

## پیش‌بینی بارندگی توسط مدل تلفیقی ARMA-ARCH برای غرب حوضه آبریز دریاچه ارومیه

حسین رضایی\*<sup>۱</sup> و مهدی خوشبخت تیزخراب<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> استاد گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه ارومیه

<sup>۲</sup> دانشجوی دکتری مهندسی منابع آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه ارومیه (پرديس بين الملل)

(دریافت: ۹۵/۱۱/۵، پذیرش: ۹۶/۹/۱۸، نشر آنلاین: ۹۶/۰۹/۱۹)

### چکیده

در مطالعات مهندسی منابع آب پیش‌بینی هر چه بهتر پدیده‌های هیدرولوژیکی از اهمیت فراوانی برخوردار است. در این زمینه همواره مدل‌های خانواده ARMA دارای ضعف‌هایی بوده‌اند که تلفیق مدل‌های خطی سری زمانی با مدل‌های غیر خطی به مانند ARCH می‌تواند در برطرف کردن این ضعف‌ها مفید واقع شود. در این تحقیق بعد از بررسی اولیه داده‌های سالانه بارندگی در سه ایستگاه مورد مطالعه در غرب حوضه آبریز دریاچه ارومیه، این داده‌ها با مدل‌های خطی سری زمانی مورد بررسی قرار گرفتند و بهترین مدل ARMA با استفاده از کم‌ترین مقدار معیار آکائیکه از بین مدل‌های این خانواده برای ایستگاه‌های مورد مطالعه انتخاب گردید. سپس در هر یک از ایستگاه‌ها، سری زمانی باقی‌مانده مدل منتخب ARMA با استفاده از مدل‌های غیر خطی (1) ARCH برآزش داده شده و مدل تلفیقی ARMA-ARCH به دست آمد. مقایسه نتایج حاصله از آزمون‌های MAE، RMSE، EF و CRM برای هر دو مدل، نشان دهنده افزایش دقت و همچنین کاهش میزان خطا در مدل تلفیقی نسبت به مدل ARMA در شبیه‌سازی داده‌های بارندگی می‌باشد.

**کلیدواژه‌ها:** پیش‌بینی، سری زمانی، مدل خطی ARMA، مدل‌های غیرخطی ARCH، مدل تلفیقی ARMA-ARCH

### ۱- مقدمه

در ابتدا این مدل‌های برای سری‌های زمانی در مسائل مالی و اقتصادی به کار گرفته شدند که در واقع نوسانات دوره زمانی اندازه‌گیری شده با دوره‌ای بدون نوسان همراه می‌گردد. Engle در سال ۱۹۸۲ میلادی با در نظر گرفتن نوسانات شدید بازارهای مالی به روش‌های بهتر و جدیدی برای مدل‌سازی و پیش‌بینی متغیر تصادفی متناسب با زمان و نوسانات موجود در این بازارها دست یافت. برای داده‌های مالی مدل‌های واریانس شرطی توسط Bollerslev و همکاران (۱۹۹۲) به کار برده شد. مدل‌های خودهمبسته دارای واریانس شرطی به عنوان یک عامل مؤثر در مدل‌های خودهمبسته به وسیله Bera و Higgins (۱۹۹۳) نیز مورد بررسی قرار گرفته و دقت آن‌ها در مدل‌سازی داده‌های مالی تأیید شده است. پیش‌بینی نوسان‌های بازار ارز توسط مدل‌های واریانس شرطی نشان داد که به کارگیری مدل‌های سیستماتیک خودهمبسته با واریانس شرطی در سری‌های مالی مفید است (Xekalaki و Degiannakis، ۲۰۰۴).

پیش‌بینی وضعیت بارندگی برای مهندسی منابع آب اهمیت بسیار زیادی دارد. به عنوان مثال عموماً خشکسالی در هر منطقه‌ای تحت تأثیر عوامل متعددی است که یکی از مهم‌ترین آنها کاهش میزان بارندگی بوده و از این جهت پیش‌بینی دقیق وضعیت بارش اهمیت زیادی پیدا می‌کند. در این زمینه مدل‌های سری زمانی خطی به‌طور گسترده‌ای در هیدرولوژی مورد استفاده قرار می‌گیرند. اغلب فرآیندهایی که در طبیعت به وقوع می‌پیوندند نسبت به زمان خطی نمی‌باشند، اگرچه ممکن است جنبه‌های خاصی از این سیستم‌ها به فرایند خطی نزدیک‌تر باشند. به هر حال ماهیت غیرخطی برای ما به طور کامل مشخص نیست (Tsonis، ۲۰۰۱). هدف تحقیق بررسی بهبود مدل‌سازی خطی سری زمانی با تلفیق این مدل‌های با مدل‌های غیر خطی است.

در علم اقتصاد، تابعیت واریانس خطاها در یک مدل از اندازه خطاها در دوره‌های زمانی قبل، فرض اصلی برای مدل‌های خود همبسته دارای واریانس شرطی است (Engle، ۱۹۸۲).

\* نویسنده مسئول؛ شماره تماس: ۰۴۴-۳۲۷۵۲۷۴۱

سری‌های زمانی روزانه رودخانه‌های حوضه بالادست سد زربینه رود را نشان دادند که با لگاریتم‌گیری می‌توان رفتار خطی را در آن‌ها مشاهده کرد.

همچنین نتایج تحقیق فتحیان و همکاران (۱۳۹۵) نشان داد که عملکرد مدل‌های غیرخطی آستانه، برای جریان روزانه بهتر از مدل خطی (ARMA) می‌باشد.

Weesakul (۲۰۰۵) از مدل آرما برای پیش‌بینی بارندگی سالانه در ۳۱ ایستگاه باران سنجی در کشور تایلند مورد استفاده کرد و نتایج قابل قبولی گرفت.

Attah و Bankole (۲۰۱۱) در نیجریه با استفاده از مدل خطی سری‌های زمانی اقدام به مدل‌سازی بارندگی سالانه کردند. بارش سالانه خوی توسط میرموسوی و همکاران (۱۳۹۳) با به کارگیری مدل خطی سری‌های زمانی را مدل‌سازی و پیش‌بینی شد. خیری و مقامی مقیم (۱۳۹۴) از مدل آرما برای پیش‌بینی بارش سالانه شهر بجنورد بهره گرفتند.

## ۲- روش تحقیق

در این تحقیق با توجه به وضعیت بارندگی و خشکسالی در حوضه آبریز دریاچه ارومیه، در سه ایستگاه واقع در غرب حوضه آبریز دریاچه ارومیه در استان آذربایجان غربی، با استفاده از تولید داده‌های مصنوعی بارندگی توسط مدل‌های تصادفی سری زمانی پیش‌بینی گردید. موقعیت ایستگاه‌های مورد مطالعه در این تحقیق در جدول (۱) و شکل (۱) ارائه شده است.



شکل ۱- موقعیت ایستگاه‌های مورد مطالعه در استان آذربایجان غربی: (A) چهریق، (B) اورمیه، (C) گلخانه آبشور

در زمینه استفاده از مدل‌های ARCH<sup>۱</sup> تحقیقات زیادی به خصوص در زمینه مالی و اقتصادی صورت گرفته است که می‌توان به تحقیقات Duffee (۱۹۹۲)، Bollerslev و همکاران (۱۹۹۴)؛ Diebold و Lopez (۱۹۹۵)؛ Engle (۱۹۹۵)؛ Shephard و Pagan (۱۹۹۶)؛ Palm (۱۹۹۶)؛ Andersen و Bollerslev (۱۹۹۸)؛ Engle و Patton (۲۰۰۱)، اشاره کرد. Yussuf و همکاران (۲۰۱۶) مدل ترکیبی شبکه عصبی و GARCH<sup>۲</sup> را برای پیش‌بینی قیمت طلا در بازارهای مالی کشور مالزی به کار بردند. هر دو مدل ARCH<sup>۱</sup> و ARMA<sup>۲</sup> برای پیش‌بینی قیمت‌های محصولات کشاورزی در ایران توسط Sangsefidi و همکاران (۲۰۱۵) مورد استفاده قرار گرفت.

مطالعات زیادی در مورد مدل‌های ARCH انجام گرفته است اما در مسائل مربوط به هیدرولوژی این موضوع کم‌تر مورد مطالعه قرار گرفته است. برای برازش واریانس و میانگین روزانه جریان رودخانه زرد چین از تلفیق مدل ARMA و مدل GARCH استفاده شده و نتایج نشان می‌دهد که مدل ARMA-GARCH در مدل‌سازی سری روزانه جریان رودخانه بسیار سودمند می‌باشد (Wang و همکاران، ۲۰۰۵). Tol (۱۹۹۶) مدل تلفیقی AR (2) با ARCH را برای پیش‌بینی دما به کار برد. پیش‌بینی میزان آب مصرفی با استفاده از مدل‌های ARMA و GARCH در مقیاس‌های روزانه و هفتگی از سال ۲۰۰۱ تا ۲۰۰۶ مورد مطالعه قرار گرفت که برای بهبود نتایج پیش‌بینی، استفاده از مدل‌های تلفیقی پیشنهاد شد (Caiado, ۲۰۰۷). در منطقه آلپ آلمان، بارش به عنوان پارامتر تصادفی با استفاده از مدل تلفیقی ARMA-GARCH توسط Laux و همکاران (۲۰۱۱) جهت مدل‌سازی بارندگی مورد استفاده قرار گرفت. پیش‌بینی تراز سطح آب ۶ دریاچه با استفاده از مدل‌های سری زمانی، برنامه‌ریزی ژنتیک و شبکه عصبی بررسی گردید (Khatibi و همکاران، ۲۰۱۴). مدل‌های کلاسیک سری زمانی برای تعیین تراز آب زیرزمینی در منطقه آنیون کانتی در ایالت نیوجرسی آمریکا توسط قدم‌پور و همکاران (۱۳۹۰) استفاده گردید.

نتایج تحقیقات احمدی و همکاران (۱۳۹۴) نشان داد برای مدل‌سازی دبی روزانه رودخانه باراندوز چای اورمیه برنامه‌ریزی ژنتیک نسبت به مدل غیرخطی سری زمانی دوخطی بهتر عمل کرده است.

فتحیان و همکاران (۱۳۹۵) ایستایی و غیرخطی بودن

3. Generalized Autoregressive conditional Heteroscedastic

1. Autoregressive conditional Heteroscedastic  
2. Autoregressive Moving Average

Salas و همکاران، ۱۹۸۸). به منظور تخمین پارامترهای مدل آرما در یک سری زمانی از ضرایب خودهمبستگی استفاده می‌شود (کارآموز و عراقی‌نژاد، ۱۳۸۹). ضرایب خودهمبسته  $\rho_k$  با تأخیر  $k$  از رابطه زیر که به صورت یک عدد بی‌بعد است، بدست می‌آید:

$$\rho_K = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (Y_t - M_t)(Y_{t+k} - M_{t+k})}{\sum_{t=1}^{n-k} (Y_t - M_t)^2} \quad (2)$$

که در آن  $Y_t$  داده‌های مشاهداتی،  $M_t$  میانگین داده‌های مشاهداتی،  $Y_{t+k}$  داده‌های تاریخی با تأخیر  $t+k$  و  $M_{t+k}$  نیز میانگین داده‌ها با تأخیر  $t+k$  است.

برای انتخاب یک مدل مناسب از بین مدل‌های خانواده ARMA از معیار آکاییکه استفاده شده که به صورت رابطه (۳) ارائه می‌گردد. مدل برتر دارای کم‌ترین مقدار معیار آکاییکه خواهد بود (Salas, ۱۹۹۳):

$$AICC = n \cdot \ln(\text{Var}_\varepsilon) + \frac{2(p+q+1)n}{n-p-q-2} \quad (3)$$

که در آن،  $n$  تعداد داده‌ها،  $\text{Var}_\varepsilon$  واریانس خطا،  $p$  مرتبه مدل در بخش خودهمبسته و  $q$  مرتبه مدل در بخش میانگین متحرک می‌باشند.

## ۲-۲- مدل‌های ARCH

برای اولین بار مدل‌های خودهمبسته دارای واریانس شرطی (ARCH) توسط Engle (۱۹۸۲) معرفی گردید و Weiss در سال ۱۹۸۴ اولین کسی بود که پیشنهاد تلفیق مدل‌های ARMA را با مدل ARCH ارائه داد. این موضوع توسط بسیاری از محققان مورد تأیید و توسعه قرار گرفت که از جمله می‌توان به Hauser و Kunst (۱۹۹۸) و Karanasos (۲۰۰۱) اشاره کرد. مدل ARCH به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود (Davis و Brockwell, ۲۰۰۲):

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} e_t, \quad \{e_t\} \sim \text{IID } N(0,1) \quad (4)$$

که  $h_t$  تابعی (مثبت) از  $\{\varepsilon_s, s < t\}$  به صورت رابطه زیر بیان می‌شود:

$$h_t = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 \quad (5)$$

که در آن،  $\varepsilon_t$  عبارت خطا یا باقی‌مانده مدل با میانگین صفر و واریانس یک،  $h_t$  واریانس شرطی از  $\varepsilon_t$ ،  $\alpha_0 \geq 0$ ،  $\alpha_j \geq 0$  پارامترهای مدل،  $n$  همان مرتبه مدل و  $e_t$  سری زمانی پارامتر مورد نظر است. برای درک بهتر مدل واریانس شرطی، ابتدا از ساختار ساده شده مدل ARCH (1) استفاده شد. برای این موضوع با توجه به معادلات

## جدول ۱- موقعیت جغرافیایی ایستگاه‌های باران سنجی

| نام ایستگاه     | طول جغرافیایی | عرض جغرافیایی |
|-----------------|---------------|---------------|
| چهریق           | درجه دقیقه    | درجه دقیقه    |
| کمپ ارومیه      | ۴۴            | ۳۸            |
| گلمانخانه آبشور | ۴۵            | ۳۷            |

حوضه آبریز دریاچه ارومیه یکی از مهم‌ترین حوضه‌های منطقه‌ای ایران است که در بخش شمال غرب ایران واقع شده است. در این راستا جهت بررسی روند داده‌های سری زمانی بارش سالانه ایستگاه‌های مورد مطالعه از روش من-کندال استفاده گردید. برای مدل‌سازی می‌بایست همگنی و تصادفی بودن داده‌ها نیز مورد بررسی قرار گیرد که بدین منظور روش ران-تست از برنامه مینی تب استفاده شد که p-value محاسبه شده در حد قابل قبول بوده است. با توجه به نتایج بدست آمده همگنی و تصادفی بودن داده‌ها در ایستگاه‌های مورد مطالعه تأیید شده و همچنین این داده‌ها دارای هیچ روندی نمی‌باشند.

## ۲-۱- مدل‌های ARMA

پیش‌بینی بارندگی و خشکسالی برای برنامه‌ریزی و مدیریت منابع آب اهمیت به‌سزایی دارد زیرا با کم شدن کمیت و کیفیت آب در طول زمان از یک سو و افزایش روز افزون تقاضای آب از سوی دیگر منابع آب روز به روز محدودتر می‌شوند. مدل‌های آماری زیادی برای پیش‌بینی متغیرهای اقلیمی مورد استفاده قرار می‌گیرد که مدل‌های سری زمانی خودهمبسته برای بررسی و پیش‌بینی متغیرهای هیدرولوژی به‌طور گسترده‌ای از اوایل دهه ۶۰ میلادی به بعد استفاده شده‌اند. این مدل‌ها توسط Thomas و Fiering (۱۹۶۲) مورد استفاده قرار گرفت و Box و Jenkins (۱۹۷۶) مدل‌های سری زمانی خودهمبسته را توسعه دادند. زنجیره مارکف پایه اصلی مدل‌های سری زمانی خودهمبسته است. از مدل‌های سری زمانی می‌توان به مدل‌های خودهمبسته با میانگین متحرک (ARMA) و آرما (ARIMA) اشاره کرد. رابطه میانگین متحرک خودهمبسته ARMA(p,q) به شرح زیر ارائه شده است:

$$Y_t = \sum_{i=1}^p (\varphi_i Y_{t-i}) - \sum_{j=1}^q (\theta_j \varepsilon_{t-j}) + \varepsilon_t \quad (1)$$

که در آن،  $Y_t$  سری زمانی نرمال و استاندارد،  $p$  مرتبه مدل خودهمبسته (AR)،  $q$  مرتبه مدل میانگین متحرک (MA)،  $\varphi_i$  ضریب مدل خودهمبسته،  $\theta_j$  ضریب مدل میانگین متحرک و  $\varepsilon_t$  سری تصادفی و نرمال مدل با میانگین صفر و واریانس  $\sigma_\varepsilon^2$  می‌باشد

۴ و ۵ داریم (Davis و Brockwell، ۲۰۰۲):

$$\begin{aligned} \varepsilon_t^2 &= h_t \cdot e_t^2 \\ &= \alpha_0 e_t^2 + \alpha_1 \alpha_0 e_t^2 e_{t-1}^2 + \alpha_1^2 \varepsilon_{t-2}^2 e_{t-1}^2 \\ &= \dots \\ &= \alpha_0 \sum_{j=0}^n \alpha_1^j e_t^2 e_{t-1}^2 \dots e_{t-j}^2 + \\ &\quad \alpha_1^{n+1} \varepsilon_{t-n-1}^2 e_t^2 e_{t-1}^2 \dots e_{t-n}^2 \end{aligned} \quad (۶)$$

اگر  $|\alpha_1| < 1$  و سری  $\{\varepsilon_t\}$  ایستا باشد و با توجه به این که امید ریاضی برای آخرین جمله ( $\alpha_1^{n+1} E\varepsilon_t^2$ ) وقتی که  $n$  به سمت بی‌نهایت پیش می‌رود به سمت صفر همگرا می‌شود؛ خواهیم داشت:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j e_t^2 e_{t-1}^2 \dots e_{t-j}^2 \quad (۷)$$

با استفاده از امید ریاضی می‌توان نتیجه‌های زیر را از معادله (۷) به دست آورد:

$$E(\varepsilon_t) = E[E(\varepsilon_t | e_s, s < t)] = 0 \quad (۸)$$

$$E\varepsilon_t^2 = \text{Var}\varepsilon_t = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \quad (۹)$$

از آن جای که باید  $E\varepsilon_t^2 < \infty$  و واریانس مثبت باشد در نتیجه محدوده  $\alpha_1$  نیز بین ۰ و ۱ لحاظ می‌شود (Davis و Brockwell، ۲۰۰۲). فرآیند تلفیق دو مدل ARMA و ARCH (1) به صورت مراحل زیر می‌باشد:

- پیدا کردن بهترین مدل آرما
- استخراج سری زمانی باقی‌مانده در مدل برتر ARMA با استفاده از رابطه (۱)
- برازش مدل ARCH (1) برای سری زمانی باقی‌مانده استاندارد شده و محاسبه مقادیر  $h_t$  توسط نرم‌افزار ITSM
- در نهایت تلفیق مدل منتخب ARMA و ARCH(1) بدین ترتیب در نهایت مدل ترکیبی جدید ARMA-ARCH جهت مدل‌سازی و پیش‌بینی بارش سالانه ایستگاه مورد نظر حاصل گشت. جهت انجام محاسبات از نرم‌افزار ITSM و محیط EXCEL استفاده شد.

### ۳-۲- معیارهای ارزیابی مدل‌ها

به منظور ارزیابی عملکرد مدل برتر ARMA با مدل تلفیقی ARMA-ARCH از معیارهای مختلفی نظیر جذر میانگین مربعات خطا (RMSE)، میانگین قدرمطلق خطا (MAE)، ضریب کارایی

نش-ساتکلیف (EF) و ضریب تجمعی باقی‌مانده (CRM) استفاده گردید. این معیارها با روابط زیر قابل محاسبه هستند:

- جذر میانگین مربعات خطا:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (O_i - P_i)^2}{n-1}} \quad (۱۱)$$

- میانگین قدرمطلق خطا:

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |O_i - P_i| \quad (۱۲)$$

- ضریب کارایی نش-ساتکلیف:

$$EF = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (O_i - P_i)^2}{\sum_{i=1}^n (O_i - \bar{O})^2} \quad (۱۳)$$

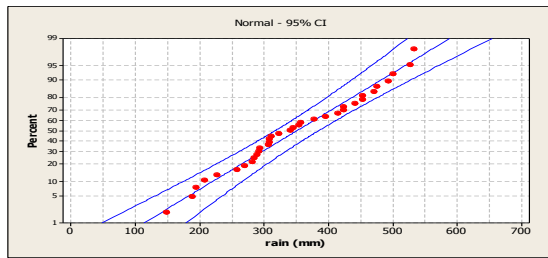
- ضریب تجمعی باقی‌مانده:

$$CRM = \frac{\sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n O_i}{\sum_{i=1}^n O_i} \quad (۱۴)$$

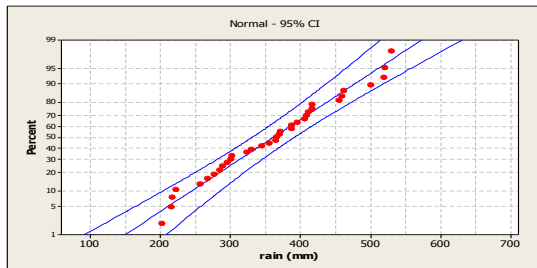
که در این روابط،  $O_i$  داده‌های واقعی یا مشاهداتی،  $\bar{O}$  میانگین داده‌های مشاهداتی،  $P_i$  داده‌های پیش‌بینی و  $n$  تعداد مشاهدات است. پیش‌بینی‌هایی که مقادیر RMSE و MAE آن‌ها کم‌ترین مقدار را داشته باشند از عملکرد بهتری در مدل‌سازی برخوردار هستند (Steel و Torrie، ۱۹۶۰). ضریب EF دارای دامنه تغییراتی از منفی بینهایت تا یک است. هرچه ضریب EF به عدد یک نزدیک‌تر باشد بیانگر این موضوع است که مدل دارای دقت بالایی می‌باشد و مقادیر مشاهداتی و پیش‌بینی تطابق و همبستگی زیادی با هم دارند. زمانی که دقت مقدار متوسط داده‌های مشاهداتی بیشتر از دقت مدل باشد، ضریب کارایی نش-ساتکلیف دارای مقادیر منفی است. مقدار مناسب برای ضریب تجمعی باقی‌مانده (CRM) صفر بوده و مقادیر مثبت و منفی آن به ترتیب بیان‌کننده تخمین بیشتر و کم‌تر مدل منتخب نسبت به داده‌های تاریخی است.

### ۳- نتایج و بحث

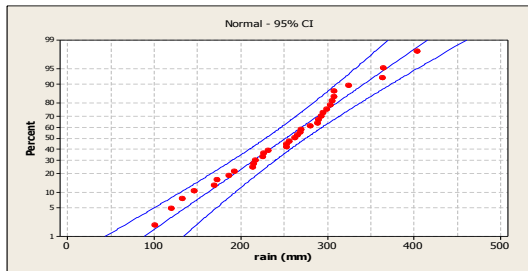
سری زمانی ۳۵ ساله بارش در ایستگاه‌های مورد مطالعه در غرب حوضه آبریز دریاچه ارومیه در مقیاس سالانه با استفاده از آزمون‌های اولیه مورد بررسی قرار گرفتند. این داده‌ها از سازمان آب منطقه‌ای استان آذربایجان غربی اخذ شدند. نتایج بررسی آزمون‌های تصادفی بودن داده‌ها (Run test) تصادفی بودن داده‌های سری زمانی را برای هر سه ایستگاه تأیید می‌کند و آزمون ایستایی (MANN-KENDAL) در جدول (۲) ارائه گردیده که نتایج، ایستایی داده‌های سری زمانی را برای هر سه ایستگاه تأیید کرد.



شکل ۲- نمودار داده‌های استاندارد شده ایستگاه چهریق در حدود اعتماد نرمال (۰.۹۵)



شکل ۳- نمودار داده‌های استاندارد شده ایستگاه کمپ ارومیه در حدود اعتماد نرمال (۰.۹۵)



شکل ۴- نمودار داده‌های استاندارد شده ایستگاه گلخانه آبشور در حدود اعتماد نرمال (۰.۹۵)

جدول ۲- نتایج آزمون من-کندال برای سری زمانی داده‌های بارندگی سالانه

| ایستگاه      | z-value of MANN-KENDAL test<br>(z-level: $-1/96 \leq Z \leq +1/96$ ) |
|--------------|--|
| چهریق        | +۰/۸۲۳   |
| کمپ ارومیه   | -۰/۳۶۹   |
| گلخانه آبشور | -۰/۲۸۴   |

نتایج آزمون نرمال بودن داده‌ها در شکل‌های (۲) تا (۴) نشان داده شده است. در این اشکال خط برازشی توزیع نرمال به همراه حدود اعتماد (۹۵ درصد) و داده‌های محاسبه شده ارائه گردیده است که نشان می‌دهند داده‌ها در حدود اعتماد ۹۵ درصد خط نرمال قرار گرفته و دارای توزیع نرمال می‌باشند.

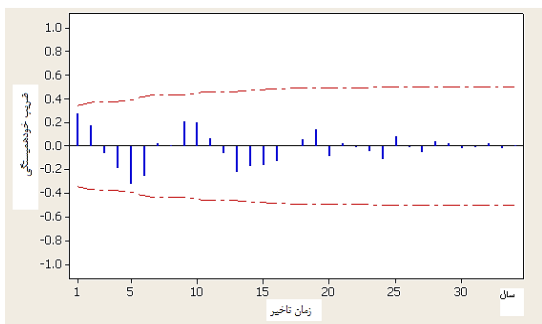
برای تعیین مناسب‌ترین زمان تأخیر در پیش‌بینی بارندگی در ایستگاه‌های مورد مطالعه، مقادیر معیار آکائیکه براساس رابطه (۳) محاسبه شده که نتایج تست آکائیکه در جدول (۳) برای هر سه ایستگاه ارائه گردیده است. همچنین نمودارهای ضریب همبستگی (ACF) و همبستگی جرئی (PACF) داده‌های بارندگی تاریخی هر سه ایستگاه در شکل‌های (۵) تا (۷) ارائه گردیده است. مدل برتر برای خانواده ARMA با توجه به معیار آکائیکه کم‌تر، برای ایستگاه‌های چهریق و گلخانه آبشور مدل ARMA(1,0) و در ایستگاه کمپ ارومیه مدل ARMA(0,1) می‌باشد.

جدول ۳- نتایج تست آکائیکه

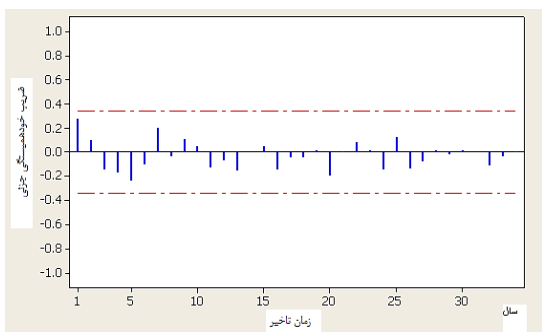
| ایستگاه      | Arma (0,1) | Arma (1,1) | Arma (2,0) | Arma (0,2) |
|--------------|------------|------------|------------|------------|
| چهریق        | ۹۷/۳۸۰     | ۹۸/۴۲۶     | ۹۹/۶۴۹     | ۱۰۰/۰۵۶    |
| کمپ ارومیه   | ۱۰۱/۷۸۸    | ۱۰۱/۷۳۳    | ۱۰۴/۱۲۲    | ۱۰۴/۰۸۴    |
| گلخانه آبشور | ۹۹/۸۳۴     | ۱۰۱/۸۵۶    | ۱۰۱/۹۳۹    | ۱۰۰/۶۹۴    |

جدول ۴- معادلات  $\epsilon_t$  حاصله برای مدل ARMA و  $h_t$  به دست آمده برای مدل تلفیقی ARMA-ARCH

| نام ایستگاه  | $\epsilon_t$                              | $h_t$   |
|--------------|---|---|
| چهریق        | $\epsilon_t = Y_t - 0.3905Y_{t-1}$        | $h_t = 0.5579117 + 0.0488868\epsilon_{t-1}^2$ |
| کمپ ارومیه   | $\epsilon_t = Y_t - 0.1631\epsilon_{t-1}$ | $h_t = 0.7111748 + 0.1935307\epsilon_{t-1}^2$ |
| گلخانه آبشور | $\epsilon_t = Y_t - 0.2769Y_{t-1}$        | $h_t = 0.7787156 + 0.1515773\epsilon_{t-1}^2$ |

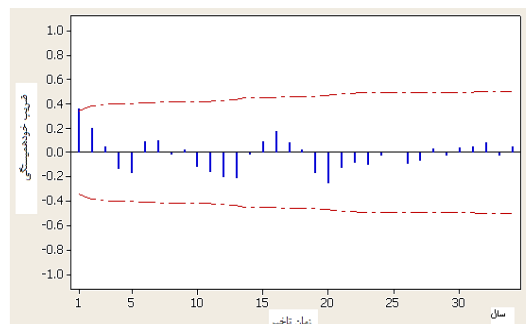


(الف)

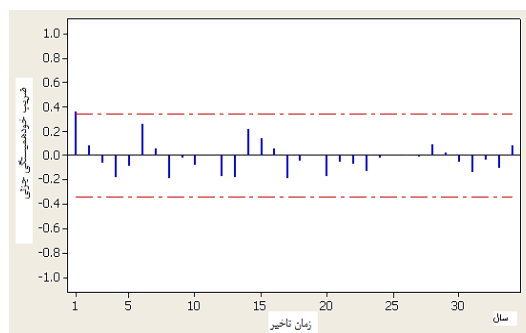


(ب)

شکل ۷- نمودارهای ضریب همبستگی: الف) همبستگی جزئی، ب) ایستگاه کمپ ارومیه



(الف)



(ب)

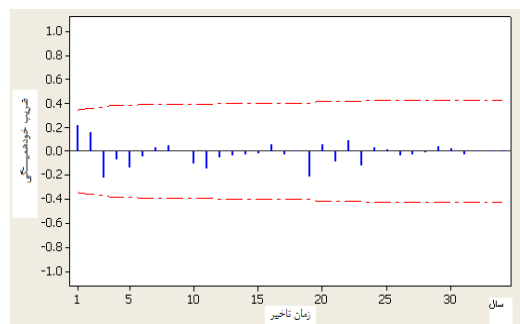
شکل ۵- نمودارهای ضریب همبستگی: الف) همبستگی جزئی، ب) ایستگاه چهریق

معادله‌های سری باقی‌مانده مدل  $(\epsilon_t)$  مدل ARMA براساس رابطه (۱)، استخراج شده که نتایج آن در جدول (۴) ارائه شده است. سپس معادله‌های سری باقی‌مانده مدل با استفاده از نرم‌افزار ITSM و مدل ARCH، برازش شده که نتایج آن نیز در جدول (۴) برای ایستگاه‌های مورد مطالعه محاسبه و مقادیر  $ht$  مورد نیاز در مدل ARCH آورده شده است.

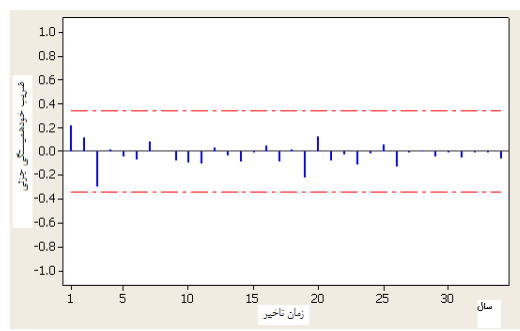
جهت بررسی و صحت‌سنجی مدل‌های مورد استفاده، داده‌های مدل‌سازی و مشاهداتی برای کل دوره آماری در ایستگاه‌های مورد مطالعه بررسی و مقایسه گردید. نتایج معیارهای آماری MAE، RMSE، EF و CRM نیز برای مدل ARMA و مدل ARCH-ARMA برای تمامی ایستگاه‌های مورد مطالعه در دو بخش جداگانه ارزیابی شده است. نتایج مقایسه معیارهای آماری برای مدل ARMA در جدول (۵) ارائه گردیده است.

جدول ۵- مقایسه نتایج معیارهای مقایسه آماری در مدل ARMA

| ایستگاه         | CRM     | EF   | MAE (mm) | RMSE(mm) |
|-----------------|---------|------|----------|----------|
| چهریق           | -۰/۰۰۶۲ | ۰/۸۵ | ۳۱/۷۳    | ۳۹/۱۴    |
| کمپ ارومیه      | -۰/۰۰۶۴ | ۰/۹۷ | ۱۱/۷۲    | ۱۴/۲۹    |
| گلمانخانه آبشور | -۰/۰۰۱۲ | ۰/۹۲ | ۱۵/۰۷    | ۱۹/۰۸    |

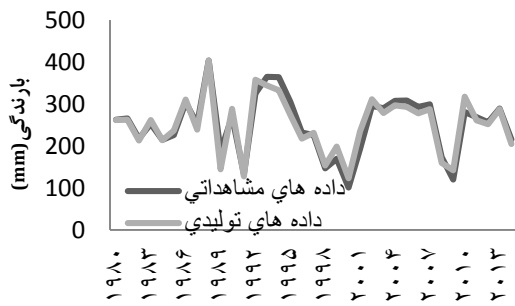


(الف)



(ب)

شکل ۶- نمودارهای ضریب همبستگی: الف) همبستگی جزئی، ب) ایستگاه کمپ ارومیه



شکل ۱۰- مقایسه داده‌های مشاهده‌ای و شبیه‌سازی شده با استفاده از مدل ARMA در ایستگاه گل‌مانخانه آبشور برای سال‌های (۲۰۱۴-۱۹۸۰)

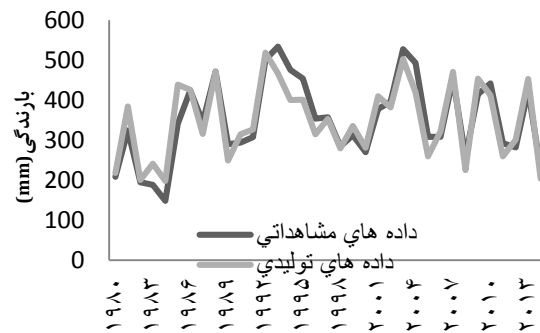
در مدل تلفیقی برای شبیه‌سازی داده‌های بارش در هر سه ایستگاه مورد مطالعه از برازش مقادیر سری باقی‌مانده مدل ARMA استفاده شده که نتایج معیارهای آماری مقایسه‌ای برای مدل ARMA-ARCH نیز در جدول (۶) ارائه شده است که معیارهای مقایسه آماری قابل قبول بوده و شبیه‌سازی با استفاده از مدل ARMA-ARCH به خوبی انجام پذیرفته است.

جدول ۶- مقایسه نتایج معیارهای مقایسه آماری در مدل تلفیقی

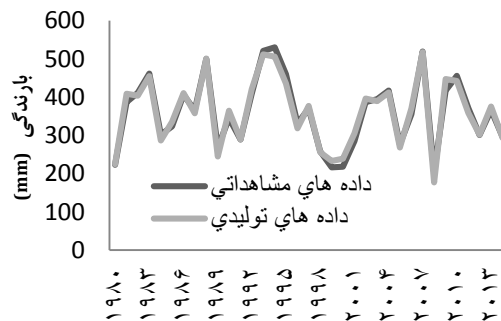
| ایستگاه          | CRM     | EF   | MAE(mm) | RMSE(mm) |
|------------------|---------|------|---------|----------|
| چهریق            | -۰/۰۰۲۸ | ۰/۸۶ | ۳۰/۵۴   | ۳۷/۹۸    |
| کمپ‌ارومیه       | -۰/۰۰۲۳ | ۰/۹۸ | ۱۱/۸۶   | ۱۳/۹۴    |
| گل‌مانخانه آبشور | -۰/۰۰۱۹ | ۰/۹۲ | ۱۵/۶۷   | ۱۸/۷۳    |

داده‌های شبیه‌سازی و مشاهده‌ای بارندگی سالانه برای ایستگاه‌های مورد مطالعه با استفاده از مدل تلفیقی، نیز در شکل‌های (۱۱) تا (۱۳) ارائه گردید که نشان‌دهنده اختلاف کم داده‌های شبیه‌سازی با مشاهده‌ای در ایستگاه ارومیه بوده و در بقیه ایستگاه‌ها هم در حد خوب و قابل قبول می‌باشد. نتایج معیار RMSE برای مدل ARMA در تمامی ایستگاه‌ها مابین ۱۴ تا ۳۹ میلی‌متر متغیر بوده که کم‌ترین مقدار مربوط به ایستگاه کمپ‌ارومیه با ۱۴/۲۹ میلی‌متر اختلاف می‌باشد. این در حالی است که این معیار در مدل تلفیقی نسبت به مدل آرما کمی بهبود پیدا کرده به طوری که در بهترین حالت معیار RMSE در ایستگاه چهریق ۳ درصد نسبت به مدل آرما کم‌تر شده و به ترتیب در ایستگاه کمپ‌ارومیه در حدود ۲/۴ و برای ایستگاه گل‌مانخانه آبشور ۱/۸ درصد کاهش داشته است. این موضوع بیانگر بهبود اندک وضعیت معیار RMSE در مدل تلفیقی نسبت به مدل ARMA می‌باشد. نتایج تقریباً مشابهی را می‌توان برای معیار MAE بیان

معیارهای ارزیابی در ایستگاه کمپ‌ارومیه نسبت به دو ایستگاه دیگر، کم‌ترین مقادیر را به خود اختصاص داده و ایستگاه گل‌مانخانه آبشور نسبت به چهریق در رده‌های بعدی قرار گرفته است. مقادیر شبیه‌سازی و مشاهده‌ای برای مدل آرما در سه ایستگاه مورد مطالعه در شکل‌های (۸) تا (۱۰) ارائه گردیده که در ایستگاه چهریق مقدار ضریب EF برابر با ۰/۸۵، ایستگاه ارومیه ۰/۹۷ و در ایستگاه گل‌مانخانه آبشور ۰/۹۲ محاسبه گردیده و هرچقدر مقدار ضریب EF به عدد یک نزدیک‌تر باشد، در این صورت اختلاف بین مقادیر مشاهده‌ای و شبیه‌سازی شده به حداقل می‌رسد که اختلاف نتایج مشاهده‌ای و شبیه‌سازی در ایستگاه کمپ‌ارومیه نسبت به بقیه ایستگاه‌ها کم‌تر بوده و بیش‌ترین اختلاف در ایستگاه چهریق می‌باشد.



شکل ۸- مقایسه داده‌های مشاهده‌ای و شبیه‌سازی شده با استفاده از مدل ARMA در ایستگاه چهریق برای سال‌های (۲۰۱۴-۱۹۸۰)



شکل ۹- مقایسه داده‌های مشاهده‌ای و شبیه‌سازی شده با استفاده از مدل ARMA در ایستگاه کمپ‌ارومیه برای سال‌های (۲۰۱۴-۱۹۸۰)

با در نظر گرفتن این نکته که ضریب EF هرچقدر به عدد یک نزدیکتر باشد نشان دهنده دقت بالای مدل است؛ از نتایج بدست آمده در جدول‌های (۵) و (۶) مشاهده می‌شود که ضریب EF در هر دو مدل آرما و مدل تلفیقی نسبت به یکدیگر تغییرات خاصی نداشته و در هر دو ایستگاه ارومیه و گلخانه آبشور به ۱ نزدیکتر بود که تطابق و همبستگی خوب مقادیر مشاهده‌ای و شبیه‌سازی شده برای هر دو مدل مذکور در این دو ایستگاه به خصوص برای ایستگاه کمپ ارومیه را به وضوح در شکل‌های (۱۲) و (۱۳) نشان می‌دهد. نتایج معیار آماری CRM برای هر دو مدل مذکور خوب بوده و مقایسه نتایج CRM نشان می‌دهد که مدل تلفیقی نسبت به مدل آرما عملکرد نسبتاً بهتری داشته و در حدود ۵۰ درصد بهبود یافته و به صفر نزدیکتر شده است.

مقایسه مدل ARMA و مدل تلفیقی با استفاده از نتایج حاصله از آزمون‌های MAE، RMSE، EF و CRM، نشان دهنده این موضوع است که مدل تلفیقی نیز برای شبیه‌سازی داده‌های بارش سالانه از دقت قابل قبولی برخوردار است.

ارزیابی ضرایب معادله‌های برآوده شده  $h_t$  و  $\varepsilon_t$  در شبیه‌سازی مدل تلفیقی نشان می‌دهد که در ایستگاه چهریق شیب شرطی  $h_t$  محاسبه شده (۰/۰۴۹) نسبت به بقیه ایستگاه‌ها خیلی کم‌تر بوده در صورتی که در ایستگاه کمپ ارومیه شیب یا ضریب  $\varepsilon_{t-1}^2$  از ایستگاه‌های دیگر بیشتر می‌باشد و معادله‌های  $h_t$  به ترتیب برای ایستگاه‌های چهریق، کمپ ارومیه و گلخانه آبشور به صورت رابطه‌های (۱۵) تا (۱۷) ارائه می‌شود:

$$h_t = 0.5579 + 0.049Y_{t-1}^2 + 0.007Y_{t-2}^2 + 0.0382Y_{t-1}Y_{t-2} \quad (15)$$

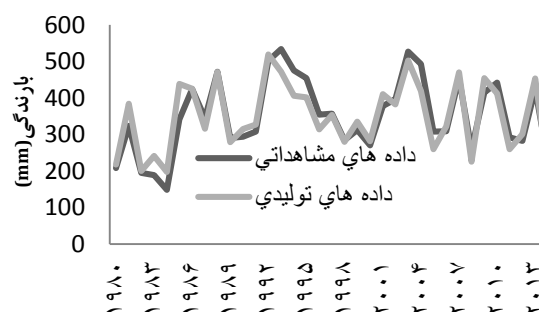
$$h_t = 0.7117 + 0.1935Y_{t-1}^2 + 0.005147\varepsilon_{t-2}^2 + 0.06312Y_{t-1}\varepsilon_{t-2} \quad (16)$$

$$h_t = 0.7787 + 0.1516Y_{t-1}^2 + 0.0116Y_{t-2}^2 + 0.084Y_{t-1}Y_{t-2} \quad (17)$$

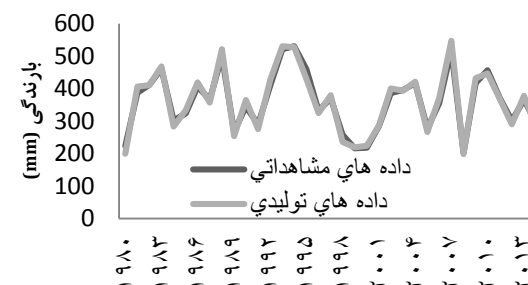
در معادله  $h_t$  ایستگاه کمپ ارومیه دلیل کاهش مقادیر معیار مقایسه‌ای به دلیل شکل ضرایب معادله برازش بوده و ضریب  $Y_{t-1}^2$  آن از تمام معادله‌های ایستگاه‌های دیگر بیشتر بوده است.

با توجه به نتایج به دست آمده در این تحقیق برای هر سه ایستگاه مورد مطالعه اقدام به پیش‌بینی بارندگی برای دوره آماری (۲۰۱۵-۲۰۴۹) با استفاده از مدل تلفیقی ARMA-ARCH گردید. مقادیر پیش‌بینی بارش در ایستگاه‌های مورد مطالعه برای سال‌های

کرد. MAE در مدل تلفیقی نسبت به مدل آرما فقط در ایستگاه چهریق ۳/۸ درصد کم‌تر شده و بهبود یافته است در حالی که برای هر دو ایستگاه کمپ ارومیه و گلخانه آبشور تغییر محسوسی مشاهده نمی‌شود.



شکل ۱۱- مقایسه داده‌های مشاهده‌ای و شبیه‌سازی شده با مدل تلفیقی ARMA-ARCH در ایستگاه چهریق برای سال‌های (۱۹۸۰-۲۰۱۴)



شکل ۱۲- مقایسه داده‌های مشاهده‌ای و شبیه‌سازی شده با مدل تلفیقی ARMA-ARCH در ایستگاه کمپ ارومیه برای سال‌های (۱۹۸۰-۲۰۱۴)



شکل ۱۳- مقایسه داده‌های مشاهده‌ای و شبیه‌سازی شده با مدل تلفیقی ARMA-ARCH در ایستگاه گلخانه آبشور برای سال‌های (۱۹۸۰-۲۰۱۴)



نتایج پیش‌بینی نشان دهنده خشکسالی در منطقه ایستگاه گل‌مانخانه آبشور در آینده خواهد بود.

#### ۴- نتیجه‌گیری

نتایج دو مدل (مدل آرما و مدل تلفیقی)، به خصوص نتایج معیار آماری CRM در این تحقیق برای تمامی ایستگاه‌های مورد مطالعه نشان داد که ترکیب مدل‌های خطی و غیرخطی از دقت قابل قبولی برخوردار بوده و می‌تواند برای پیش‌بینی بارندگی و خشکسالی به کار گرفته شود. هرچند مدل تلفیقی معیارهای مقایسه‌ای آماری کمی بهبود بخشیده اما این مقدار کم نیز می‌تواند برای مطالعات در طرح‌های بسیار مهم منابع آب از اهمیت بالایی برخوردار باشد. این موضوع بیانگر این مطلب می‌باشد که ترکیب مدل‌های غیرخطی با مدل آرما می‌تواند دقت پیش‌بینی را در مسائل مربوط به هیدرولوژی، بهبود بخشد.

#### ۵- مراجع

احمدی ف، دین پزوه ی، فاخری فرد ا، خلیلی ک، دربندی ص، "مقایسه مدل‌های غیرخطی سری زمانی و برنامه‌ریزی ژنتیک در پیش‌بینی جریان روزانه رودخانه‌ها (مطالعه موردی: رودخانه باراندوزچای ارومیه)"، پژوهش‌های حفاظت آب و خاک گرگان، ۱۳۹۴، ۲۲ (۱)، ۱۷۱-۱۵۱.

خیری ه، مقامی مقیم غ، "پیش‌بینی بارش سالانه شهر بجنورد با استفاده از مدل آرما"، چهارمین همایش سراسری محیط زیست، انرژی و پدافند زیستی، ۱۳۹۴.

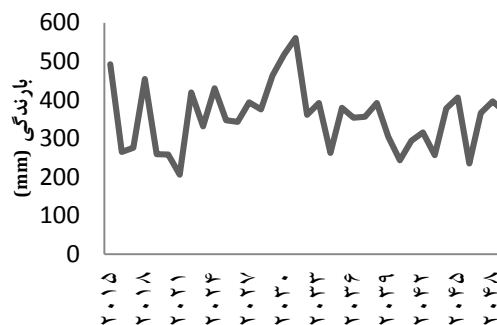
فتحیان ف، فاخری فرد ا، دین پزوه ی، موسوی ندوشنی س، "بررسی ایستایی و غیرخطی بودن سری‌های زمانی جریان روزانه رودخانه بر اساس آزمون‌های آماری مختلف (مطالعه موردی: رودخانه‌های حوضه بالادست سد زرینه رود)"، مجله آب و خاک مشهد، ۱۳۹۵، ۳۰ (۴)، ۱۰۲۴-۱۰۰۹.

فتحیان ف، فاخری فرد ا، دین پزوه ی، موسوی ندوشنی س، "ارزیابی عملکرد مدل‌های سری زمانی خطی ARMA و غیر خطی آستانه TAR در مدل‌سازی دبی روزانه (مطالعه موردی: رودخانه‌های حوضه بالادست سد زرینه رود)"، مجله آب و خاک مشهد، ۱۳۹۵، ۳۰ (۵)، ۱۴۴۰-۱۴۶۰.

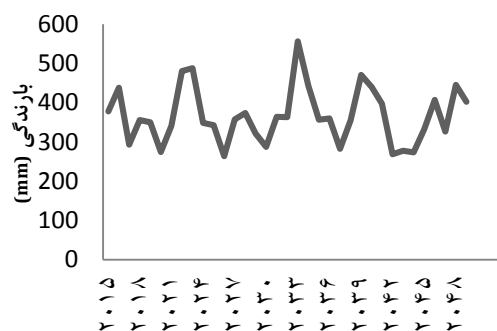
قدم‌پود ز، شقاقیان م، "مقایسه مدل‌های کلاسیک سری زمانی و هوش مصنوعی در تعیین سطح تراز آب زیرزمینی"، ششمین کنگره ملی مهندسی عمران، ۱۳۹۰.

کاراموز م، عراقی نژاد ش، "هیدرولوژی پیشرفته"، چاپ دوم، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ۱۳۸۹، ۴۶۴.

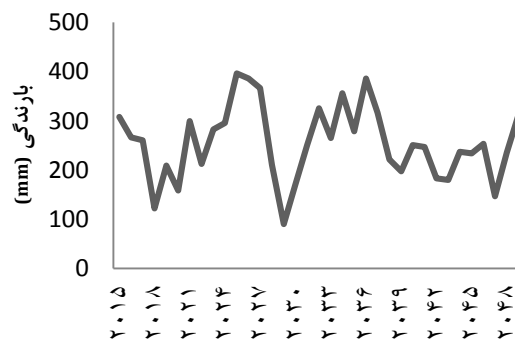
آماري (۲۰۱۵-۲۰۴۹) به صورت نمودارهای (۱۴) تا (۱۶) ارائه می‌شود. نتایج پیش‌بینی بارندگی سالانه با استفاده از مدل تلفیقی در ایستگاه چهریق حداکثر بارش ۵۶۰ و حداقل آن ۲۰۰ میلی‌متر و در ایستگاه کمپ ارومیه محدوده بارش در ۳۵ سال آینده مابین کمینه ۲۶۳ تا بیشینه ۵۵۶ میلی‌متر پیش‌بینی کرده است. در ایستگاه گل‌مانخانه آبشور بارندگی از ۳۹۷ میلی‌متر بالاتر نرفته و کم‌ترین مقدار بارش نیز ۹۰ میلی‌متر پیش‌بینی شده است.



شکل ۱۴- داده‌های تولیدی از مدل تلفیقی ARMA-ARCH در ایستگاه چهریق برای سال‌های (۲۰۱۵-۲۰۴۹)



شکل ۱۵- داده‌های تولیدی در مدل تلفیقی ARMA-ARCH در ایستگاه کمپ ارومیه برای سال‌های (۲۰۱۵-۲۰۴۹)



شکل ۱۶- داده‌های تولیدی در مدل تلفیقی ARMA-ARCH در ایستگاه گل‌مانخانه آبشور برای سال‌های (۲۰۱۵-۲۰۴۹)

- 2001, 22, 555-78.
- Khatibi R, Ghorbani MA, Naghipour L, Jothiprakash V, Fathima TA, Fazelifard MH, "Inter-comparison of time series models of lake levels predicted by several modeling strategies", *Journal of Hydrology*, 2014, 511, 530-545.
- Laux P, Vogl S, Qiu W, Knoche HR, Kunstmann H, "Copula-based statistical refinement of precipitation in RCM simulations over complex terrain", *Journal of Hydrology and Earth System Sciences*, 2011, 15, 2401-2419.
- Pagan A, "The econometrics of financial markets", *Journal of Empirical Finance*, 1996, 3, 15-102.
- Palm F, "GARCH models of volatility", In Rao CR and Maddala GS (eds.) *Handbook of Statistics*, Volume 14. Amsterdam, North-Holland, 1996, 209-240.
- Salas JD, Delleur, JW, Yevjevich V, Lane WL. "Applied Modeling of Hydrologic Time Series", 1988, Water Resource Publication (WPR).
- Salas JD, "Analysis and modeling of hydrological time series" In: *Handbook of Hydrology*, edited by David R, Maidment, McGraw-Hill, New York, US, 1993, 1-19.
- Sangsefidi SJ, Moghadasi R, Yazdani S, Nejad AM, "Forecasting the prices of agricultural products in Iran with ARIMA and ARCH models", *International Journal of Advanced and Applied Sciences*, 2015, 2 (11), 54-57.
- Shephard N, "Statistical aspects of ARCH and stochastic volatility models", In Cox R, Hinkley DV and Barndorff-Nielsen OE (eds.) *Time Series Models in Econometrics, Finance and Other Fields*, Chapman & Hall, London, UK, 1996, 1-67.
- Steel RGD, Torrie JH, "Principles and Procedures of Statistics", McGraw-Hill, New York, US, 1960, 187-287.
- Thomas HA, Fiering MB, "Mathematical Synthesis of Stream Flow Sequences for the Analysis of River Basin by Simulation", Harvard university press, Cambridge, US, 1962, 751p.
- Tol RJS, "Autoregressive conditional heteroscedasticity daily temperature measurements", *Environmetrics*, 1996, 7, 67-75.
- Tsonis AA, "Probing the linearity and nonlinearity in the transitions of the atmospheric circulation", *Nonlinear Processes Geophysics*, 2001, 8, 341-345.
- Wang W, Van Gelder PHAJM, Vrijling JK, "Testing and modeling autoregressive conditional heteroskedasticity of stream flow processes", *Journal of Nonlinear Processes in Geophysics*, 2005, 12, 55-66.
- Weesakul U, Lowanichchai S, "Rainfall forecast for agricultural water allocation planning in Thailand", *Thammasat Int. Journal Sci. Technol.*, 10, 18-27.
- Weiss AA, "ARMA models with ARCH errors", *Journal of Time Series Analysis*, 1984, 5, 129-143.
- Yusoff FNM, Ahmad MH, Osman H, "Modelling and Forecasting Malaysian gold price using Hybrid ANN-GARCH", *International mathematical forum*, 2016, 11 (6), 287-294.
- میرموسوی ح، جلالی م، آبختی گروسی ه، خانقسی ن، "تحلیل الگوهای سری زمانی بارش در ایستگاه هواشناسی خوی"، *فضای جغرافیایی*، ۱۳۹۳، ۴ (۴۷)، ۱-۱۷.
- Andersen TG, Bollerslev T, "ARCH and GARCH models", In: Kotz S, Read CB, Banks DL (eds), *Encyclopedia Statistical Sciences*, Vol. II, John Wiley and Sons, New York, US, DOI: 10.2002/0471-667196.ess0592, pub2. 1998.
- Attah DA, Bankole GM, "Time series analysis model for annual rainfall data in lower kaduna catchment Kaduna, Nigeria", *Global Journal of Researchers in Engineering (Civil and Structure Engineering)*, 2011, 11 (6), 1-6.
- Brockwell PJ, Davis RA, "Introduction Time Series and Forecasting", 2nd ed. Springer-Verlag New York. 2002.
- Bera AK, Higgins ML, "ARCH models: Properties, Estimation and Testing", *Journal of Economic Surveys*, 1993, 7, 305-366.
- Bollerslev T, Engle RF, Nelson DB, "ARCH models", In: Engle RF and McFadden D (eds.), *Handbook of econometrics*, volume IV. Amsterdam, North-Holland, 1994, 2959-3038.
- Bollerslev T, Chou RY, Kroner KF, "ARCH modeling in finance, A selective review of the theory and empirical evidence", *Journal of Econometrics*, 1992, 52, 5-59.
- Box GE, Jenkins GM, "Time series analysis. Forecasting and Control", San Francisco: Holden-Day. 1976.
- Caiado J, "Forecasting water consumption in Spain using univariate time series models", Munich Personal RePEc Archive, MPRA Paper No.6610, posted 7. Online at <http://mpa.ub.uni-muenchen.de/6610/>, 2007.
- Degiannakis S, Xekalaki E, "Autoregressive conditional heteroscedasticity (ARCH) models: A Review", *Quality Technology and Quantitative Management*, 2004, 1, 271-324.
- Diebold FX, Lopez J, "Modeling volatility dynamics", In: Hoover K (ed.), *Macroeconometrics: Developments, Tensions and Prospects*. Boston: Kluwer Academic Press, 1995, 427-472.
- Duffee GR, "Reexamining the relationship between stock returns and stock return volatility", *Federal Reserve Board Finans and Economics Discussion Series*, 1992, No 191.
- Engle RF, "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflations", *Econometrica*, 1982, 50, 987-1007.
- Engle RF, "ARCH: selected readings" Oxford University Press, Oxford, UK, 1995.
- Engle RF, Patton AJ, "What good is a volatility model?", *Quantitative Finance*, 2001, 1, 237-245.
- Hauser MA, Kunst RM, "Fractionally Integrated Models with ARCH Errors: With an Application to the Swiss 1-Month Euromarket Interest Rate", *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 1998, 10, 95-113.
- Karanasos M, "Prediction in ARMA models with GARCH in mean effects", *Journal of Time Series Analysis*,

## EXTENDED ABSTRACT

# Rainfall Forecast by Integrated Model ARMA-ARCH for West of Urmia Lake Catchment basin

Hosein Rezaie <sup>a,\*</sup>, Mahdi Khoshbakht Tizkharab <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Faculty of Agriculture Engineering, University of Urmia, Urmia, Iran

<sup>b</sup> Faculty of Agriculture Engineering, University of Urmia (International Campus), Urmia, Iran

Received: 24 January 2017; Accepted: 09 December 2017

### Keywords:

Forecast, Time series, ARMA linear model, ARCH nonlinear models, ARMA-ARCH integrated model.

## 1. Introduction

Forecasting rainfall situation has paramount importance for water resources engineering. In this field, linear time series models are widely used in hydrology. Models of ARMA family have always had weaknesses which can be solved by integration of ARMA linear time series models with nonlinear time series models such as ARCH. In economy, the sequence of error variance in one model of errors' size in previous time periods is the main assumption for Autoregressive conditional heteroscedastic models (Engle, 1982). At first, models of ARCH family for time series were used in financial and economic problems. In problems related to hydrology, ARCH models have been studied less.

## 2. Methodology

In this research, regarding the situation of rainfall and drought in catchment of Urmia lake and risk of total dryness of this beautiful lake, rainfall was predicted via time series random models and by producing artificial data in three stations (Urmia camp, Chahriq, Golmankhane Abshur) located in west of catchment basin of Urmia lake.

### 2.1. ARMA Models

Numerous statistical models are used to predict climatic variables that autoregressive time series models have been widely used to examine and forecast the hydrology variables from the beginning of 1960s. Markov continuum is the main base for autoregressive time series models. Among time series model, we can refer to the autoregressive model with moving average named ARMA and ARIMA. The relation of autoregressive moving average ARMA ( $p, q$ ) has been presented as follows:

$$Y_t = \sum_{i=1}^p (\varphi_i Y_{t-i}) - \sum_{j=1}^q (\theta_j \varepsilon_{t-j}) + \varepsilon_t \quad (1)$$

In which  $Y_t$  is standard and normal time series,  $p$  is the order of autoregressive model (AR),  $q$  is the order of moving average model (MA),  $\varphi_i$  is the coefficient of autoregressive model,  $\theta_j$  is the coefficient of moving average model and  $\varepsilon_t$  is the random and normal series of model with zero average and  $\sigma_\varepsilon^2$  variance (Salas et al 1988). The excellent ARMA model will have the least amount of Akaike criterion as relation 2 (Salas, 1993):

\* Corresponding Author

E-mail addresses: h.rezair@urmia.ac.ir (Hosein Rezaie), mehdkhoshbakht2015@yahoo.com (Mahdi Khoshbakht tizkharab).

$$AICC = n.Ln(Var_{\varepsilon}) + \frac{2(p+q+1)n}{n-p-q-2} \tag{2}$$

In which n is the number of data,  $Var_{\varepsilon}$  is error variance, p is the order of model in autoregressive section and q is the order of model in moving average section.

### 2.2. ARCH Models

ARCH model is presented as following (Brockwell and Davis):

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} e_t, \{ e_t \} \sim IID N(0,1) \tag{3}$$

In which  $h_t$  is a function (positive) of  $\varepsilon_s, s < t$  is mentioned as following relation:

$$h_t = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 \tag{4}$$

In which,  $\varepsilon_t$  is error phrase or remaining of a model with average zero and variance one,  $h_t$  is conditional variance of  $\varepsilon_t, \alpha_j \geq 0, \alpha_0 \geq 0$  are parameters of model and n is the order of model and  $e_t$  is time series of intended parameter.

The integration process of two models ARMA and ARCH is as following:

- Finding the best model of ARMA
- Extraction of time series remained in the superior model of ARMA by using relation 1
- Fitting ARCH (1) model for standardized remained time series and calculation of  $h_t$  value through ITSM software
- Ultimately, the integration of selected ARMA and ARCH models

### 2.3. Evaluation Criteria of Models

To evaluate the function of ARMA superior model with the integrated model of ARMA-ARCH, different criteria were used including Root Mean Square Error (RMSE), Mean Absolute Error (MAE), Nash Sutcliff Efficiency Coefficient (EF), and Cumulative Remaining Modulus (CRM). The predictions that their RMSE and MAE have the least value possess better performance in modeling. The more close the EF coefficient gets to one, it shows the high accuracy. The proper value for cumulative remaining modulus (CRM) is zero.

## 3. Results and Discussion

The superior model for ARMA family was selected due to lower Akaike criterion in all stations. By considering the results of Akaike test, the best model of ARMA for Chahriq station is ARMA (1,0), for Urmia Camp station is ARMA (0,1) model and for Golmankhane Abshur station is ARMA (1,0) model.

Remaining series equations of ( $\varepsilon_t$ ) model of ARMA model has been extracted according to relation 1 and its results have given in table 1. Then, the remaining series equations of the model were fitted by the ITSM software and ARCH model and the results have been presented in table 1 for studied stations, and the required  $h_t$  values are computable in the ARCH model.

**Table 1.** The resulted equations for ARMA model and ARMA-ARCH model

| station            | $\varepsilon_t$                                 | $h_t$  |
|--------------------|---|--|
| Chahriq            | $\varepsilon_t = Y_t - 0.3905Y_{t-1}$           | $h_t = 0.5579117 + 0.0488868\varepsilon_{t-1}^2$ |
| Urmia Camp         | $\varepsilon_t = Y_t - 0.1631\varepsilon_{t-1}$ | $h_t = 0.7111748 + 0.1935307\varepsilon_{t-1}^2$ |
| Golmankhane Abshur | $\varepsilon_t = Y_t - 0.2769Y_{t-1}$           | $h_t = 0.7787156 + 0.1515773\varepsilon_{t-1}^2$ |

The results of statistical criteria of MAE, RMSE, EF, and CRM have been examined for the ARMA model and also ARCH-ARMA integrated model for all studied stations (Table 2). The results of the RMSE criterion for the ARMA model has changed between 14 to 39 millimeter in all stations, and the least was related to Urmia camp station for the ARMA model and also ARCH-ARMA integrated model. The similar results can be mentioned for MAE criterion such that this criterion in the ARMA model varies between 11.79 and 31.4, but in the ARMA-ARCH model, this criterion shows values between about 11.9 to 30.5. These results indicate the acceptable

accuracy of the ARMA-ARCH integrated model in studied stations than in the ARMA model. It is observed from results in table 2 that all coefficients in the integrated model are good which shows the high compliance and correlation of observational and simulated values. The CRM results illustrate that the integrated model has better performance than the ARMA model.

**Table 2.** Results of statistical comparison criteria in ARMA selected models and ARMA-ARCH models

| station            | ARMA  |       |      | CRM     | ARCH-ARMA |       |      | CRM     |
|--------------------|-------|-------|------|---------|-----------|-------|------|---------|
|                    | RMSE  | MAE   | EF   |         | RMSE      | MAE   | EF   |         |
| Chahriq            | 39.14 | 31.37 | 0.85 | -0.0062 | 37.98     | 30.54 | 0.86 | -0.0028 |
| Urmia Camp         | 14.26 | 11.72 | 0.97 | -0.0064 | 13.94     | 11.86 | 0.98 | -0.0023 |
| Golmankhane Abshur | 19.08 | 15.07 | 0.92 | -0.0012 | 18.73     | 15.67 | 0.92 | -0.0019 |

According to results obtained in this research, rainfall prediction for the statistical period of 2015-2049 was carried out by using ARMA-ARCH integrated model for all three studied models. The results of annual rainfall prediction by using the integrated model for Chahrigh station indicates the maximum rain as 560 millimeters and the minimum rain as 200 millimeters, and in Urmia camp station, rain range will be between minimum 263 millimeters and maximum 556 millimeters in next 35 years. For Golmankhane Abshur station, rainfall will not exceed 397 millimeters and the minimum rainfall is forecasted as 90 millimeters. The simulation results represent that the area in which Golmankhane Abshur station have located will possess less annual rainfall in the future.

#### 4. Conclusion

The results of two model (ARMA and integrated model) in this research for all studied stations showed that combination of linear and nonlinear models is good for prediction (modeling) of rainfall and drought and it can play a significant role in planning of water resource management. Integration of time series models with nonlinear models like ARCH, GARCH can be helpful.

#### 5. References

- Brockwell PJ, Davis RA, "Introduction Time Series and Forecasting", 2nd ed. Springer-Verlag New York. 2002.
- Engle RF, "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflations", *Econometrica*, 1982, 50: 987-1007.
- Salas JD, Delleur, JW, Yevjevich V, Lane WL. "Applied Modeling of Hydrologic Time Series", 1988, Water Resource Publication (WPR).
- Salas JD, "Analysis and modeling of hydrological time series" In: *Handbook of Hydrology*, edited by David R, Maidment, McGraw-Hill, New York. 1993, 1-19.