی پیوستار سیال با ذراتی به فاصله اولیه  $H/\Delta x = 80$  افزاز گردیده که با هدف حفظ توازن میان دقت در ثبت جزئیات جریان و زمان محاسبات انتخاب شده است. مانند مثال قبل، هزینه محاسباتی روش پیشنهادی در قالب افزایش ۲/۵ درصدی زمان پردازنده مرکزی نمایان شده است (جدول (۲)).

تصاویری از جریان حاصل در شکل (۷) ترسیم شده‌اند که نشان دهنده توزیع مکانی ذرات سیال در لحظات مختلف‌اند. ذرات مانند قبل با توجه به مقادیر فشار بی بعد خود رنگ شده‌اند. جریان روگذر از سرریز تحت اثر توأم دو میدان گرانش و اینرسی است. قبل از برخورد به بستر پایین دست در حوالی  $t = 0.3$  s، تیغه عبوری از روی سرریز آزادانه در هوا توسعه می‌یابد. برخورد زبانه سیال به کف با افزایش موضعی در میدان فشار همراه است. سپس بخشی از سیال حرکتی معکوس به سمت سرریز را آغاز کرده که با گذشت زمان به الگوی چرخشی در زیر تیغه زیرین تبدیل می‌شود ( $t = 0.59$  s تا  $t = 3.01$  s). بر همین اساس، الگوی خطوط جریان بیانگر چرخش ساعت‌گرد در مجاورت وجه پایین دست



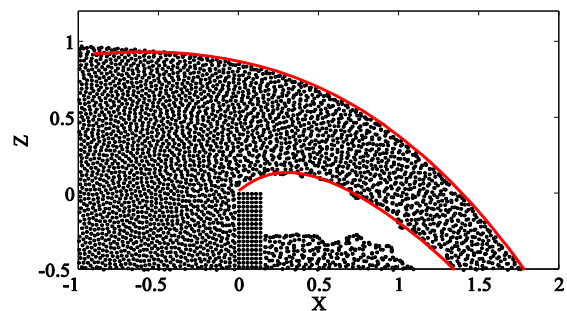
شکل ۶- دامنه حل و شرایط مرزی برای شبیه‌سازی سرریز لبه تیز در حضور دبی ورودی بالادست



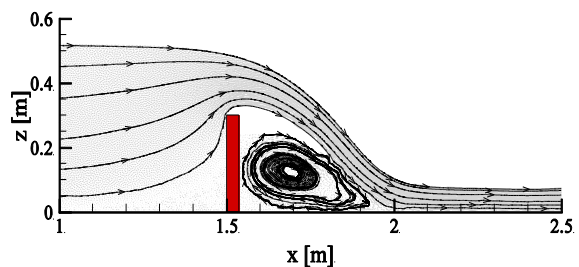


شکل ۷- جریان عبوری از روی سرریز لبه تیز در لحظات مختلف، طیف رنگ ذرات از آبی تا قرمز به ترتیب نشان دهنده فشار بی بعد صفر تا یک است

در شکل (۹) نیمرخ‌های دو تیغه آب (خطوط ممتد) به همراه ذرات SPH (نمادهای خاکستری) کشیده شده‌اند و نتایج از تطابقی مناسب حکایت می‌کند. بر اساس مشاهدات آزمایشگاهی، تیغه زیرین درست از لبه بالادست صفحه سرریز جدا شده؛ به اوج ارتفاع خود رسیده (که از این پس تراز آن با  $\bar{z}_m$  نشان داده می‌شود) و سپس در اثر گرانش به سمت پایین فرو می‌ریزد. در مقایسه با رابطه (۱۶) این مشخصات جریان به خوبی توسط مدل حاضر شبیه‌سازی شده‌اند. عملکردی کمابیش یکسان در پیش‌بینی سایر متغیرهای جریان به دست آمد. این موضوع با بررسی نیمرخ‌های فشار و سرعت افقی،  $U$ ، در مقطع  $m-m$  و نیمرخ فشار در مقطع  $w-w$  تصدیق می‌شود (شکل (۶)). این دو مقطع به ترتیب از نقطه اوج تیغه زیرین و تاج سرریز عبور می‌کنند. چنانچه عمق آب در دو مقطع مذکور به ترتیب با  $H_m$  و  $H_w$  نشان داده شوند، متغیرهای بی‌بعد فشار و سرعت مطابق آنچه بر محورهای شکل (۱۰) درج شده‌اند، بازتعریف می‌شود. مؤلفه افقی سرعت نیز با تقسیم بر  $(2g\bar{h}_0)^{1/2}$  بی‌بعد شده است. بار دیگر نتایج عددی حاضر از تطابقی رضایت بخش با داده‌های آزمایشگاهی برخوردارند.



شکل ۸- الگوی خطوط جریان برای سرریز لبه تیز

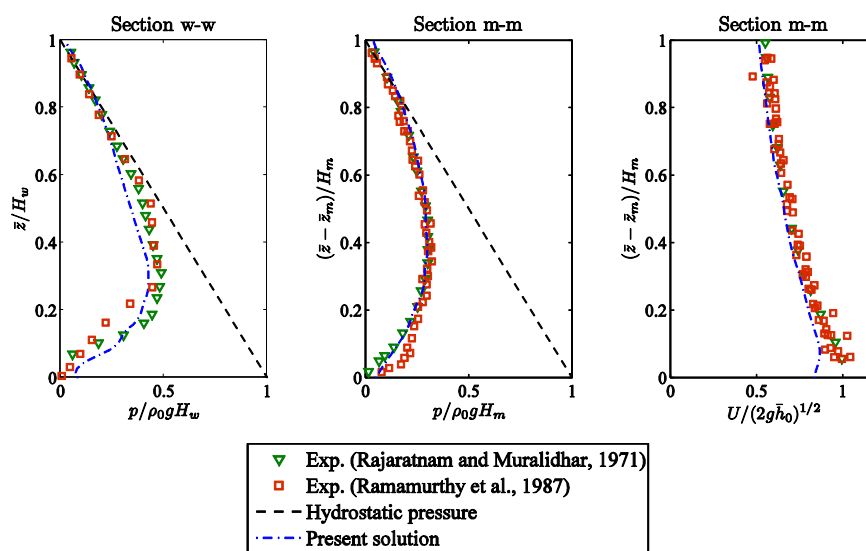


شکل ۹- تیغه‌های زیرین و زیرین (خطوط ممتد) و ذرات SPH (نمادهای خاکستری)

## ۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این تحقیق هیدرودینامیک سرریز لبه تیز به صورت عددی و به کمک روش SPH بازسازی شد. شرایط مرزی جریان ورودی (مرز بالادست) و جریان خروجی (مرز پایین‌دست) به نحوی شایسته برای شبیه‌سازی این سازه هیدرولیکی تعریف گردید. این رویکرد به درکی بهتر از فیزیک جریان واقعی منجر می‌شود، چرا که برخلاف بسیاری از مطالعات پیشین، مرزهای ورودی و خروجی انتقال جرم بین دامنه حل و نواحی پیرامون آن را میسر می‌سازند. برای مدل‌سازی مرز جامد جریان یک الگوریتم ترکیبی مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور، نواحی جامد به صورت چند لایه از ذرات مجازی به منظور جبران کسری چگالی در نزدیکی دیواره و همچنین بهبود دقت حل در این نواحی مدل‌سازی شده است. اولین لایه، که دقیقاً بر روی سطح مشترک مرز سیال و جامد تعبیه شده است، به منظور تولید نیروی دافعه استفاده می‌شود. چنین ترکیبی از ذرات مرزی علاوه بر این که سبب جریانی پیوسته از سیال در کنار دیواره‌ها می‌گردد، از خروج ذرات از مرز جامد نیز جلوگیری می‌نماید. چنین ترکیبی از ذرات مرزی علاوه بر این که

سبب جریانی پیوسته از سیال در کنار دیواره‌ها می‌گردد، از خروج ذرات از مرز جامد نیز جلوگیری می‌نماید. افزودن بر این، با معرفی تصحیح هیدرواستاتیک در قانون بقای جرم، خاصیت حفظ حجم کلی سیال به نحوی چشمگیر بهبود پیدا نمود. این موضوع در قالب خطای ناچیز تکامل انرژی پتانسیل در شبیه‌سازی طولانی مدت مخزن هیدرواستاتیک بازتاب یافت. تاریخچه زمانی تراز افتان آب مخزن شبیه‌سازی شده به خوبی از حل تقریبی پیشنهادی تبعیت می‌کند. نتایج عددی حاضر از منظر کیفی با مشخصات کلی جریان سرریز و از منظر کمی با داده‌های موجود آزمایشگاهی هم‌خوانی دارد. بررسی نتایج حاکی از افزایش ۲/۵ درصدی زمان پردازنده مرکزی در حضور عبارت پیشنهادی است. همچنین شرط مرزی جریان ورودی، قابلیت اعمال تغییرات زمانی عمق و دبی را داراست و به کمک آن می‌توان اثرات ناشی از ناماندگاری جریان در زمان سیلابی شدن کانال بالادست و یا عملکرد سازه‌های هیدرولیکی بالادست (مثلاً تغییر میزان بازشدگی یک دریچه زیرگذر) بر میدان جریان عبوری از سرریز را بررسی نمود.



شکل ۱۰- نیم‌رخ‌های بی‌بعد فشار و سرعت در مقایسه با داده‌های آزمایشگاهی

مجاری باز و سازه‌های وابسته تا هیدرودینامیک سواحل، جایی که امواج بلند پس از انتشار به ساحل می‌رسند.

## ۶- پیوست (الف)

استخراج رابطه‌ای تقریبی برای تراز افتان آب مخزن بر اساس برخی فرضیات ساده‌کننده صورت می‌پذیرد:

(۱) سطح آزاد در خلال پایین افتادگی در سراسر مخزن افقی باقی می‌ماند؛

هرچند که این مطالعه عمدتاً بر هیدرودینامیک سرریز تمرکز یافت، تعمیم دامنه کاربردی مدل عددی حاضر به سایر جریان‌های سطح آزاد به سهولت امکان‌پذیر است. الگوی پیشنهادی در پیاده‌سازی رایانه‌ای ساده بوده و در عین حال از هرگونه پارامتر عددی تنظیم شونده عاری می‌باشد. همچنین انتظار می‌رود از قابلیت مناسبی برای بررسی تکامل جریان‌های تقریباً هیدرواستاتیک در زمان‌های طولانی برخوردار باشد. این قابلیت محدوده‌ای وسیع برای کاربرد بالقوه را پیش رو می‌گستراند: مسائلی از هیدرولیک

- Hu XY, Adams NA, "A multi-phase SPH method for macroscopic and mesoscopic flows", *Journal of Computational Physics*, 2006, 213 (2), 844-861.
- Kirkgoz MS, Akoz MS, Oner AA, "Experimental and theoretical analyses of two-dimensional flows upstream of broad-crested weirs", *Canadian Journal of Civil Engineering*, 2008, 35 (9), 975-986.
- Liu GR, Liu MB, "Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method", World Scientific, Singapore, 2003.
- Liu MB, Liu GR, "Smoothed particle hydrodynamics (SPH): An overview and recent developments", *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2010, 17 (1), 25-76.
- Lodomez M, Erpicum S, Dewals B, Pirotton M, Archambeau P, "Comparison between experimental and SPH models over a sharp-crested weir", 5<sup>th</sup> International Junior Researcher and Engineer Workshop on Hydraulic Structures, Belgium, 2014.
- Lv X, Zou Q, Reeve D, "Numerical simulation of overflow at vertical weirs using a hybrid level set/VOF method", *Advances in Water Resources*, 2011, 34 (10), 1320-1334.
- Mahdavi A, "Pseudo-fluid particles for fluid-rigid body coupling in SPH", *KSCE Journal of Civil Engineering*, 2018, 22 (11), 4194-4204.
- Mahdavi A, Talebbeydokhti N, "Modeling of non-breaking and breaking solitary wave run-up using shock-capturing TVD-WAF scheme", *KSCE Journal of Civil Engineering*, 2011, 15 (6), 945-955.
- Mahdavi A, Talebbeydokhti N, "A hybrid solid boundary treatment algorithm for smoothed particle hydrodynamics", *Scientia Iranica. Transaction A, Civil Engineering*, 2015, 22 (4), 1457-1469.
- Mahdavi A, Hashemi MR, Talebbeydokhti N, "A localized differential quadrature model for moving boundary shallow water flows", *Journal of Hydraulic Research*, 2012, 50 (6), 612-622.
- Meister M, Burger G, Rauch W, "On the Reynolds number sensitivity of smoothed particle hydrodynamics", *Journal of Hydraulic Research*, 2014, 52 (6), 824-835.
- Mello CEFD, "BEM numerical simulation of spillway flows", *Rem: Revista Escola de Minas*, 2014, 67 (1), 21-26.
- Monaghan JJ, "Simulating free surface flows with SPH", *Journal of Computational Physics*, 1994, 110 (2), 399-406.
- Rajaratnam N, Muralidhar D, "Pressure and velocity distribution for sharp-crested weirs", *Journal of Hydraulic Research*, 1971, 9 (2), 241-248.
- Ramamurthy AS, Tim US, Rao MVJ, "Flow over sharp-crested plate weirs", *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 1987, 113 (2), 163-172.
- (۲) هیچگونه جریان ورودی وجود ندارد و خروجی تنها ناشی از یک سرریز لبه تیز است؛
- (۳) تغییرات زمانی هد سرریز،  $h$ ، به قدری آهسته است که شرایط استفاده از رابطه (۱۲) هنوز برقرار است (جریان شبه ماندگار)؛
- (۴) جریان روگذر از سرریز هیچگونه تنگ‌شدگی یا گسترش جانبی ندارد.
- بقای جرم ایجاب می‌کند که آهنگ تغییرات حجم مخزن با دبی حجمی روگذرنده از سرریز به لحاظ قدر مطلق برابر باشد. بر اساس فرضیات مذکور، بقای جرم به صورت زیر بیان می‌شود:
- $$-L \frac{dh}{dt} = q \quad (17)$$
- که در آن  $L$  طول مخزن در امتداد محور افقی است. ترکیب روابط (۱۲) و (۱۷) نتیجه می‌دهد:
- $$dt = \frac{-3L}{(1.222 + 0.15h/\bar{w})\sqrt{2gh^{3/2}}} dh \quad (18)$$
- پس از انتگرال گیری دو طرف رابطه فوق به ترتیب روی بازه-های زمانی  $[0, t]$  و مکانی  $[\delta, h]$ ، رابطه (۱۳) حاصل می‌شود.

#### ۷- مراجع

- Aristodemo F, Marrone S, Federico I, "SPH modeling of plane jets into water bodies through an inflow/outflow algorithm", *Ocean Engineering*, 2015, 105, 160-175.
- Colagrossi A, Landrini M, "Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics", *Journal of Computational Physics*, 2003, 191 (2), 448-475.
- Federico I, Marrone S, Colagrossi A, Aristodemo F, Antuono M, "Simulating 2D open-channel flows through an SPH model", *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 2012, 34, 35-46.
- Ferrari A, "SPH simulation of free surface flow over a sharp-crested weir", *Advances in Water Resources*, 2010, 33, 270-276.
- Ferrari A, Dumbser M, Toro EF, Armanini A, "A new 3D parallel SPH scheme for free surface flows", *Computers and Fluids*, 2009, 38, 1203-1217.
- Ghadampour Z, Hashemi MR, Talebbeydokhti N, Neill SP, Nikseresht AH, "Some numerical aspects of modelling flow around hydraulic structures using incompressible SPH", *Computers and Mathematics with Applications*, 2015, 69 (12), 1470-1483.
- Gómez-Gesteira M, Dalrymple RA, "Using a three-dimensional smoothed particle hydrodynamics method for wave impact on a tall structure", *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 2004, 130 (2), 63-69.
- Haun S, Reidar N, Olsen B, Feurich R, "Numerical modelling of flow over trapezoidal broad-crested weir", *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 2011, 5 (3), 397-405.

## EXTENDED ABSTRACT

# Improved Smoothed Particle Hydrodynamics for Free Surface Flow over Sharp-Crested Weir

Ali Mahdavi \*

Department of Civil Engineering, Arak University, Arak, Iran

Received: 21 September 2017; Accepted: 22 April 2018

---

### Keywords:

Inflow/outflow boundary condition, Non-hydrostatic pressure, Navier–Stokes equations, Lagrangian method.

---

## 1. Introduction

This work presents a numerical investigation of free surface overflow from a sharp-crested weir based on 2-D weakly-compressible Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method. The flow field behaves highly dynamic with strongly deforming free surfaces generated by overtopping jet. A different way of initializing the computation is developed with the relative merits of more rapid convergence to desired steady state. Improved preservation of bulk fluid volume is obtained by recourse to a new hydrostatic correction term, substituted into the mass conservation law. This is confirmed by analyzing the hydrostatic tank test separately in absence and in presence of the correction term. Improvement is also achieved in predicting the draining process of weir-reservoir system when there is no inflow. Comparison with experimental nappe envelopes as well as velocity and pressure distributions demonstrate satisfactory agreement in each case.

## 2. Methodology

SPH methodology builds its Lagrangian character on a set of moving particles that evolve with information interpolated from neighboring particles via a kernel (weighting) function. Each particle resembles an actual material point with a constant mass in 2-D, though occupying a time-dependent volume of space. The computational domain is considered to extend horizontally between the inflow and outflow boundaries (Federico et al., 2012) and vertically between the flume invert and moving free surface. The solid walls (flume invert and weir plate) are implemented by at least four layers of evenly-spaced dummy particles for improving the solution accuracy, the first layer of which also exert a soft repulsion to ensure no-penetration where the solid-fluid interface is under violent impact (Mahdavi and Talebbeydokhti, 2015). The conventional four stage Runge- Kutta method evolves the flow field along time axes. This study proposes an improved version of the SPH method originally derived by Ferrari et al. (2009) as it sets a hydrostatic correction to density difference between interacting pairs, resulting in better preservation of hydrostatic equilibrium over long simulation times. Otherwise, spurious departure from the equilibrium state is inevitable even with a refined particle resolution. Such circumstances may be encountered in a variety of open channel flows where convergence to steady state is desirable. The hydrostatic correction is derived based on the Taylor expansion of density field around each pair of interacting particles.

## 3. Results and discussion

The overflow is completely driven by combined interaction of gravitational and inertial effects. The overtopping jet develops freely in air before impinging on the downstream bed where an increase in the local pressure field can easily be identified. A portion of overtopped fluid then started a reverse motion towards the

---

\* Corresponding Author

E-mail address: a-mahdavi@araku.ac.ir (Ali Mahdavi).

weir, producing a vortex beneath the lower nappe. Accordingly, the streamlines reveal clockwise recirculation close to the downstream weir face (Fig. 1). Converging streamlines near the top of weir produced positive stream-wise acceleration which, in turn, drives overflowing SPH particles. The drawdown of water surface at the weir site also emitted a negative wave that gradually declines reservoir level while propagating in the upstream direction.

Besides the qualitative assessments mentioned above, a more quantitative insight may be gained by validating the numerical predictions against relevant experimental data. Based on the least square approach, Lodomez et al. (2014) proposed polynomial expressions that accurately reproduced their experimentally measured nappe envelopes. These profiles (solid lines) are overlaid onto the SPH particles (gray symbols) in Fig. 2, where an overall agreement can be appreciated. Experimental observations indicate that the lower nappe detaches from the weir plate at upstream crest edge, reaches its highest point and then falls downwards in response to gravity. Such flow characteristics are correctly captured by this weakly-compressible SPH model, as compared to experimental profiles.

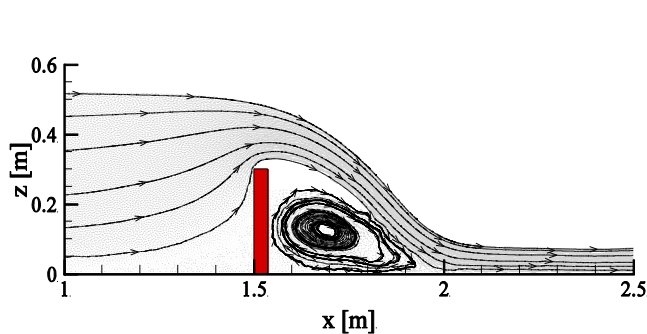


Fig. 1. Streamlines characterizing the nappe flow over sharp-crested weir

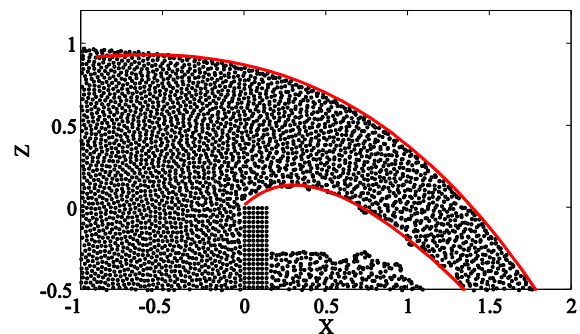


Fig. 2. SPH particles (gray symbols) versus empirical nappe profiles (solid lines)

#### 4. Conclusions

The hydrodynamics of full-width sharp-crested weirs was numerically reproduced by weakly-compressible SPH model. Time history of the declining reservoir level was compared well with an approximate solution derived herein. Transient processes prior to establishment of stationary flow field were identified, consisting of highly nonlinear and multi-connected free surfaces. The numerical results for sharp-crested weirs were found to agree qualitatively with general flow features as well as quantitatively with available experimental data. Particularly, the predicted nappe profiles match extremely well with the measured envelopes in all cases studied. Although the present analysis was mainly focused on weir hydrodynamics, extension to other free surface flows is straightforward. The numerical scheme is easy to implement and free from any calibration parameter. It can avoid highly disordered particles without requiring additional treatment to correct particle movement. It is expected to be equally well suited when modeling the evolution of small departures from the steady state over a long time. This can motivate potential applications in various problems of practical interest such as open channel hydraulics, long wave propagation and liquid sloshing in a tank. These are left as topics for future research.

#### 5. References

- Federico I, Marrone S, Colagrossi A, Aristodemo F, Antuono M, "Simulating 2D open-channel flows through an SPH model", *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 2012, 34, 35-46.
- Ferrari A, Dumbser M, Toro EF, Armanini A, "A new 3D parallel SPH scheme for free surface flows", *Computers and Fluids*, 38 (6), 2009, 1203-1217.
- Lodomez M, Erpicum S, Dewals B, Piroton M, Archambeau P, "Comparison between Experimental and SPH Models over a Sharp-crested Weir", 5<sup>th</sup> International Junior Researcher and Engineer Workshop on Hydraulic Structures, Belgium, 2014.
- Mahdavi A, Talebbeydokhti N, "A hybrid solid boundary treatment algorithm for smoothed particle hydrodynamics", *Scientia Iranica, Transaction A, Civil Engineering*, 2015, 22 (4), 1457-1469.