

توسعه یک روش نیمه تحلیلی جدید برای حل مسائل الاستودینامیک در حوزه فرکانس

رضا بابایی^۱، احسان جباری^{۲*} و محسن خسروی بابادی^۳

^۱ دانشجوی دوره دکتری، دانشکده مهندسی، دانشگاه قم

^۲ استادیار دانشکده مهندسی، دانشگاه قم

^۳ دکتری، سازمان صنایع دریایی ایران

(دریافت: ۹۶/۱/۶، پذیرش: ۱۳۹۸/۴/۲۳، نشر آنلاین: ۱۳۹۸/۴/۲۳)

چکیده

هدف پژوهش حاضر، توسعه یک روش نیمه تحلیلی جدید به منظور آنالیز دینامیکی سدهای بتنی وزنی می باشد. در این روش، ماتریس های ضرایب دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم با استفاده از چند جمله ای های مرتبه بالای لاگرانژ (توابع نگاشت)، توابع شکل ویژه، روش انتگرال گیری عددی گوس-لوباتو-لوژاندر (Gauss-Lobatto-Legendre) و روند تولید فرم انتگرالی با استفاده از روش باقی مانده های وزن دار، به صورت قطری استخراج می شود. این امر و نیز گسسته سازی مسئله با یک بعد کم تر از فضای اصلی، باعث کاهش قابل توجه حجم محاسبات نسبت به سایر روش ها می شود. در این پژوهش برای اولین بار به کمک ابزارهای مذکور، معادله حاکم بر مسائل الاستودینامیک (Elastodynamic) با تحریک پایه (بار زلزله) در حوزه فرکانس با انتقال به فضای محلی استخراج و روند حل آن بیان شد. همچنین به منظور سنجیدن توانایی و دقت روش حاضر در حل این دسته از مسائل، دو سد وزنی بتنی با مخزن خالی تحت تحریک هارمونیک پایه آنالیز گردید. مقایسه نتایج این روش با سایر روش ها نشان می دهد که روش حاضر دارای دقتی بالا توأم با استفاده از حداقل درجات آزادی غیر درگیر برای آنالیز دینامیکی مسائل بزرگ مقیاس همچون سدها می باشد.

کلیدواژه ها: مسائل الاستودینامیک، ماتریس ضرایب قطری، سد بتنی وزنی، حوزه فرکانس.

۱- مقدمه

در این روش فقط مرزهای مسئله نیاز به گسسته سازی دارد و برخلاف روش المان مرزی، نیاز به حل اساسی نیست (Yang و همکاران، ۲۰۰۷ و ۲۰۱۱).

ماتریس ضرایب دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم در هر سه روش مذکور پر است و این امر هزینه محاسباتی را افزایش می دهد. برای اجتناب از چنین مشکلی، خاجی و همکاران (۲۰۱۱) روش SBFEM^۴ را توسعه داده و یک روش نیمه تحلیلی با ماتریس ضرایب قطری معرفی کردند. این روش برای حل مسائل پتانسیل (Khaji و Khodakarami، ۲۰۱۱)، مسائل الاستواستاتیک^۵ دو و سه بعدی (Khaji و Khodakarami، ۲۰۱۱ و ۲۰۱۲)، مسائل الاستودینامیک (Khaji و Khodakarami، ۲۰۱۲) و فشار هیدرو دینامیک مخازن سدهای بتنی وزنی (بابایی و همکاران، ۱۳۹۲ و ۱۳۹۴)، تفرق امواج

تاکنون محققان روش های عددی زیادی را برای حل مسائل الاستودینامیک^۱ به کار در حوزه زمان و فرکانس به کار برده اند و هدف بسیاری از آن ها دستیابی به روش هایی بوده است که با کم ترین هزینه محاسباتی، دقیق ترین پاسخ ها را به دست آورد. روش المان محدود^۲ دارای قابلیت های خوبی در حل این دسته از مسائل می باشد (Mossaiiby و Boroomand، ۲۰۰۶ و Loureiro و Mansur، ۲۰۰۹). روش المان مرزی^۳ مسئله را با یک بعد کم تر از فضای اصلی حل می کند ولی نیاز به حل اساسی^۴ دارد (Javaran و همکاران، ۲۰۱۱ و Xiao و همکاران، ۲۰۱۲). روش المان مرزی-محدود مقیاس شده^۵ مزایای روش المان های محدود و المان های مرزی را ترکیب می کند و یک روش نیمه تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر مسائل الاستودینامیک به حساب می آید.

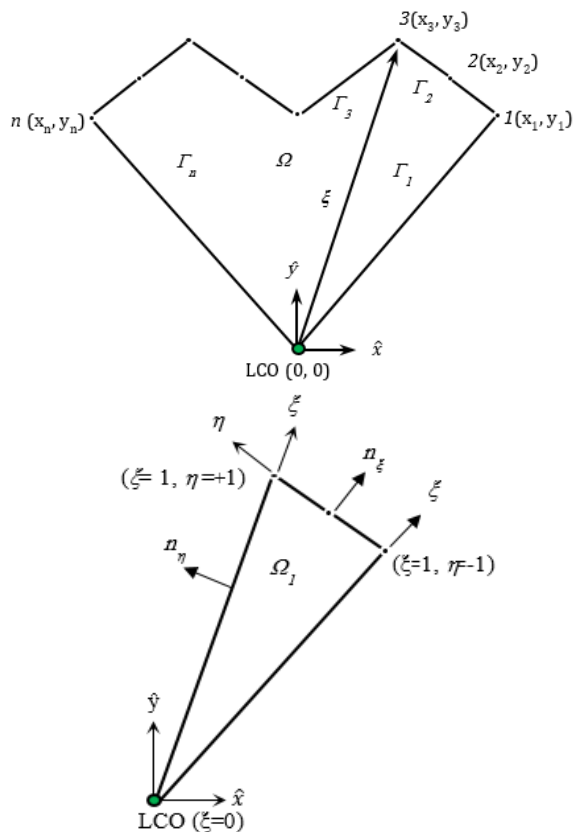
4. Fundamental solution
5. Scaled boundary finite element method (SBFEM)
6. Scaled boundary finite element method
7. Elastostatic

1. Elastodynamic
2. Finite Element Method (FEM)
3. Boundary Element Method (BEM)

* نویسنده مسئول؛ شماره تماس: ۰۲۵-۳۲۱۰۳۵۱۵

و در آن فرکانس دورانی است. روش حاضر بر مبنای استفاده از فرم انتگرالی معادله حاکم است لذا با استفاده از روش باقی-مانده‌های وزن دار با ضرب نمودن طرفین این رابطه در بردار تغییر مکان دلخواه w و انتگرال گیری از آن داریم:

$$\int_{\Omega} w \hat{\sigma}_{ij,j} d\Omega + \int_{\Omega} w \omega^2 \hat{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} w p \omega^2 \hat{u}_g d\Omega = 0 \quad (۶)$$



شکل ۱- فضای Ω با شرایط مرزی دلخواه در دستگاه مختصات کلی و محل LCO

۳- مدل سازی مسئله در فضای محلی

به منظور مدل سازی هندسه و فیزیک مسئله، ابتدا یک نقطه به عنوان مرجع مختصات محلی (Local Coordinates Origin یا LCO) انتخاب و تمام خصوصیات هندسی و فیزیکی مسئله نسبت به این نقطه ارزیابی می گردد. در این روش، مرزهای مسئله با استفاده از المان هایی با یک بعد کم تر از بعد فضای مسئله گسسته سازی می شود. در شکل (۱) نحوه مدل سازی هندسه مسائل دوبعدی در مختصات اصلی و محلی LCO آمده است. با توجه به محورهای محلی، مرزهای مسئله به دو دسته تقسیم می گردند: مرزهایی که امتداد آن ها از LCO می گذرد و مرزهایی که نمی گذرد. واضح است که فقط باید مرزهای نوع دوم را گسسته سازی نمود. مختصات هر نقطه درون دامنه در مختصات

(Khaji و Moghadaszadeh, ۲۰۱۵) و مکانیک شکست (Khaji و Yazdani, ۲۰۱۵) با موفقیت توسعه داده شد.

Khodakarami (۲۰۱۵) به منظور توسعه و افزایش دقت این روش از توابع نگاشت و روش انتگرال گیری متفاوتی استفاده نمود و مسائل الاستودینامیک را در حوزه زمان حل کرد (Fakharian و Khodakarami, ۲۰۱۵). هدف از این مقاله توسعه روش مذکور برای استخراج و حل معادلات حاکم بر مسائل الاستودینامیک تحت تحریک پایه یا بار زلزله در حوزه فرکانس است. به علت پایین بودن هزینه محاسبات در روش حاضر، توسعه آن در آنالیز پدیده های فیزیکی غول آسا قابل توجه است لذا در این پژوهش به منظور صحت سنجی، دو سد بتنی وزنی با مخزن خالی آنالیز خواهد شد.

۲- معادلات حاکم در دستگاه مختصات کلی

معادله حرکت حاکم بر الاستودینامیک دوبعدی با تحریک پایه در دستگاه مختصات اصلی، در فضای دلخواه Ω (شکل (۱)) به صورت زیر بیان می گردد:

$$\sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad (۱)$$

$$\ddot{u}_i = \ddot{u}_i + \ddot{u}_g \quad (۲)$$

که در این رابطه، $\sigma_{ij,j}$ بیان گر اجزای تانسور تنش دوبعدی است. همچنین \ddot{u}_i و \ddot{u}_g به ترتیب شتاب کلی، شتاب هارمونیک پایه و شتاب نسبی سازه می باشند. لازم به تذکر است که در حالت دوبعدی مسائل الاستودینامیک، $i = X, Y$ و $j = X, Y$ می باشند و ρ هم جرم مخصوص است. به منظور تحلیل در حوزه فرکانس، حرکت هارمونیک در نظر گرفته می شود؛ بنابراین رابطه بین جابه جایی در حوزه زمان $u_i(t)$ و جابه جایی در حوزه فرکانس $\hat{u}_i(\omega)$ به صورت زیر بیان می گردد:

$$u_i(t) = \hat{u}_i(\omega) \exp(I\omega t) \quad (۳)$$

به طور مشابه می توان نوشت:

$$\sigma_{ij,j}(t) = \hat{\sigma}_{ij,j}(\omega) \exp(I\omega t) \quad (۴)$$

که در آن و $\hat{u}_i(\omega)$ دامنه جابه جایی است. بنابراین معادله حاکم بر مسائل الاستودینامیک با تحریک هارمونیک پایه در حوزه فرکانس به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{\sigma}_{ij,j} + \rho \omega^2 \hat{u}_i + \rho \omega^2 \hat{u}_g = 0 \quad (۵)$$

رابطه بین جزء سطح المان در مختصات کلی ($d\hat{x}d\hat{y}$) و مختصات محلی ($d\xi d\eta$) نیز به صورت زیر است:

$$d\Omega = d\hat{x}d\hat{y} = \xi |J(\eta)| d\xi d\eta \quad (12)$$

و در آن $J(\eta)$ ، ماتریس ژاکوبی انتقال بر روی مرزها می باشد:

$$J(\eta) = \begin{bmatrix} x(\eta) & y(\eta) \\ x_{,\eta}(\eta) & y_{,\eta}(\eta) \end{bmatrix} \quad (13)$$

برای رابطه بین مشتقها در دو دستگاه مختصات کلی و محلی، داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} & 0 & \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \end{bmatrix}^T = [b^1(\eta)] \frac{\partial}{\partial \xi} + [b^2(\eta)] \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (14)$$

که در آن:

$$[b^1(\eta)] = \frac{1}{|J(\eta)|} \begin{bmatrix} y(\eta)_{,\eta} & 0 \\ 0 & -x(\eta)_{,\eta} \\ -x(\eta)_{,\eta} & y(\eta)_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[b^2(\eta)] = \frac{1}{|J(\eta)|} \begin{bmatrix} -y(\eta) & 0 \\ 0 & x(\eta) \\ x(\eta) & -y(\eta) \end{bmatrix} \quad (16)$$

به منظور محاسبه ترکشن^{۱۱} در هر امتداد، نیاز به دانستن بردار نرمال در آن امتداد می باشد؛ بردار نرمال عمود بر سطح در مرزهای مسئله در دو امتداد ξ و η به صورت زیر تعریف می گردند:

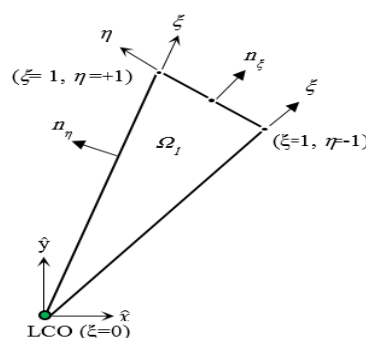
$$[n^\xi(\eta)] = \frac{1}{\left\| \begin{bmatrix} y_{,\eta}(\eta) \\ -x_{,\eta}(\eta) \end{bmatrix} \right\|} \begin{bmatrix} y_{,\eta}(\eta) & 0 \\ 0 & -x_{,\eta}(\eta) \\ -x_{,\eta}(\eta) & y_{,\eta}(\eta) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$[n^\eta(\eta)] = \frac{1}{\left\| \begin{bmatrix} -y(\eta) \\ x(\eta) \end{bmatrix} \right\|} \begin{bmatrix} -y(\eta) & 0 \\ 0 & x(\eta) \\ x(\eta) & -y(\eta) \end{bmatrix} \quad (18)$$

۳-۲- مدل سازی فیزیکی مسائل

برای مدل سازی فیزیک مسئله از توابع شکل^{۱۲} با ویژگی های خاصی استفاده می گردد که در حالت کلی با $[N]$ نشان داده می شوند و یکی از عوامل مهم در قطری سازی ماتریس های ضرایب است. درونیابی خواص فیزیکی مسئله بر روی مرزها با استفاده از این توابع شکل انجام می گیرد که دارای دو ویژگی مهم هستند:

کلی با (\hat{x}, \hat{y}) و هر نقطه از مرزها نیز با (x, y) تعیین می گردد. همان طور که در شکل (۲) می بینید، در دستگاه مختصات محلی از دو محور با نام های ξ و η استفاده می گردد؛ محور ξ معرف محور شعاعی است که از محل LCO شروع و تا روی مرزها ادامه می یابد. محور η نیز محوری مماسی است که فقط بر روی مرزها تعریف می شود. محدوده تغییرات محور مماسی بین -۱ تا +۱ است اما تغییرات محور شعاعی برای مسائل محدود بین صفر (در LCO) و یک (روی مرزها) می باشد و برای مسائل نیم نامحدود بین یک تا بی نهایت است.



شکل ۲- زیر حوزه Ω_i در دستگاه مختصات محلی و محل LCO

۳-۱- مدل سازی هندسه

برای انتقال هندسه از مختصات کلی به مختصات محلی، از توابع نگاشت^۸ که از نوع چندجمله ای های مرتبه بالای لاگرانژ^۹ می باشند، به شکل زیر استفاده می گردد (Canuto, ۲۰۱۲):

$$\varphi_i(\eta) = \prod_{k=1, k \neq i}^{n_\eta+1} \frac{\eta - \eta_k}{\eta_i - \eta_k} \quad (7)$$

توابع نگاشت پیشنهادی دارای خاصیت دلتای کرونیگر^{۱۰} در هر یک از نقاط کنترل (نقاط گرهی) می باشند. مختصات هر نقطه از مسئله با استفاده از این توابع به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{x}(\xi, \eta) = \xi x(\eta) = \xi [\Phi(\eta)]\{x\} \quad (8)$$

$$\hat{y}(\xi, \eta) = \xi y(\eta) = \xi [\Phi(\eta)]\{y\} \quad (9)$$

با قرار دادن $\xi=1$ در این روابط، مختصات هر نقطه روی مرز مسئله به دست می آید، یعنی:

$$x(\eta) = [\Phi(\eta)]\{x\} \quad (10)$$

$$y(\eta) = [\Phi(\eta)]\{y\} \quad (11)$$

11. Traction
12. Shape function

8. Mapping functions
9. Lagrange polynomials
10. Kronecker delta

از طرفی با توجه به این که مشتق نخست توابع شکل در نقاط گرهی برابر با صفر می باشد، ترم دوم در رابطه محاسبه مقدار کرنش در نقاط گرهی، برابر صفر است. همچنین با استفاده از قانون هوک^{۱۴}، در مورد مؤلفه های تنش در هر نقطه به مختصات (ξ, η) می توان گفت:

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = [D] \begin{Bmatrix} [b^1(\eta)][N(\eta)]\{u(\xi)\}_{,\xi} \\ + [b^2(\eta)][N(\eta)]_{,\eta}\{u(\xi)\} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

که در این رابطه $[D]$ ، بیان گر ماتریس مدول الاستیسیته^{۱۵} است.

۴- دستگاه معادلات حاکم در فضای محلی

دستگاه معادلات حاکم با استفاده از فرم انتگرالی معادله حاکم بر اساس روش باقی مانده های وزن دار، توابع شکل و نگاشت بیان شده در بخش (۳) به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} & \xi [D^0] \{\hat{u}(\xi, \omega)\}_{,\xi\xi\xi} + [D^1] \{\hat{u}(\xi, \omega)\}_{,\xi} \\ & + \omega^2 \xi [M] \{\hat{u}(\xi, \omega)\} + \xi \{\hat{F}^b(\omega)\} = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

که در آن ماتریس های ضرایب و بردار موجود به صورت:

$$[D^0] = \int_{-1}^{+1} [B^1(\eta)]^T [D] [B^1(\eta)] J(\eta) d\eta \quad (30)$$

$$[D^1] = \int_{-1}^{+1} [B^1(\eta)]_{,\eta}^T [D] [B^2(\eta)] J(\eta) d\eta \quad (31)$$

$$[M] = \int_{-1}^{+1} [N(\eta)]^T \rho [N(\eta)] J(\eta) d\eta \quad (32)$$

$$\{\hat{F}^b(\omega)\} = \int_{-1}^{+1} [N(\eta)]^T \rho \omega^2 \{\hat{u}_g\} J(\eta) d\eta \quad (33)$$

هستند و $\hat{F}^b(\omega) = [\hat{F}_x^b(\omega) \quad \hat{F}_y^b(\omega)]^T$ بردار نیروی حجمی گرهی ناشی از تحریک پایه در نقاط کنترل روی مرزها در فرکانس ω است. در واقع این نیرو سهم هر نقطه کنترل از کل نیروی اینرسی به وجود آمده در فضای مسئله در اثر تحریک پایه است و به طور مستقیم از رابطه (۳۳) محاسبه می شود. با توجه به این که ماتریس های ضرایب $[D^0]$ ، $[D^1]$ و $[M]$ مستقل از ξ هستند؛ این ضرایب برای هر المان تعریف می شوند و با انتگرال گیری روی مرزها به دست می آیند. برای این کار باید از یک روش انتگرال گیری عددی استفاده نمود. انتگرال های فوق با به کار بردن روش انتگرال گیری Gauss-Lobatto- Legendre مطابق رابطه زیر محاسبه می گردند (Canuto و همکاران، ۲۰۱۲):

یکی این که دارای خاصیت دلتای کرونیگر در نقاط گرهی المانها می باشند و دیگری این که مشتق اول آنها نسبت به محورهای محلی مماسی در تمام گرهها برابر صفر است. یعنی:

$$N_{\alpha}(\eta_{\beta}) = \delta_{\alpha\beta} \quad (19)$$

$$N_{\alpha,\eta}(\eta_{\beta}) = 0 \quad (20)$$

این توابع برای یک المان $n_{\eta} + 1$ گرهی، یک چند جمله ای از مرتبه $2n_{\eta} + 1$ به صورت رابطه (۲۱) است که دارای $2n_{\eta}$ پارامتر مجهول است، و این پارامترها با استفاده از ویژگی های بیان شده، تعیین می گردند.

$$N_i(\eta) = \sum_{m=0}^{2n_{\eta}+1} a_m \eta^m \quad (21)$$

در مسائل الاستودینامیک، تابع هدف (φ) در هر نقطه (ξ, η) از فضای مسئله با درون یابی مقادیر گرهی آن و با استفاده از تابع شکل $N(\eta)$ به صورت رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\{\varphi(\xi, \eta)\} = [N(\eta)]\{\varphi(\xi)\} \quad (22)$$

در صورتی که $u(\xi, t)$ جابه جایی در حوزه زمان و تبدیل فوریه^{۱۳} آن $\hat{u}(\xi, \omega)$ جابه جایی در حوزه فرکانس باشد؛ با اعمال توابع شکل، جابه جایی در هر نقطه (ξ, η) و به ازای فرکانس مشخص ω از رابطه زیر به دست می آید:

$$\{\hat{u}(\xi, \eta, \omega)\} = [N(\eta)]\{\hat{u}(\xi, \omega)\} = [N(\eta)] [\hat{u}_x(\xi, \omega) \quad \hat{u}_y(\xi, \omega)]^T \quad (23)$$

با استفاده از روابط (۱۴) و (۲۳)، مؤلفه های کرنش در نقطه (ξ, η) در فضای مسئله به صورت زیر بیان می گردند:

$$\begin{aligned} \{\hat{\epsilon}(\xi, \eta, \omega)\} &= [\hat{\epsilon}_x(\xi, \eta, \omega) \quad \hat{\epsilon}_y(\xi, \eta, \omega) \quad \hat{\gamma}_{xy}(\xi, \eta, \omega)]^T \\ &= [B^1(\eta)]\{\hat{u}(\xi, \omega)\}_{,\xi} + \frac{1}{\xi} [B^2(\eta)]\{\hat{u}(\xi, \omega)\} \end{aligned} \quad (24)$$

که در آن:

$$[B^1(\eta)] = [b^1(\eta)] [N(\eta)] \quad (25)$$

$$[B^2(\eta)] = [b^2(\eta)] [N(\eta)] \quad (26)$$

همچنین مشتق اول B^1 نسبت به محور مماسی به صورت زیر به دست می آید:

$$[B^1(\eta)]_{,\eta} = [b^1(\eta)]_{,\eta} [N(\eta)] \quad (27)$$

$$\hat{u}_{ci} = A_i \zeta \left[\begin{matrix} 1 - \frac{D_{ii}^1}{D_{ii}^0} \\ \frac{D_{ii}^1}{D_{ii}^0} \end{matrix} \right] J \left[\begin{matrix} \frac{D_{ii}^1}{D_{ii}^0} \\ \frac{D_{ii}^1}{D_{ii}^0} \end{matrix} \right] \left[\left(\frac{\omega^2 M_{ii}}{D_{ii}^0} \right)^{0.5} \zeta \right] \quad (40)$$

$$+ B_i \zeta \left[\begin{matrix} 1 - \frac{D_{ii}^1}{D_{ii}^0} \\ \frac{D_{ii}^1}{D_{ii}^0} \end{matrix} \right] Y \left[\begin{matrix} \frac{D_{ii}^1}{D_{ii}^0} \\ \frac{D_{ii}^1}{D_{ii}^0} \end{matrix} \right] \left[\left(\frac{\omega^2 M_{ii}}{D_{ii}^0} \right)^{0.5} \zeta \right] \quad (41)$$

$$\hat{u}_{pi} = \frac{-1}{\omega^2 M_{ii}} \hat{F}_i^b \quad (41)$$

واضح است که جواب نهایی از مجموع جواب‌های عمومی و خصوصی به دست می‌آید. یعنی:

$$\hat{u}_i = \hat{u}_{ci} + \hat{u}_{pi} \quad (42)$$

۶- روند حل مسائل

روش کار به منظور تعیین پاسخ در هر نقطه دلخواه به این ترتیب است که ابتدا باید ماتریس ضرایب تمامی درجات آزادی محاسبه گردند و سپس معادله دیفرانسیل حاکم مرتبط با درجات آزادی که تحت بارگذاری قرار دارند با اعمال شرایط مرزی مربوطه حل شوند و تابع تغییر مکان مرتبط با آن درجات آزادی و در امتداد مختصات شعاعی ξ تعیین گردد و سپس با استفاده از روابط ارائه شده، مؤلفه‌های توزیع تنش در امتداد محور ξ مرتبط با این درجات آزادی تعیین گردد و در نهایت، با استفاده از برقراری تعادل، مؤلفه‌های تنش‌های داخلی در محل LCO و برای هر درجه آزادی (σ_{LCOi}) محاسبه خواهد شد.

با توجه به این که نقطه مشترک تمام گره‌ها، نقطه LCO است و از نقطه نظر تغییر مکان، این نقطه دارای مؤلفه‌های تغییر مکان یکسان برای تمام گره‌ها است، بنابراین، می‌توان تصور نمود که تعدادی فنر با سختی‌های مشخص در نقطه LCO به صورت موازی به هم متصل شده‌اند و سر دیگر این فنرها به گره‌های روی مرز مسئله متصل است؛ به عبارت دیگر، مقدار تنش داخلی در نقطه LCO برابر با مجموع تنش‌های رسیده به این نقطه از طرف تمام درجات آزادی که تحت بارگذاری قرار دارند می‌باشد، یعنی:

$$\{\sigma_{LCO} (\xi = 0)\} = \sum_{i=1}^n \{\sigma_{LCOi}\} \quad (43)$$

که در آن، n تعداد کل درجات آزادی است. پس، می‌توان گفت مقدار تنشی که از رابطه فوق به هر یک از این فنرها می‌رسد، برابر با نسبت سختی آن فنر به سختی گره می‌باشد، که به این ترتیب

$$w_i = \frac{2}{n(n+1)[(n_\eta)(n_i)]^2} \quad (34)$$

با استفاده از این روش و توابع شکل ویژه معرفی شده، ماتریس‌ها و بردار ضرایب مذکور به شکل زیر قطری می‌گردند:

$$D_{ij}^0 = 2\delta_{ij} w_i [B^1(\eta_i)]^T [D][B^1(\eta_i)] |J(\eta_i)| \quad (35)$$

$$D_{ij}^1 = 2\delta_{ij} w_i [B^1(\eta_i)]_\eta^T [D][B^2(\eta_i)] |J(\eta_i)| \quad (36)$$

$$M_{ij} = 2\delta_{ij} w_i [N(\eta_i)]^T \rho [N(\eta_i)] |J(\eta_i)| \quad (37)$$

$$\hat{F}_i^b(\omega)_i = 2\delta_{ij} w_i [N(\eta_i)]^T \rho \omega^2 \{\hat{u}_g\} |J(\eta_i)| \quad (38)$$

در رابطه‌های فوق، δ_{ij} دلتای کرونیکر است. بنابراین دستگاه معادلات درگیر رابطه (۲۹) را می‌توان به صورت غیر درگیر به ازای هر درجه آزادی i به شکل زیر نوشت:

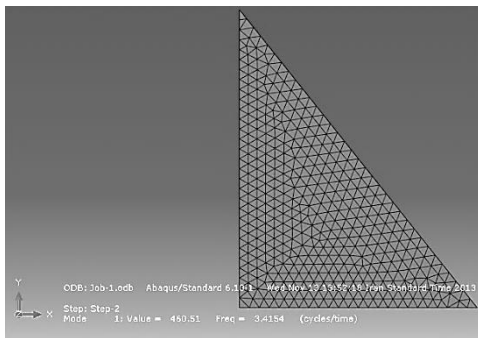
$$\begin{matrix} \zeta \\ \zeta \end{matrix} \begin{bmatrix} D_{11x}^0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D_{11y}^0 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & D_{mxx}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & D_{mny}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_{1x} \\ \hat{u}_{1y} \\ \vdots \\ \hat{u}_{nx} \\ \hat{u}_{ny} \end{Bmatrix}_{,\zeta} + \begin{bmatrix} D_{11x}^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D_{11y}^1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & D_{mxx}^1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & D_{mny}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_{1x} \\ \hat{u}_{1y} \\ \vdots \\ \hat{u}_{nx} \\ \hat{u}_{ny} \end{Bmatrix}_{,\xi} + \omega^2 \zeta \begin{bmatrix} M_{11x} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M_{11y} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & M_{mxx} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & M_{mny} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_{1x} \\ \hat{u}_{1y} \\ \vdots \\ \hat{u}_{nx} \\ \hat{u}_{ny} \end{Bmatrix} + \zeta \begin{Bmatrix} \hat{F}_{1x}^b \\ \hat{F}_{1y}^b \\ \vdots \\ \hat{F}_{nx}^b \\ \hat{F}_{ny}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (39)$$

برای محاسبه تغییر مکان و تنش در هر درجه آزادی کفایت که معادله دیفرانسیل متناظر با نقطه کنترل مرتبط با آن حل گردد.

۵- حل معادلات حاکم غیر درگیر برای هر درجه آزادی

معادله دیفرانسیل حاکم بر هر درجه آزادی از نوع بسط غیرهمگن است که دارای یک جواب عمومی و یک جواب خصوصی مطابق روابط (۴۰) و (۴۱) می‌باشد. که در آن $Y(\alpha)$ و $J(\alpha)$ به ترتیب توابع بسط نوع اول و دوم از مرتبه V می‌باشند. A و B هم ضرایب ثابتی هستند که از اعمال شرایط مرزی به دست می‌آیند.

برای حل این مسئله از ۲۰ المان سه گرهی واقع بر وجه بالادست سد استفاده شده است. محل LCO و نحوه گسسته‌سازی مرزهای مسئله به صورت شماتیک در شکل (۴) نمایش داده شده است. انتخاب پنجه سد به عنوان محل LCO باعث می‌شود که فقط مرز بالادست سد المان‌بندی شود، این امر علاوه بر اینکه تعداد درجات آزادی سد را به حداقل می‌رساند، مهم‌ترین مرز سد را نیز برای اندرکنش با مخزن مهیا می‌کند. همچنین اعمال بار زلزله بر سد از شرط $\xi=0$ امکان‌پذیر است بنابراین بهترین محل LCO برای این هندسه خاص، پنجه سد می‌باشد.

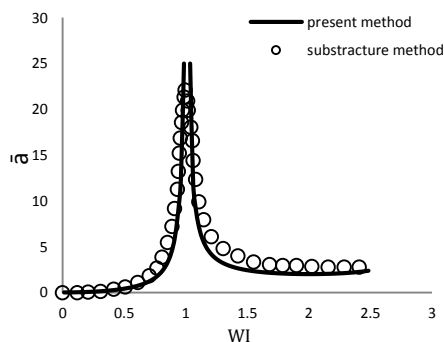


شکل ۵- محاسبه فرکانس طبیعی سد مثال ۱ با نرم‌افزار Abaqus

هم‌چنین فرکانس طبیعی سد (ω_1) از تحلیل مودال آن با استفاده از روش المان محدود در محیط نرم‌افزار Abaqus، ۳/۴۱۵۴ هرتز محاسبه شده است (شکل (۵)). بارگذاری این سد عبارت است از شتاب هارمونیک افقی پایه (\bar{a}_g) با دامنه واحد و فرکانس ω ، یعنی:

$$\bar{a}_g = a_g e^{i\omega t}; \quad a_g = 1 \quad (44)$$

دامنه شتاب افقی تاج سد (\bar{a}) برحسب نسبت فرکانسی $WI = \frac{\omega}{\omega_1}$ در شکل (۶) ارائه شده و هم‌چنین به منظور صحت‌سنجی با پاسخ‌های (Lin و همکاران، ۲۰۱۲) مقایسه گردیده است.

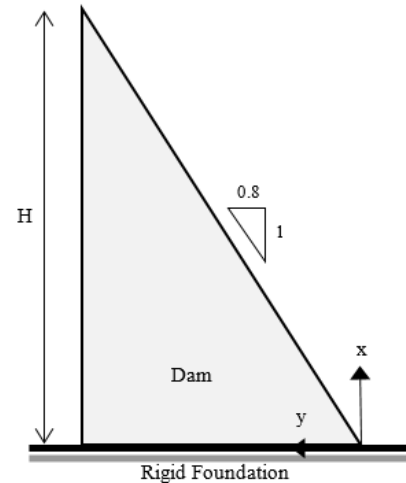


شکل ۶- تغییرات دامنه شتاب افقی تاج سد در مثال ۱

می‌توان سهم تنش معادل در محل LCO را برای هر درجه آزادی محاسبه نمود و در نهایت کافی است، معادله حاکم بر مسئله با در نظر گرفتن این تنش حل گردد.

۷- مثال عددی

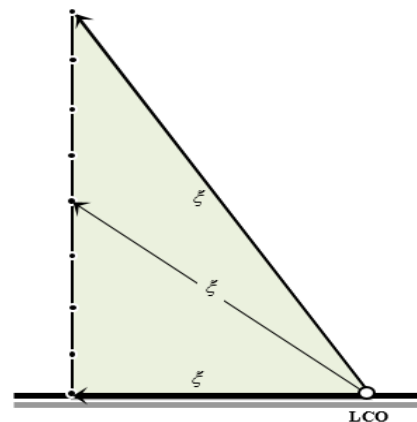
به منظور سنجش توانایی روش حاضر، آنالیز دو سد وزنی بتنی بدون آب با پی صلب تحت بار هارمونیک زلزله ارائه می‌شود.



شکل ۳- هندسه مثال اول در مختصات کلی

۷-۱- مثال ۱

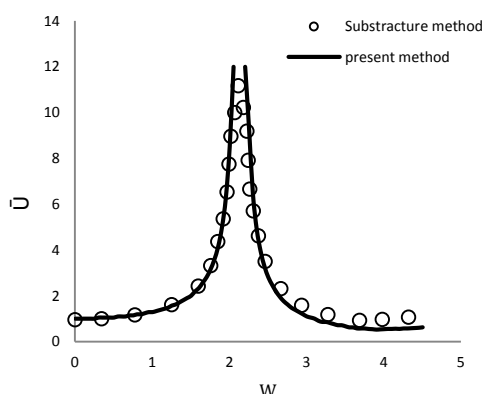
در این مثال یک سد بتنی وزنی مثلثی شکل مطابق شکل (۳) با بالادست قائم و شیب پایین دست ۰/۸:۱ انتخاب شده است. این سد همگن با رفتار مصالح خطی می‌باشد که ارتفاع (H) آن برابر ۴۰۰ فوت، ضریب پواسون ν برابر ۰/۲، وزن واحد جرم (ρ) برابر ۱۵۵ پوند بر فوت مکعب و مدول یانگ آن (E) برابر ۴ میلیون پوند بر اینچ مربع است.



شکل ۴- مش‌بندی مرزهای مثال ۱ در مختصات محلی و مکان LCO

۲-۷-۲ مثال ۲

با پاسخ‌های (Tsai و همکاران، ۱۹۹۲) مقایسه گردیده است.



شکل ۹- دامنه جابه‌جایی افقی تاج سد مثال ۲ نسبت به جابه‌جایی استاتیکی

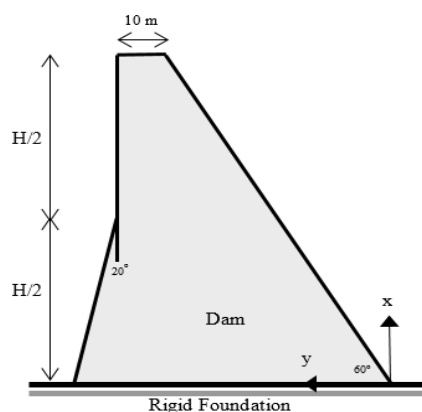
۸- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، برای اولین بار، یک روش نیمه‌تحلیلی جدید به‌منظور آنالیز دینامیکی سدهای بتنی وزنی در حوزه فرکانس توسعه داده شد. در این روش فقط مرزهای مسئله با استفاده از المان‌های جدید ایزوپارامتریک^{۱۸} تحت توابع جدید نگاشت و توابع شکل ویژه با دو خاصیت دلتای کرونیگر و صفر بودن مشتق در نقاط گره‌ای، گسسته‌سازی می‌شود و با اعمال روش انتگرال‌گیری گوس-لوباتو-لوژاندر بر فرم ضعیف (فرم انتگرالی به روش باقی‌مانده وزن‌دار) معادلات حاکم در فضای محلی، ماتریس ضرایب دستگاه معادلات حاکم قطری می‌شود. این امر باعث کاهش چشم‌گیر حجم محاسبات نسبت به سایر روش‌ها می‌گردد.

در این پژوهش با استفاده از چهار ابزار روش حاضر، معادله حاکم بر مسائل الاستودینامیک در حوزه فرکانس در فضای محلی استخراج گردید و نحوه اعمال مستقیم بار زلزله در حل مسئله بیان شد. لازم به ذکر است که در محل LCO می‌بایست یک شرط یا مقدار تنش معلوم باشد و از آنجا، همه مرزهای مسئله قابل‌رؤیت باشند تا امکان اعمال همه شرایط مرزی فراهم شود.

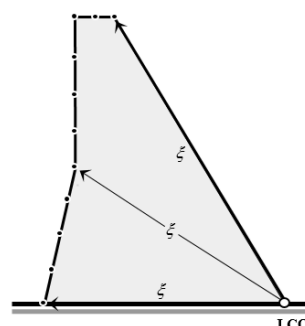
طبق یافته‌های این پژوهش بهترین مکان برای LCO در آنالیز لرزه‌ای سدهای بتنی وزنی با پی صلب، پنجه سد است. به‌منظور ارزیابی توانایی و دقت این روش در زمینه مذکور، دو سد با مخزن خالی تحت ارتعاش هارمونیک افقی زمین آنالیز گردید و محاسبه پاسخ تاج سد در مقایسه با سایر روش‌ها نشان داد که روش حاضر از توانایی و دقت بالایی برخوردار است درحالی‌که از تعداد کمی درجه آزادی مجزا برای حل چنین میدان وسیعی استفاده کرده است. لازم به ذکر است که این روش برای شبیه‌سازی واقعی‌تر رفتار بدنه سدها با در نظر گرفتن اثرات اندرکنش پی، مخزن و

در این مثال برای سنجیدن توانایی روش حاضر در مدل‌سازی مسائل با هندسه پیچیده‌تر از یک سد وزنی با دیواره بالادست شیب‌دار استفاده می‌شود (شکل (۷)). این سد همگن با رفتار مصالح خطی است که ارتفاع آن (H) برابر ۱۲۰ متر، ضریب پواسون (ν) برابر ۰/۲، وزن واحد جرم (ρ) برابر ۲/۵ تن بر مترمکعب، مدول یانگ (E) برابر ۳/۵ میلیون تن بر مترمربع سرعت انتشار صوت در آب (C) برابر ۱۴۳۸/۶۵ متر بر ثانیه و فرکانس طبیعی سد (ω_1) برابر ۴/۰۶۵ هرتز در نظر گرفته شده است.



شکل ۷- هندسه مثال اول در مختصات کلی

محل LCO و گسسته‌سازی شماتیک مرزهای مسئله در مختصات محلی در شکل (۸) آمده است. هم‌چنین برای حل این مسئله از ۱۳ المان ۳ گرهی استفاده شده که ۱۲ عدد آن‌ها روی وجه بالادست سد و یک عدد دیگر هم روی تاج قرار دارد.



شکل ۸- مش‌بندی مرزهای مثال ۲ در مختصات محلی و مکان LCO

بارگذاری و محل LCO این مثال شبیه مثال قبل است و دامنه جابه‌جایی افقی تاج سد نسبت به جابه‌جایی استاتیکی (\bar{U}) برحسب $w = \frac{\omega H}{c}$ در شکل (۹) ارائه شده و به‌منظور صحت‌سنجی

- Engineering and Structural Dynamics, 2012, 41 (13), 1725-1749.
- Loureiro FS, Mansur WJ, "An efficient hybrid time-Laplace domain method for elastodynamic analysis based on the explicit Green's approach", International Journal of Solids and Structures, 2009, 46 (16), 3093-3102.
- Mirzajani M, Khaji N, Khodakarami MI, "A new global nonreflecting boundary condition with diagonal coefficient matrices for analysis of unbounded media", Applied Mathematical Modelling, 2016, 40 (4), 2845-2874.
- Moghadaszadeh SO, Khaji N, "Development and application of a semi-analytical method with diagonal coefficient matrices for analysis of wave diffraction around vertical cylinders of arbitrary cross-sections", Ocean Engineering, 2015, 110, 292-302.
- Tsai CS, Lee GC, Ketter RL, "Solution of the dam-reservoir interaction problem using a combination of FEM, BEM with particular integrals", Modal Analysis and Substructuring, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1992, 9 (3), 219-232.
- Xiao J, Ye W, Cai Y, Zhang J, "Precorrected FFT accelerated BEM for large-scale transient elastodynamic analysis using frequency-domain approach", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2012, 90 (1), 116-134.
- Yang ZJ, Deeks AJ, "A frequency-domain approach for modelling transient elastodynamics using scaled boundary finite element method", Computational Mechanics, 2007, 40 (4), 725-738.
- Yang ZJ, Zhang ZH, Liu GH, Ooi ET, "An h-hierarchical adaptive scaled boundary finite element method for elastodynamics", Computers and Structures, 2011, 89 (13), 1417-1429.
- Yang ZJ, Deeks AJ, Hao H, "A Frobenius solution to the scaled boundary finite element equations in frequency domain for bounded media", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2007, 70 (12), 1387-1408.
- رسوبات کف آن در حالت‌های دو و سه‌بعدی قابل کاربرد و توسعه است.
- ### ۹- مراجع
- بابایی ر، "کاربرد روش معادلات مجزا برای حل مسئله اندرکنش سد و مخزن"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت مدرس، ۱۳۹۲.
- بابایی ر، خاجی ن، احمدی م ت، "توسعه روش معادلات مجزا برای محاسبه فشار هیدرودینامیک مخزن سدهای بتنی وزنی"، مجله عمران مدرس، ۱۳۹۴، ۱۵، ۴۱-۵۲.
- Boroomand B, Mossaiby F, "Dynamic solution of unbounded domains using finite element method: discrete Green's functions in frequency domain", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 67 (11), 1491-1530.
- Canuto C, Hussaini MY, Quarteroni AM, Thomas Jr A, "Spectral methods in fluid dynamics", Springer Science & Business Media, 2012.
- Fakharian M, Khodakarami MI, "A Modified Decoupled Semi-Analytical Approach Based On SBFEM for Solving 2D Elastodynamic Problems", World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering, 2015, 9 (2), 296-301.
- Javaran SH, Khaji N, Moharrami H, "A dual reciprocity BEM approach using new Fourier radial basis functions applied to 2D elastodynamic transient analysis", Engineering Analysis with Boundary Elements, 2011, 35 (1), 85-95.
- Khaji N, Khodakarami MI, "A new semi-analytical method with diagonal coefficient matrices for potential problems", Engineering Analysis with Boundary Elements, 2011, 35 (6), 845-854.
- Khaji N, Khodakarami MI, "A semi-analytical method with a system of decoupled ordinary differential equations for three-dimensional elastostatic problems", International Journal of Solids and Structures, 2012, 49 (18), 2528-2546.
- Khaji N, Yazdani M, "Determination of stress intensity factors of 2D fracture mechanics problems through a new semi-analytical method", Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures, 2016, 39 (4), 467-78.
- Khodakarami MI, Khaji N, "Analysis of elastostatic problems using a semi-analytical method with diagonal coefficient matrices", Engineering Analysis with Boundary Elements, 2011, 35 (12), 1288-1296.
- Khodakarami MI, Khaji N, Ahmadi MT, "Modeling transient elastodynamic problems using a novel semi-analytical method yielding decoupled partial differential equations", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2012, 213, 183-195.
- Lin G, Wang Y, Hu Z, "An efficient approach for frequency-domain and time-domain hydrodynamic analysis of dam-reservoir systems", Earthquake

EXTENDED ABSTRACT

Developing a New Semi- Analytical Method for Solving Elastodynamic Problems in the Frequency Domain

Reza Babaee ^a, Ehsan Jabbari ^{a,*}, Mohsen Khosravi Babadi ^b

^a Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran

^b Iran Marine Industries Organization

Received: 27 March 2017; Accepted: 15 July 2019

Keywords:

Elastodynamic problems, Diagonal coefficient matrix, concrete gravity dam, Frequency domain.

1. Introduction

In this paper, a new semi-analytical method is developed for analyzing concrete gravity dams in the frequency domain. Among different numerical methods, the finite element method (FEM), the boundary element method (BEM), and the scaled boundary finite element method (SBFEM) are more popular. BEM requires basically reduced surface discretization and may be considered as an appealing alternative to FEM for elastodynamic problems but requires fundamental solution of the governing differential equations. Although coefficient matrices of BEM are much smaller than those of FEM, they are routinely non-positive definite, non-symmetric, and fully populated. The SBFEM combines the advantages of the FEM and the BEM. The SBFEM is a semi-analytical method for solving partial differential equations by transforming the governing partial differential equations to ordinary differential equations. In the SBFEM, similar to the BEM, the boundary of the problem's domain is discretized, while no fundamental solution is required. A modified form of the SBFEM with diagonal coefficient matrices has been proposed (Fakharian and Khodakarami, 2015) for solving elastodynamic problems in the time domain. In this study, the semi-analytical approach for solving elastodynamic problems in the frequency domain has been applied, the governing equations in local coordinate system has been developed and two concrete gravity dams with rigid foundations and empty reservoir have been analyzed under the earthquake harmonic load.

2. Methodology

2.1. Governing equations in global coordinates

The equation of motion for elastodynamic problems under earthquake load in a 2D domain is represented as:

$$\sigma_{ij,j} - \rho(\ddot{u}_i + \ddot{u}_g) = 0 \quad (1)$$

Where σ_{ij} shows the stress tensor components, \ddot{u}_g refers to ground acceleration, \ddot{u}_i refers to relative acceleration of the structure and ρ is the mass density. For a 2D domain in global Cartesian coordinates, $i = X, Y$ and $j = X, Y$. In the frequency domain, the time derivative of the displacement function, $\ddot{u}_i(t)$, may be given as:

$$u_i(t) = \hat{u}_i(\omega) \exp(I\omega t) \quad (2)$$

in which $I = \sqrt{-1}$ and $\hat{u}_i(\omega)$ indicates the displacement amplitude. Therefore, governing equations in frequency domain is formulated as:

* Corresponding Author

E-mail addresses: r.babaee@stu.qom.ac.ir (Reza Babaee), e.jabbari@qom.ac.ir; (Ehsan Jabbari), mohsen_khb@yahoo.com (Mohsen Khosravi Babadi).

$$\hat{\sigma}_{ij,j} + \rho\omega^2\hat{u}_i + \rho\omega^2\hat{u}_g = 0 \tag{3}$$

Where ω denotes the circular frequency. The present method uses the weak form of the governing equations. For this end, Eq. (3) is weighted with an arbitrary weighting function w and integrated over the problem's domain along with applying appropriate BCs. The result may be given by:

$$\int_{\Omega} w\hat{\sigma}_{ij,j}d\Omega + \int_{\Omega} w\omega^2\hat{u}_id\Omega + \int_{\Omega} w\rho\omega^2\hat{u}_gd\Omega = 0 \tag{4}$$

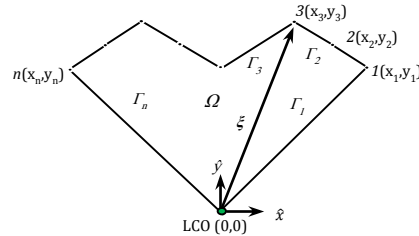


Fig. 1. Geometry of a sample 2D bounded domain (Ω) and LCO location in global coordinates

2.2. Geometry modeling

In the present method, for a bounded medium, a coordinates-origin (LCO) is chosen from which all boundaries of the domain are visible (Fig. 2). A geometry transmission is introduced from global Cartesian coordinates (x, y) to local dimensionless coordinates (ξ, η) (Fig. 2). This transmission is obtained by Lagrange polynomials as mapping functions (Canuto et al, 2012) as:

$$\varphi_i(\eta) = \frac{\prod_{k=1, k \neq i}^{n_\eta+1} \eta - \eta_k}{\eta_i - \eta_k} \tag{5}$$

2.3. Physical modeling

In this method, special polynomials $N(\eta)$ are used as shape functions. Diagonal coefficient matrices will be derived by using these shape functions. To this end, the displacement function and its derivatives, across the element, are interpolated using polynomials that own two specific characteristics; the shape functions have Kronecker Delta property, and their first derivatives are equal to zero at any given control point.

For an element by $(n_\eta+1)$ nodes, the shape functions are expressed as a polynomial of degree $(2n_\eta+1)$ as (Babaee et al., 2015):

$$N_i(\eta) = \sum_{m=0}^{2n_\eta+1} a_m \eta^m \tag{6}$$

Considering Eqs. (2) and (6), the displacement field at any point (ξ, η) and frequency ω is given by

$$\{\hat{u}(\xi, \eta, \omega)\} = [N(\eta)]\{\hat{u}(\xi, \omega)\} = [N(\eta)]\left[\hat{u}_x(\xi, \omega) \quad \hat{u}_y(\xi, \omega)\right]^T \tag{7}$$

2.4. Numerical integration

In this study, the Gauss-Lobatto-Legendre numerical integration method is applied. This method calculates the values of the coefficients matrix and vector that will be appeared in governing equations in local coordinates, according to the node element that corresponds to the points and also features a shape function used, resulting diagonal matrix of coefficients used in the equation. Weight coefficients used in the method of integration is calculated using (Canuto et a, 2012):

$$w_i = \frac{2}{n(n+1)[(n_\eta)(n_i)]^2} \tag{8}$$

3. Results and discussion

3.1. Derivation of governing equations in local coordinates

The weak form of governing equations (Eq. 4) is derived as Eq. 9 using mapping function (Eq. 5), shape function (Eq. 6), and numerical integration (Eq. 8).

$$\xi \begin{bmatrix} D_{11x}^0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D_{11y}^0 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & D_{mxx}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & D_{mny}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_{1x} \\ \hat{u}_{1y} \\ \vdots \\ \hat{u}_{nx} \\ \hat{u}_{ny} \end{Bmatrix}_{,\xi} + \begin{bmatrix} D_{11x}^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D_{11y}^1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & D_{mxx}^1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & D_{mny}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_{1x} \\ \hat{u}_{1y} \\ \vdots \\ \hat{u}_{nx} \\ \hat{u}_{ny} \end{Bmatrix}_{,\xi} + \omega^2 \xi \begin{bmatrix} M_{11x} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M_{11y} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & M_{mxx} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & M_{mny} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_{1x} \\ \hat{u}_{1y} \\ \vdots \\ \hat{u}_{nx} \\ \hat{u}_{ny} \end{Bmatrix} + \xi \begin{Bmatrix} \hat{F}_{1x}^b \\ \hat{F}_{1y}^b \\ \vdots \\ \hat{F}_{nx}^b \\ \hat{F}_{ny}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Where:

$$D_{ij}^0 = 2\delta_{ij} w_i [B^1(\eta_i)]^T [D][B^1(\eta_i)] |J(\eta_i)| \quad (10)$$

$$D_{ij}^1 = 2\delta_{ij} w_i [B^1(\eta_i)]_{,\eta}^T [D][B^2(\eta_i)] |J(\eta_i)| \quad (11)$$

$$M_{ij} = 2\delta_{ij} w_i [N(\eta_i)]^T \rho [N(\eta_i)] |J(\eta_i)| \quad (12)$$

$$\hat{F}_i^b(\omega)_i = 2\delta_{ij} w_i [N(\eta_i)]^T \rho \omega^2 \{\hat{u}_g\} |J(\eta_i)| \quad (13)$$

and $\hat{F}^b(\omega) = [\hat{F}_x^b(\omega) \ \hat{F}_y^b(\omega)]^T$ are the components of inertial forces caused by foundation excitation in the domain of dam body at a frequency ω and δ_{ij} denotes the Kronecker Delta which results in diagonal coefficient matrices. For calculating deformations and stresses at every Degree Of Freedom (DOF), the differential equation corresponding to the control point related to the DOF should be solved. Analytical solution for governing equation for each DOF may be represented as:

$$\hat{u}_{ci} = A_i \xi \begin{pmatrix} 1 - \frac{D_{ii}^1}{D_{ii}^0} \\ \frac{D_{ii}^1}{2} \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} \frac{D_{ii}^1 - 1}{2} \\ \frac{D_{ii}^0}{2} \end{pmatrix} \left(\left(\frac{\omega^2 M_{ii}}{D_{ii}^0} \right)^{0.5} \xi \right) + B_i \xi \begin{pmatrix} 1 - \frac{D_{ii}^1}{D_{ii}^0} \\ \frac{D_{ii}^1}{2} \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} \frac{D_{ii}^1 - 1}{2} \\ \frac{D_{ii}^0}{2} \end{pmatrix} \left(\left(\frac{\omega^2 M_{ii}}{D_{ii}^0} \right)^{0.5} \xi \right) - \frac{1}{\omega^2 M_{ii}} \hat{F}_i^b \quad (14)$$

in which $J(\alpha)$ (β) and $Y(\alpha)$ (β) indicate respectively the first and second kinds of Bessel functions of order α .

3.2. Numerical examples

The accuracy of the present method is demonstrated through representative numerical examples. Geometry of a concrete gravity dam with rigid foundation due to harmonic horizontal displacement of ground is shown in Fig. 2 and results of the analysis using the present method is shown in Fig. 3.

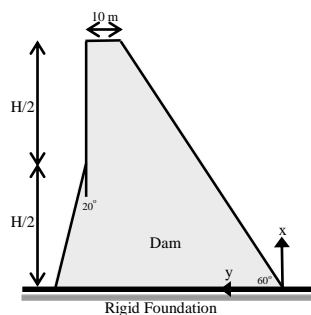


Fig. 2. Geometry of a concrete gravity dam

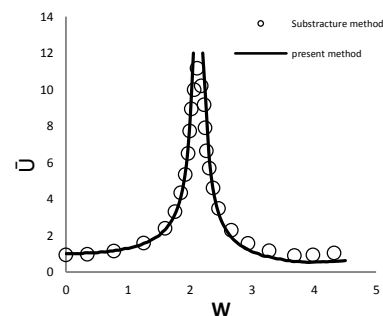


Fig. 3. Amplitude variations of horizontal displacement of dam crest

4. Conclusion

In this research, a new semi-analytical method with detailed formulation was presented for the analysis of 2D elastodynamic problems in frequency domain. In this method, only the boundaries of the domains are discretized. Using Lagrange polynomials as mapping function, special shape function, Gauss-Lobatto-Legendre quadrature, and implementing a weak form of weighted residual method, coefficient matrices of the system equations become diagonal. Therefore, the partial differential equation for each DOF becomes independent from others. Consequently, this method significantly reduces the computational costs compared to other methods. Besides, two examples of empty gravity dam were successfully modeled with very small number of DOFs, preserving very high accuracy compared to available solutions.

5. References

- Babaee R, Khaji N, Ahmadi MT, "Development of Decoupled Equations Method for calculating hydrodynamic pressures on concrete gravity dams", *Modarres civil engineering journal*, 2015, 15, 41-52.
- Fakharian M, Khodakarami MI, "A Modified Decoupled Semi-Analytical Approach Based On SBFEM for Solving 2D Elastodynamic Problems", *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, 2015, 9 (2), 296-301.