

EXTENDED ABSTRACT

Comparison of the Accuracy of an Improved MPS Numerical Method and a Meshless Method Based on Taylor Expansion and Least Squares

Gholamreza Shobeyri *

*Faculty of Civil, Water and Environmental Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran***Received:** 12 November 2024; **Reviewed:** 07 October 2025; **Accepted:** 22 November 2025**Keywords:**

Meshless numerical methods, Elliptic differential equations, MPS method, Taylor expansion, Least squares.

1. Introduction

The Moving Particle Semi-implicit (MPS) is one of the efficient meshless numerical methods that has been successfully used to analyze various engineering problems. In this method, the approximation of the derivatives of the function is performed based on a weighted averaging by interpolation functions. Despite its inherent capabilities, this method has serious shortcomings, especially in terms of accuracy. Many efforts have been made to improve the accuracy of this method. In this study, the accuracy of one of the most efficient MPS models (Model 1 in this study) is compared with a meshless method based on the least squares technique and Taylor expansion (Model 2 in this study) for solving elliptic differential equations. Numerical results show that numerical Model 2 produces much better results and under these conditions, it can be expected that this numerical model can be successfully used to solve many engineering problems.

2. Methodology

Numerical model 1 is actually an improved form of the standard MPS method, in which a corrective matrix is considered in its formulation based on a special mathematical technique. Also, in this method, instead of interpolation functions, MLS (Moving Least Squares) functions are used. In numerical model 2, Taylor expansion up to the second order is considered to approximate an arbitrary function. The difference between the approximated and exact value of the function, which is weighted by interpolation functions, determines the error value for each computational node. By applying the least squares method, the sum of the errors of the computational nodes can be minimized and in this way the derivatives of the function can be approximated. By approximating the second-order derivatives with the presented numerical methods, the elliptic differential equations of this research can be solved and their accuracy can be compared.

3. Results and discussion

In this study, three elliptic differential equations and three two-dimensional potential flows are investigated, and only the numerical errors of the numerical models for an elliptic differential equation and a potential flow representing the vortex flow are presented in the extended abstract section. The computational domain is discretized with a number of scattered nodes. These nodes are first uniformly distributed with a certain distance (L_0) and then the nodes are randomly moved with a maximum distance $0.3L_0$, which leads to a non-uniform distribution. The computational domain of both problems is a square, but for the vortex flow, a

circle with a certain radius is eliminated from this square to avoid the singularity condition at the center of the square.

Fig. 1 shows the average percentage of errors of computational nodes (Er) for the elliptic differential equation (given at the top of the figure). As is clear, numerical model 2 provides much better results than numerical model 1. In Fig. 2, the performance of the numerical models of this study for the differential equation of the vortex flow (given at the top of the figure) is compared, which shows the higher accuracy of numerical model 2. From the presented results, it can be seen that the model based on Taylor expansion has much greater numerical capability than the improved MPS numerical model. It should be noted that numerical model 2 requires less computational time to solve the test problems, which completes the superiority of this model over the improved MPS model.

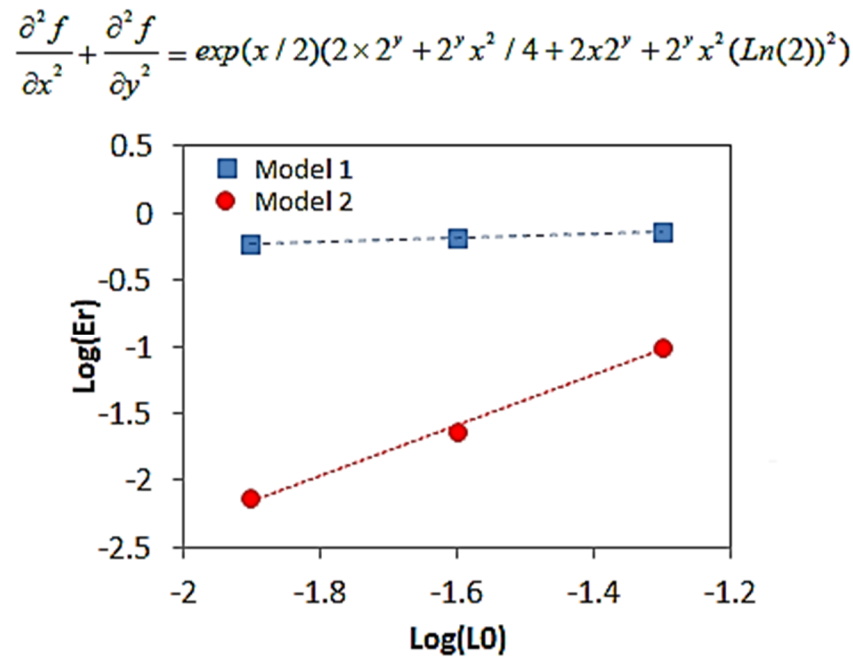


Fig. 1. Numerical errors the elliptic differential equation

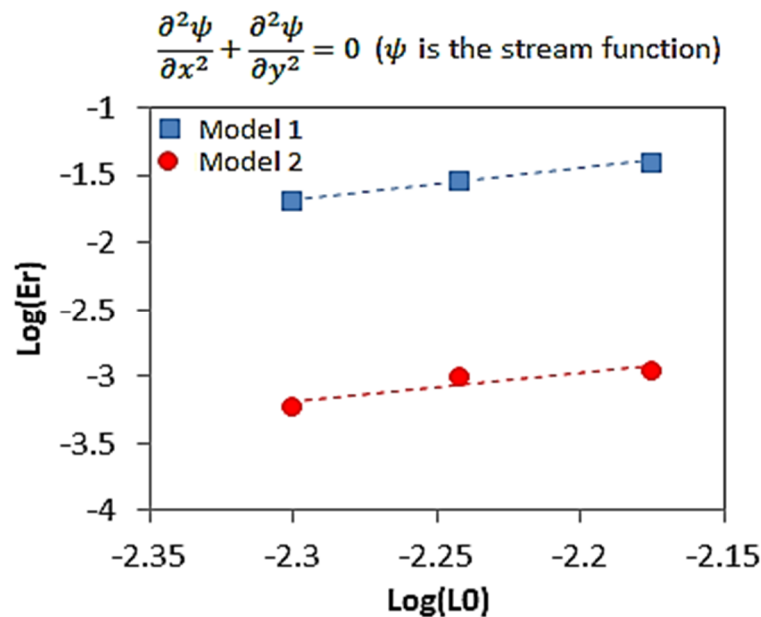


Fig. 2. Numerical errors the vortex flow

4. Conclusions

Much research has been accomplished to improve the MPS method as a meshless numerical method. In this study, the accuracy of one of the most efficient proposed models of the MPS method (Model 1) was compared with a meshless numerical method based on Taylor expansion and least squares (Model 2) in solving second-order differential equations, including potential flows. The results clearly indicate the higher accuracy and lower computational cost of Model 2. In this numerical model, all desired derivative orders can be calculated simultaneously and many engineering problems that are in the form of differential equations including first and second-order derivatives can be easily solved. However, this numerical model should also be examined for more complex problems such as fluid flow, especially in the Lagrangian frame, and possible shortcomings should be identified and overcome. For example, in complex flow problems where fluid particles may be dispersed, big errors may occur in the inversion of the matrix required to approximate the derivatives of the function. It seems that this method does not have serious problems in solid mechanics problems where computational nodes do not move much. The same conditions are also true for fluid mechanics problems in the Eulerian frame.

مقایسه دقت یک روش عددی ارتقاء یافته MPS و یک روش بدون شبکه مبتنی بر بسط تیلور و حداقل مربعات

غلامرضا شوبیری*

استادیار دانشکده مهندسی عمران، آب و محیط زیست، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

دریافت: 1403/8/22، بازنگری: 1404/7/15، پذیرش: 1404/9/1، نشر آنلاین: 1404/9/1

چکیده

روش‌های عددی بدون شبکه، در سال‌های اخیر برای حل مسائل مختلف مهندسی بسیار استفاده شده‌اند. روش نیمه‌ضمنی ذرات متحرک (MPS) (Moving Particle Semi-implicit) و روش هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) (Smoothed Particle Hydrodynamics) دو نمونه مهم از روش‌های بدون شبکه هستند؛ اما دقت آن‌ها زیاد نیست. اخیراً دو مدل از این روش‌ها با دقت بسیار خوب پیشنهاد شده است که حتی نسبت به بسیاری از مدل‌های موجود ارتقاء یافته، از دقت بالاتری برخوردار می‌باشند. همچنین یک روش عددی مبتنی بر بسط تیلور (Taylor series) و حداقل مربعات نیز در این تحقیق مورد توجه است. از آنجایی که دقت دو روش ارتقاء یافته MPS و SPH تقریباً یکسان است روش MPS انتخاب می‌گردد و دقت آن با روش عددی مبتنی بر بسط تیلور مقایسه می‌شود. برای این منظور چندین معادله دیفرانسیلی بیضوی و جریان‌های پتانسیل که شامل مشتقات مرتبه دوم می‌باشند، به‌عنوان مسائل مرجع انتخاب شده‌اند. برای تمامی این مسائل، روش عددی مبتنی بر بسط تیلور از دقت بالاتری نسبت به روش ارتقاء یافته MPS برخوردار می‌باشد. به‌عنوان مثال، روش مبتنی بر بسط تیلور در حل معادله دیفرانسیل سوم این تحقیق، به خطای زیر 5 درصد می‌رسد درحالی که خطای روش MPS نزدیک به 20 درصد می‌باشد.

کلیدواژه‌ها: روش‌های عددی بدون شبکه، معادلات دیفرانسیل بیضوی، روش MPS، بسط تیلور، حداقل مربعات.

1- مقدمه

بدون شبکه توسعه یافته‌اند که در آن‌ها حل معادلات دیفرانسیلی بدون نیاز به شبکه‌بندی دامنه محاسباتی و تنها با استفاده از یک سری گره‌های محاسباتی پراکنده و نامنظم میسر می‌شود. اولین روش عددی بدون شبکه که برای تحلیل مسائل اخترفیزیکی پیشنهاد شده است روش هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) می‌باشد (Monaghan و Gingold, 1977). که برای حل مسائل مختلف مهندسی پیچیده و کاربردی مانند شبیه‌سازی شکست سد (Razavitoosi و همکاران, 2014)، حرکت امواج ضربه‌ای (Tan و Chen, 2017)، اندرکنش آب و سازه (Hu و Han, 2018)، جریان سیال دوفازه (Zhang و همکاران, 2018)، مسائل الاستیسیته (Peer و همکاران, 2018) و جذب انرژی امواج (Chen و همکاران, 2023) با موفقیت به‌کار گرفته شده است. با وجود توانمندی این روش، دقت و عملکرد عددی آن همچنان در حد کاملاً مطلوب نبوده و روش‌های متفاوتی با رویکردهای مختلف

بسیاری از پدیده‌های طبیعی را می‌توان در قالب معادلات دیفرانسیل فرمول‌بندی کرد. حل تحلیلی این معادلات به‌واسطه پیچیدگی‌های بسیار آن‌ها در حالت کلی غیر ممکن است و تنها برای شرایط خاص می‌توان جواب‌های دقیق برای این معادلات به‌دست آورد. علاوه بر روش‌های تجربی و آزمایشگاهی، روش‌های عددی نیز با توسعه و پیشرفت رایانه‌های پرسرعت برای حل معادلات دیفرانسیل به‌شکل فزاینده‌ای مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در روش‌های عددی قدیمی‌تر و سنتی که موسوم به روش‌های مبتنی بر شبکه هستند، فرآیند تقریب تابع و مشتقات آن با استفاده از شبکه‌بندی میدان حل امکان‌پذیر است. عموماً عملیات شبکه‌بندی برای هندسه‌های پیچیده و مسائل غیردائمی جریان با مرزهای متحرک بسیار زمان‌بر است که کاستی و نقصان ذاتی این دسته از روش‌ها می‌باشد. در مقابل، به‌تازگی روش‌های عددی



ریاضی پیشنهاد شده‌اند که دقت برخی از مهم‌ترین آن‌ها با یک مدل عددی جدید در این حوزه مقایسه شده است (Shobeyri, 2023).

لازم به ذکر است تقریب تابع و مشتقات این روش بر مبنای تئوری انتگرال گیری وزن دار شده است که جزئیات آن را در مراجع ذکر شده می‌توان پیدا کرد. یکی دیگر از روش‌های عددی کارآمد و پرکاربرد بدون شبکه که شباهت زیادی به روش SPH دارد، روش نیمه‌ضمنی ذرات متحرک (MPS) است که در زمینه‌های مختلف مهندسی با موفقیت به کار گرفته شده است (Pan و همکاران، 2012؛ Mitsume و همکاران، 2014؛ Sun و همکاران، 2015؛ Daneshvar و همکاران، 2017؛ Jandaghian و Shakibaeinia، 2020؛ Wu و همکاران، 2023).

یکی دیگر از روش‌های عددی کارآمد و پرکاربرد بدون شبکه که شباهت زیادی به روش SPH دارد، روش نیمه‌ضمنی ذرات متحرک (MPS) است که در زمینه‌های مختلف مهندسی با موفقیت به کار گرفته شده است (Pan و همکاران، 2012؛ Mitsume و همکاران، 2014؛ Sun و همکاران، 2015؛ Daneshvar و همکاران، 2017؛ Jandaghian و Shakibaeinia، 2020؛ Wu و همکاران، 2023). در این روش بر مبنای یک میانگین گیری وزنی توسط توابع درونیابی با ویژگی‌های خاص، تقریب تابع و مشتقات آن صورت می‌گیرد. این روش نیز مانند روش SPH با وجود توانمندی ذاتی از دقت چندانی برخوردار نمی‌باشد. تحقیقات زیادی برای بهبود دقت این روش انجام شده است که به‌طور خلاصه به چند مورد اشاره می‌شود.

یک ماتریس اصلاحی برای روش MPS معرفی شده است که از طریق آن دقت این روش برای تقریب مشتق اول برای مسائل جریان دوفازه افزایش یافته است (Duan و همکاران، 2018). همچنین دقت این روش با استفاده از دیگرام‌های ورونی برای حل معادلات دیفرانسیلی بیضوی افزایش قابل توجهی داشته است (Shobeyri و Madadi، 2018). مسئله ناپایداری کششی این روش با استفاده از یک الگوریتم پایدارسازی دینامیکی کارآمد برای حل مسائل جریان مرتفع شد (Gou و همکاران، 2020).

مسائل اندرکنش سیال و سازه با موفقیت با اصلاح گرادیان فشار در یک روش MPS ارتقاء یافته مورد بررسی قرار گرفتند (Zha و همکاران، 2021). اخیراً نیز یک روش ارتقاء یافته MPS بر مبنای تکنیک حداقل مربعات پیشنهاد شده است (Matsunaga و همکاران، 2022).

با لحاظ کردن اثر کشش سطحی و یک شرط مرزی دیریشله¹ جدید برای حل معادله پواسون فشار برای جلوگیری از پراکندگی غیرفیزیکی ذرات سیال در حل مسائل جریان، عملکرد عددی این

روش ارتقاء یافت (Zhang و همکاران، 2022). یک مدل عملگر لاپلاسی² با دقت بالا که با عملگر گرادیان اصلی این روش سازگار است، برای حل مسائل سطح آزاد ارائه شده است (Li و همکاران، 2023). در این تحقیق یکی از دقیق‌ترین مدل‌های روش MPS که به‌تازگی پیشنهاد شده است (Shobeyri، 2024a) مدنظر قرار می‌گیرد. این روش، اخیراً با استفاده از توابع شکل حداقل مربعات متحرک (MLS)³ دقیق‌تر هم شده است (Shobeyri، 2024b). یک روش بدون شبکه کارآمد بر مبنای تکنیک حداقل مربعات بسط تیلور مرتبه بالا برای شبیه‌سازی مسائل جریان‌های سطح آزاد با موفقیت پیشنهاد شده است (Koh و همکاران، 2012) که در این تحقیق، نوع تغییر یافته آن استفاده شده است. لازم به ذکر است که این روش پیشتر در حل مسائل الاستیسیته با موفقیت استفاده شده است (Shobeyri و همکاران، 2024).

روش MPS ترکیب شده با توابع MLS را می‌توان دقیق‌ترین روش بین تمامی روش‌های مشابه در بین مدل‌های توسعه یافته روش‌های SPH و MPS قلمداد کرد. مقایسه این روش و روش مرتبه بالا بر مبنای بسط تیلور اهمیت زیادی دارد. بدین منظور در تحقیق حاضر، این دو روش در حل معادلات دیفرانسیل دوعده بیضوی و جریان‌های پتانسیل مورد مقایسه قرار می‌گیرند. مقایسه دقت این دو روش برای حل مسائل اشاره شده، نشان می‌دهد که کلیه روش‌های عددی توسعه یافته در حوزه SPH و MPS برای تقریب مشتقات مرتبه دوم قابلیت روش بدون شبکه مبتنی بر بسط تیلور و حداقل مربعات را ندارند. تحت این شرایط می‌توان انتظار داشت روش پیشنهادی برای حل بسیاری از مسائل مهندسی که مبتنی به معادلات دیفرانسیلی مرتبه دوم می‌باشند، گزینه قابل توجهی باشد. همچنین با توجه به ماهیت این روش، به راحتی می‌توان مشتقات مرتبه اول یک تابع را نیز هم‌زمان تقریب زد. با این ویژگی‌ها می‌توان حتی معادلات پیچیده جریان که توأم شامل مشتقات مرتبه اول و دوم می‌باشند را با دقت بالا حل کرد. علاوه بر این، معادلات پیچیده تر مکانیک جامدات که شامل معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر نیز هستند را با توسعه این روش می‌توان به سادگی مورد بررسی قرار داد.

2- روش‌های عددی بدون شبکه

در روش‌های عددی مبتنی بر شبکه، حل معادلات دیفرانسیلی حاکم با شبکه‌بندی دامنه محاسباتی امکان پذیر است که این فرآیند برای جریان‌های غیردائمی با مرزهای متحرک بسیار پرهزینه می‌باشد. در روش‌های عددی بدون شبکه تقریب تابع و مشتقات آن با استفاده از یک سری گره‌های محاسباتی با توزیع

$$\nabla^2 f_a = \frac{1}{\lambda} (ar_{11} + ar_{22}) \sum_{b \neq a} \frac{1}{n_b} (f_b - f_a) W_{ab} \quad (6)$$

که در این معادله ar_{11} و ar_{22} آرایه‌های یک ماتریس اصلاحی هستند که طبق معادله زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{bmatrix} ar_{11} & ar_{12} \\ ar_{21} & ar_{22} \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{\lambda} \sum_{b \neq a} \frac{1}{n_b} W_{ab} (r_b - r_a) \otimes (r_b - r_a)^T \right]^{-1} \quad (7)$$

که $\otimes$ نشان‌دهنده عملگر ضرب ماتریسی می‌باشد. اگر تعداد گره‌های همسایه گره مرجع (a) به عنوان مثال n_s باشد با در نظر گرفتن عبارت $W_{ab}(r_b - r_a)/n_b$ برای همه گره‌های همسایه یک ماتریس با ابعاد 2 در n_s تولید می‌شود و در مقابل عبارت $(r_b - r_a)^T$ یک ماتریس با ابعاد n_s در 2 می‌باشد که ضرب این دو ماتریس یک ماتریس مربعی با ابعاد 2 تولید می‌کند که با لحاظ کردن پارامتر λ به عنوان عدد ثابت در این ماتریس محاسبات تکمیل می‌شود. با محاسبه معکوس ماتریس نهایی برای هر گره به راحتی می‌توان عملگر لاپلاسیان را مطابق معادله (6) محاسبه کرد. این روش نسبت به بسیاری از مدل‌های لاپلاسیانی روش‌های SPH و MPS دقت بیشتری نشان داده است. با توجه به ویژگی‌های تابع درون‌یابی (W) و پارامتر محاسباتی n_a و ویژگی‌های توابع MLS می‌توان مدل لاپلاسیانی فوق را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\nabla^2 f_a = \frac{1}{\lambda} (ar_{11} + ar_{22}) \sum_{b \neq a} (f_b - f_a) N_{ab} \quad (8)$$

در رابطه فوق، N_{ab} نشان‌دهنده تابع MLS می‌باشد که تابع پایه‌ای خطی برای تولید آن در این تحقیق استفاده می‌شود. این مدل نسبت به مدل اولیه خود دقت بسیار بیشتری دارد و در این تحقیق برای سادگی، این روش مدل شماره 1 نامیده می‌شود. جزئیات فرمول‌بندی این روش را در این مرجع (Shobeyri, 2024b) می‌توان یافت.

2-3- روش مرتبه بالای مبتنی بر بسط تیلور (مدل 2)

بسط تیلور یک تابع دوبعدی تا مرتبه دوم حول نقطه مرکزی یا مرجع با مختصات (x_0, y_0) طبق معادله زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx & f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f_0}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} \\ & + \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2} \end{aligned} \quad (9)$$

که $\Delta x = x - x_0$ و $\Delta y = y - y_0$ لازم به ذکر است فاصله افقی (Δx) و عمودی (Δy) بین گره‌های همسایه و گره مرجع به سادگی قابل محاسبه بوده و نیاز به هیچ گونه شبکه‌بندی دامنه محاسباتی نیست. با توجه به این که هدف این تحقیق تقریب مشتقات مرتبه

دلخواه انجام می‌شود. در ادامه فرمول‌بندی چند نمونه از روش‌های عددی بدون شبکه ارائه می‌شود.

2-1- روش MPS

در روش MPS عملگرهای گرادیان و لاپلاسیان یک تابع دلخواه (f) با استفاده از یک روش میانگین‌گیری وزن دار شده برای مسائل دو بعدی به شکل زیر (به ترتیب) تقریب زده می‌شوند (a گره مرجع و b گره‌های همسایه گره مرجع می‌باشند).

$$\nabla f_a = \sum_{b \neq a} \frac{2}{n_b} \frac{f_a - f_b}{|r_a - r_b|^2} (r_a - r_b) W_{ab} \quad (1)$$

$$\nabla^2 f_a = \frac{4}{\lambda} \sum_{b \neq a} \frac{1}{n_b} (f_b - f_a) W_{ab} \quad (2)$$

که r بردار موقعیت می‌باشد و λ و n دو پارامتر محاسباتی هستند که طبق معادلات زیر محاسبه می‌شوند:

$$n_a = \sum_{b \neq a} W_{ab} \quad (3)$$

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} W(r) r^2 d\Omega}{\int_{\Omega} W(r) d\Omega} \quad (4)$$

که Ω ناحیه تأثیر گره محاسباتی است و r نیز بیانگر فاصله بین گره‌ها می‌باشد. همچنین W_{ab} (W) نمایانگر تابع درون‌یابی است. از توابع درون‌یابی زیادی با لحاظ کردن یک سری ویژگی‌های ضروری می‌توان در محاسبات عددی این روش استفاده کرد که بر روی دقت نتایج و هزینه محاسباتی آن تأثیرگذار می‌باشد (Shobeyri و Madadi, 2018). معادله زیر بیانگر یکی از ساده‌ترین این توابع با عملکرد قابل قبول می‌باشد.

$$W_{ab} = \frac{8}{\pi R_s^2} \left(\frac{3}{4} \left(\frac{r}{R_s} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{r}{R_s} \right) + \frac{3}{4} \right) \quad (5)$$

که R_s شعاع ناحیه تأثیر گره‌های محاسباتی می‌باشد. لازم به ذکر است روش SPH نیز از توابع درون‌یابی برای تقریب توابع استفاده می‌کند ولی برای تقریب مشتقات مرتبه دوم در این روش بر خلاف روش MPS از ترکیب مشتق مرتبه اول تابع درون‌یابی و روش تفاضل‌های محدود استفاده می‌شود (Shobeyri, 2023).

2-2- روش MPS اصلاح شده (مدل 1)

با وجود این که روش MPS برای حل مسائل مختلف با موفقیت استفاده شده است؛ اما دارای مشکلات زیادی می‌باشد که یکی از مهم‌ترین آن‌ها دقت پایین آن است. یکی از مدل‌های لاپلاسیانی جدید با دقت بسیار زیاد طبق معادله زیر قابل بیان است (Shobeyri, 2024a).

$$A_2 = \begin{bmatrix} \sum W_j^2 \Delta y_j & \sum W_j^2 \Delta x_j^2 / 2 \\ \sum W_j^2 \Delta x_j \Delta y_j & \sum W_j^2 \Delta x_j^3 / 2 \\ \sum W_j^2 \Delta y_j^2 & \sum W_j^2 \Delta x_j^2 \Delta y_j / 2 \\ \sum W_j^2 \Delta x_j^2 \Delta y_j / 2 & \sum W_j^2 \Delta x_j^4 / 4 \\ \sum W_j^2 \Delta x_j \Delta y_j^2 & \sum W_j^2 \Delta x_j^3 \Delta y_j / 2 \\ \sum W_j^2 \Delta y_j^3 / 2 & \sum W_j^2 \Delta x_j^2 \Delta y_j^2 / 4 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \sum W_j^2 \Delta x_j \Delta y_j & \sum W_j^2 \Delta y_j^2 / 2 \\ \sum W_j^2 \Delta x_j^2 \Delta y_j & \sum W_j^2 \Delta x_j \Delta y_j^2 / 2 \\ \sum W_j^2 \Delta x_j \Delta y_j^2 & \sum W_j^2 \Delta y_j^3 / 2 \\ \sum W_j^2 \Delta x_j^3 \Delta y_j / 2 & \sum W_j^2 \Delta x_j^2 \Delta y_j^2 / 4 \\ \sum W_j^2 \Delta x_j^2 \Delta y_j^2 & \sum W_j^2 \Delta x_j \Delta y_j^3 / 2 \\ \sum W_j^2 \Delta x_j \Delta y_j^3 / 2 & \sum W_j^2 \Delta y_j^4 / 4 \end{bmatrix}$$

همچنین داریم:

$$RHS = \begin{bmatrix} \sum f_j W_j^2 \\ \sum f_j W_j^2 \Delta x_j \\ \sum f_j W_j^2 \Delta y_j \\ \sum f_j W_j^2 \Delta x_j^2 / 2 \\ \sum f_j W_j^2 \Delta x_j \Delta y_j \\ \sum f_j W_j^2 \Delta y_j^2 / 2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

در معادلات فوق، علامت مجموع بر روی گره‌های همسایه گره مرجع می‌باشد که اندازه شعاع تأثیر انتخابی تعیین کننده این تعداد می‌باشد. لازم به ذکر است که این روش به شکل دیگر که در آن تعداد مجهولات مسئله (معادله (12)) پنج عدد (مشتقات مرتبه اول و دوم تابع) می‌باشد پیشنهاد شده است (Koh و همکاران، 2012). به طور خلاصه مراحل حل عددی این روش به شرح زیر است:

الف) گره‌های اطراف هر گره محاسباتی مرجع با توجه به اندازه شعاع تأثیر انتخابی مشخص (R_s) می‌شوند و برای گره مرجع یک ماتریس 6×6 (ماتریس M) با توجه به معادله (14) تشکیل می‌شود. ب) معکوس این ماتریس (M) محاسبه می‌شود و با محاسبه مؤلفه‌های بردار RHS می‌توان رابطه‌ای برای تقریب مشتقات تابع (F_{LS}) برای گره مرجع با توجه به مقادیر تابع در گره‌های اطراف پیدا کرد (f_j) این عملیات برای تمامی گره‌های محاسباتی به شکل جداگانه انجام می‌شود.

دوم می‌باشد حداقل جملات این بسط را باید تا در برگرفتن مشتقات پاره‌ای مرتبه دوم ادامه داد. مجموع مقدار خطا ($\|E\|$) برای هر گره موجود در ناحیه تأثیر گره مرجع طبق معادله زیر به دست می‌آید:

$$\|E\| = \sum_{j=1}^{N_l} W_j^2 \left[f_0 - f_j + \frac{\partial f_0}{\partial x} \Delta x_j + \frac{\partial f_0}{\partial y} \Delta y_j + \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} \frac{\Delta x_j^2}{2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y} \Delta x_j \Delta y_j + \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} \frac{\Delta y_j^2}{2} \right]^2 \quad (10)$$

که در این رابطه اندیس j بیانگر گره‌های مجاور گره مرکزی و N_l نشان‌دهنده مقدار تابع درون‌یابی در این نقاط است. همچنین N_l بیانگر تعداد کل گره‌های محاسباتی در ناحیه تأثیر گره مرجع می‌باشد. با حداقل کردن خطای تعریف شده (با روش حداقل مربعات)، بردار مجهولات طبق معادله زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \|E\|}{\partial F_{LS}} = 0 \quad (11)$$

در معادله فوق، بردار مجهولات طبق رابطه زیر است:

$$F_{LS} = \left[f_0, \frac{\partial f_0}{\partial x}, \frac{\partial f_0}{\partial y}, \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} \right] \quad (12)$$

با حل این معادله، بردار مجهولات مسئله طبق معادله زیر به دست می‌آید:

$$F_{LS} = M^{-1} \times RHS \quad (13)$$

در این معادله M ماتریس ضرایب با ابعاد 6×6 می‌باشد که به علت حجم بالا به شکل زیر بیان می‌شود:

$$M = [A_1 \ A_2 \ A_3] \quad (14)$$

که اجزای این رابطه عبارتند از:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \sum W_j^2 & \sum W_j^2 \Delta x_j \\ \sum W_j^2 \Delta x_j & \sum W_j^2 \Delta x_j^2 \\ \sum W_j^2 \Delta y_j & \sum W_j^2 \Delta x_j \Delta y_j \\ \sum W_j^2 \Delta x_j^2 / 2 & \sum W_j^2 \Delta x_j^3 / 2 \\ \sum W_j^2 \Delta x_j \Delta y_j & \sum W_j^2 \Delta x_j^2 \Delta y_j \\ \sum W_j^2 \Delta y_j^2 / 2 & \sum W_j^2 \Delta x_j \Delta y_j^2 / 2 \end{bmatrix}$$

می‌توان بردار F_1 (مربوط با گره‌های مرزی) را مشخص کرد و در نهایت معادله (18) را به شکل زیر نوشت:

$$AT_{22}F_2 = B_2 - AT_{21}F_1 \quad (19)$$

در نهایت، با حل این دستگاه معادلات می‌توان بردار مجهولات مربوط به گره‌های داخلی (F_2) را به دست آورده و با نتایج تحلیلی آن مقایسه کرده و خطای مدل عددی را به دست آورد. در حالت کلی برای دامنه محاسباتی با هندسه منظم مانند شرایط موجود می‌توان از توزیع گرهی منظم برای حل مسئله استفاده کرد. نتایج نشان داده است که تحت این شرایط هر دو مدل عددی از دقت بالایی برخوردار می‌باشند اما مدل 2 عملکرد نسبتاً بهتری از خود نشان می‌دهد. در بسیاری از مسائل مهندسی، هندسه مورد نظر غیرمنظم بوده و استفاده از توزیع گرهی غیریکنواخت اجتناب‌ناپذیر می‌باشد بنابراین عملکرد روش‌های عددی بدون شبکه باید در این شرایط مورد بررسی قرار گیرد. به عنوان مثال در تحلیل مسائل جریان غیردائمی با مرزهای متحرک با دیدگاه لاگرانژی ذرات سیال دائماً در حال حرکت و تغییر پیکربندی می‌باشند. بنابراین استفاده از توزیع گرهی منظم موضوعیت ندارد. ضمناً منطقی‌تر به نظر می‌آید برای توزیع گرهی منظم از روش‌های عددی ساده‌تر با دقت قابل قبول مانند تفاضل‌های محدود به جای روش‌های عددی بدون شبکه استفاده کرد. گسسته‌سازی با یکسری گره پراکنده صورت می‌گیرد. این گره‌ها ابتدا به صورت یکنواخت با فاصله مشخص (L_0) توزیع می‌شوند و سپس گره‌ها به صورت تصادفی با فاصله حدکثر kL_0 (k اندیس غیریکنواختی است) جابه‌جا می‌شوند که منجر به توزیع غیریکنواخت می‌شود. در شکل (1) دو نمونه از توزیع غیریکنواخت گرهی برای $L_0 = 1/20$ m و $k = 0.3, 0.6$ ارائه شده است.

برای بررسی عملکرد عددی مدل‌های این تحقیق از سه توزیع گرهی معادل با $L_0 = 1/20, 1/40, 1/80$ m و $k = 0.3$ استفاده می‌شود. بدیهی است که برای بررسی رفتار تغییر خطاهای یک مدل عددی از مقادیر متفاوت فاصله گرهی می‌توان استفاده کرد. باید شرایط به گونه‌ای باشد که میزان خطا برای فاصله گرهی کمتر از ریزترین فاصله چندان تغییری نکند و براین اساس، توزیعات گرهی در این تحقیق انتخاب شده است. با توجه به شکل (1) (بخش دوم) می‌توان به وضوح دریافت میزان بی‌نظمی توزیع گرهی برای شاخص $k = 0.6$ قابل توجه می‌باشد. به طور معمول توزیع‌های گرهی با بی‌نظمی کمتر مانند حالت $k = 0.3$ این شکل و حتی توزیع منظم‌تر در شبیه‌سازی‌های عددی استفاده می‌شوند. درواقع توزیع با بی‌نظمی بیشتر در این تحقیق برای این منظور انتخاب شده است تا با قطعیت بیشتری بتوان در مورد عملکرد مدل‌های عددی ارائه شده قضاوت کرد.

ج) با یافتن رابطه‌ای برای تقریب مشتقات، می‌توان برای گره محاسباتی معادله دیفرانسیل مورد نظر را به یک معادله جبری بر اساس مقادیر مجهول تابع تبدیل کرد که در نهایت یک دستگاه معادله خطی به ابعاد تعداد کل گره‌های محاسباتی تشکیل می‌شود که با حل آن مقادیر تابع مجهول (f) به دست می‌آید.

در یک مقایسه کلی می‌توان گفت در روش‌های عددی مانند MPS و SPH بر مبنای یک میانگین‌گیری وزن‌دار شده ساده و ترکیب با انواع ایده‌های ریاضی، تقریب تابع و مشتقات آن انجام می‌گیرد که این نوع میانگین‌گیری می‌تواند مانع از افزایش دقت بسیار بالای این روش‌ها شود. در مقابل در مدل عددی حاضر به راحتی می‌توان بسط تیلور را تا مرتبه دلخواه توسعه داد و به دقت‌های بسیار بالا رسید. همچنین در این روش، هم‌زمان می‌توان مشتقات مرتبه اول و دوم و اساساً تا هر مرتبه دلخواه را در یک مرحله محاسبه کرد. تحت این شرایط می‌توان انتظار داشت دقت این روش نسبت به مدل عددی 1 بالاتر باشد که در بخش بعد به این موضوع پرداخته می‌شود.

3- مسائل عددی

برای مقایسه دقت این دو روش، سه معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم بیضوی و سه جریان پتانسیل دوبعدی مورد بررسی قرار می‌گیرد که جزئیات آن در ادامه بیان می‌شود.

3-1- معادله دیفرانسیل اول

معادله دیفرانسیلی اول این تحقیق به شکل زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{\frac{x}{2}} (2 \times 2^y + \frac{2^y x^2}{4} + 2x2^y + 2^y x^2 (\ln(2))^2) \quad (16)$$

که حل تحلیلی این معادله، طبق رابطه بعد است.

$$f(x, y) = x^2 e^{\frac{x}{2}} 2^y \quad (17)$$

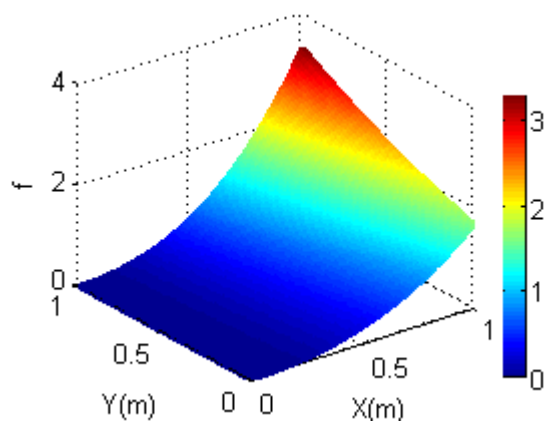
این معادله دیفرانسیل بر روی یک مربع واحد با ابعاد یک متر حل می‌شود. دستگاه معادلات نهایی ناشی از گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} AT_{11} & AT_{12} \\ AT_{21} & AT_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

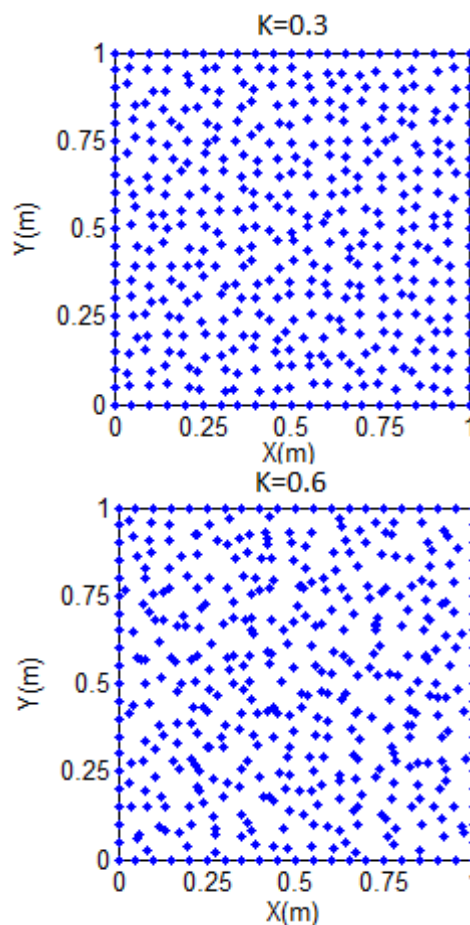
سطر اول در این معادله مربوط به گره‌های مرزی و سطر دوم بیانگر گره‌های داخلی می‌باشد. همچنین AT ، F و B به ترتیب نشان‌دهنده ماتریس ضرایب، بردار مجهولات و بردار معلوم سمت راست می‌باشند. با توجه به مشخص بودن نتایج تحلیلی (معادله (17))

برای بررسی بیشتر قابلیت مدل‌های عددی، از همان توزیع گرهی حالت قبل استفاده می‌شود با این تفاوت که در این حالت اندیس غیریکنواختی گره‌ها $k = 0.6$ در نظر گرفته می‌شود که منجر به توزیع غیریکنواخت‌تر و خطاهای بیشتر هم می‌شود. در این شکل، همان‌طور که مشخص است مجدداً مدل 2 نتایج بهتری نشان می‌دهد که بیانگر قابلیت بیشتر این روش می‌باشد. با توجه به نتایج به‌دست آمده می‌توان تشخیص داد که مدل عددی 2 حساسیت کمتری نسبت به غیریکنواختی گره‌ها نسبت به مدل 1 دارد که مزیت قابل توجهی می‌باشد. لازم به ذکر است مدل 1 با وجود این که خود از دقیق‌ترین مدل‌های عددی روش‌های عددی MPS و حتی SPH می‌باشد دقت آن به مدل شماره 2 نمی‌رسد و فاصله قابل توجهی مشاهده می‌شود. درواقع می‌توان انتظار داشت که بسیاری از مدل‌های عددی بدون شبکه موجود توانایی مدل 2 این تحقیق را ندارند و می‌توان ایده‌های مختلف ریاضی را برای توسعه این مدل عددی به کار برد.

در شکل (3) نتایج عددی مدل 2 برای حل این معادله دیفرانسیل در قالب یک نقشه رنگی نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل مشخص است، نوع تغییرات تابع معادله دیفرانسیل این مسئله به نسبت هموار می‌باشد و فراز و فرودی در آن مشاهده نمی‌شود. در هنگام حل معادلات دیفرانسیل جریان برای به‌دست آوردن میدان فشار نیاز است که یک معادله دیفرانسیل بیضوی نظیر معادله حاضر حل شود. در شرایطی که جریان به شکل ملایم بدون برخورد شدید با موانع باشد انتظار می‌رود میدان فشار هموار و بدون تغییرات شدید حاصل شود که مدل عددی پیشنهادی نشان داد که قابلیت بالایی برای ارائه نتایج منطقی در این شرایط دارد. ضمناً بسیاری از معادلات مکانیک جامدات مانند مسائل الاستیسیته نیز از نوع معادلات دیفرانسیلی بیضوی و یا مرتبه دوم بوده و می‌توان با اطمینان از این روش عددی برای حل آن‌ها استفاده کرد.

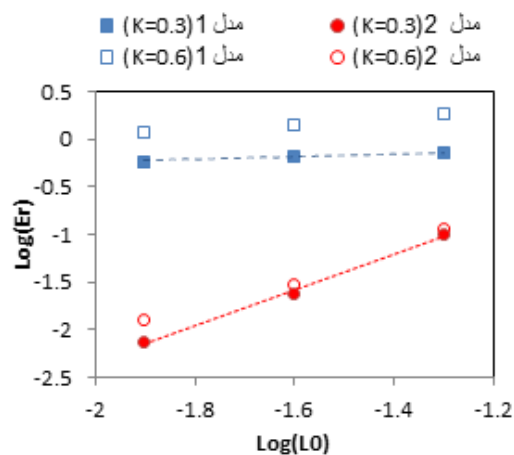


شکل 3- نتایج عددی مدل 2 با $L_0 = 1/80 m$ برای معادله دیفرانسیل اول

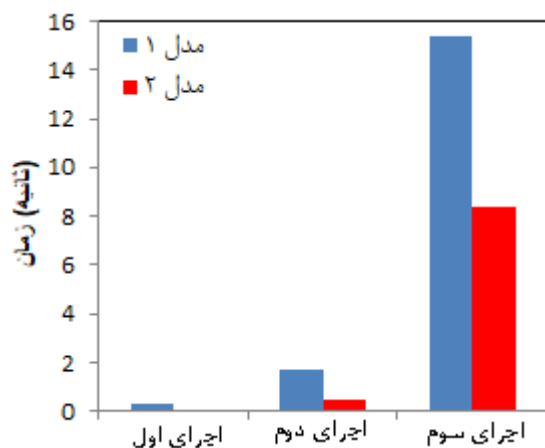


شکل 1- دو نمونه توزیع گرهی غیریکنواخت برای $L_0 = 1/20 m$

مقدار خطای عددی (Er) متوسط درصد خطای گره‌ها می‌باشد که با معلوم بودن نتایج عددی و تحلیلی به‌سادگی قابل محاسبه می‌باشد. در شکل (2) خطاهای دو مدل عددی برای این حالت مقایسه شده‌اند که مدل عددی 2 نتایج به مراتب بهتری تولید می‌کند.



شکل 2- خطاهای عددی معادله دیفرانسیل اول



شکل 5- زمان محاسباتی برای معادله دیفرانسیل اول

3-2- معادلات دیفرانسیل دوم و سوم

برای مقایسه بیشتر عملکرد مدل‌های عددی، دو معادله دیفرانسیل دیگر (دوم و سوم) به شرح زیر مدنظر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -17\pi^2 \sin(\pi x) \sin(4\pi y) \quad (20)$$

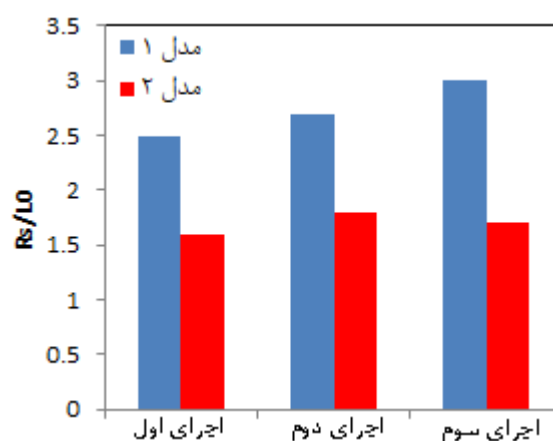
که جواب تحلیلی این دو معادله به ترتیب طبق معادلات زیر می‌باشد:

$$f(x, y) = \sin(\pi x) \sin(4\pi y) \quad (22)$$

$$f(x, y) = \sin(4\pi x) \sin(4\pi y) \quad (23)$$

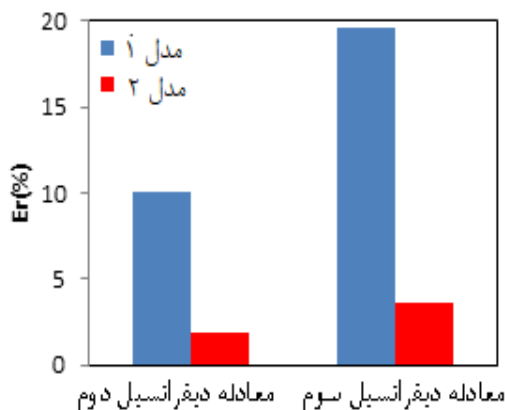
هر دوی این معادلات دیفرانسیل جواب تحلیلی با شکل ناهموار دارند به‌ویژه معادله (21) که حل تحلیلی با فراز و فرودهای فراوان دارد (فرکانس بالا). تولید نتایج عددی با دقت کافی برای چنین حالت‌هایی دشوار می‌باشد. برای حل عددی این دو معادله یک دامنه محاسباتی نامنظم مطابق شکل (6) در نظر گرفته می‌شود که گسسته‌سازی آن با $L_0 = 1/80 \text{ m}$ و $k = 0.3$ انجام می‌شود. نتایج عددی معادله دوم با استفاده از مدل 1 در قالب شکل رنگی در این شکل ارائه شده است. نتایج عددی مدل 2 نیز برای حل معادله دیفرانسیل سوم که نتایج تحلیلی آن بسیار ناهموار می‌باشد در شکل (7) ترسیم شده است که ظاهر رضایت‌بخشی دارد. به عبارت دیگر، به‌وضوح از این شکل می‌توان دریافت که نتایج عددی به دست آمده به‌خوبی رفتار نوسانی نتایج تحلیلی که در قالب تابع سینوسی می‌باشد را تولید می‌کند.

مقدار خطای عددی مدل‌ها متأثر از اندازه شعاع تأثیر هر گره می‌باشد و این عامل همچنین تعیین کننده تعداد گره‌های اطراف گره مرجع است که با آن اندرکنش دارند. مقدار اندازه بهینه این پارامتر از پیش مشخص نیست و با فرآیند سعی و خطا به دست می‌آید. در شکل (4)، مقدار بهینه این پارامتر برای مدل‌های عددی این تحقیق و سه اجرای انجام شده متناظر با $L_0 = 1/20, 1/40, 1/80 \text{ m}$ ($k = 0.3$) نشان داده شده است. با توجه به نتایج این شکل می‌توان گفت اندازه بهینه شعاع تأثیر مدل 2 برای تمامی توزیع‌های گرهی تفاوت چندانی نشان نمی‌دهد درحالی‌که برای مدل عددی اول این پارامتر تغییر بیشتری را نشان می‌دهد. این موضوع برای حل مسائل جریان‌های غیردائمی در دیدگاه لاگرانژی که موقعیت ذرات دائماً در طول زمان تغییر می‌کند بیشتر خودنمایی می‌کند. به عبارت دیگر اندازه بهینه این پارامتر برای مدل عددی 2 با تغییر پیکربندی ذرات قاعداً تغییر زیادی نداشته و می‌توان خطاهای عددی ناشی از این شرایط را بهتر کنترل کرد. علاوه بر این، اندازه شعاع تأثیر بهینه مدل عددی 2 از مدل 1 کمتر می‌باشد که منجر به تعداد محاسبات کمتری خواهد شد.



شکل 4- شعاع تأثیر بهینه برای معادله دیفرانسیل اول

شکل (5) نشان می‌دهد هزینه محاسباتی مدل عددی 2 برای سه اجرای اشاره شده به‌میزان قابل توجهی از مدل 1 کمتر می‌باشد. در واقع، مدل 2 هم دقت بیشتری داشته (نتایج شکل (2)) و هم زمان محاسباتی کمتری نیز طلب می‌کند که برتری قاطع این مدل را اثبات می‌کند. در مدل عددی 1 برای هر گره محاسباتی نیاز است تابع MLS محاسبه شود که هزینه قابل توجهی نیاز دارد (Zheng و همکاران، 2017) درحالی‌که محاسبه معکوس یک ماتریس 6×6 (معادله (14)) برای تمامی گره‌ها زمان محاسباتی کمتری نسبت به محاسبه توابع MLS نیاز دارد.



شکل 8- خطاهای عددی معادلات دیفرانسیلی دوم و سوم

3-3- جریان های پتانسیل

هنگامی که عامل لزجت در جریان سیال ناچیز بوده و شرایط غیرچرخی بودن نیز فراهم باشد جریان های پتانسیل شکل می گیرند که به وفور در طبیعت مشاهده می شوند. چنین جریاناتی معمولاً دور از مرزهای جامد و خارج از لایه مرزی مشاهده می شوند. از جمله این جریان ها می توان به جریان اطراف سرریز سدها، بال هواپیما، بدنه خودرو و زیر دریچه ها اشاره کرد که معادله جاکم بر آن ها در قالب معادله دیفرانسیل بیضوی به شکل زیر قابل بیان می باشد.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (24)$$

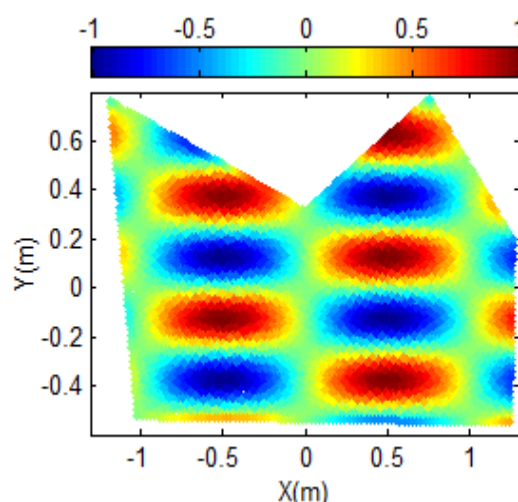
که ψ بیانگر تابع جریان می باشد. در این بخش، سه جریان پتانسیل کلاسیک مورد بررسی قرار می گیرد که دامنه محاسباتی مدنظر یک مربع (با مرکزیت مبدأ مختصات) به اندازه $0/4$ متر می باشد. برای جلوگیری از شرایط تکنیکی، یک دایره با شعاع مشخص (Rc) با مرکزیت مبدأ مختصات از دامنه محاسباتی حذف می شود. توزیع گرهی برای حل مسائل جریان پتانسیل با لحاظ کردن شاخص بی نظمی $k = 0.2$ صورت می گیرد.

3-3-1- جریان گردابه

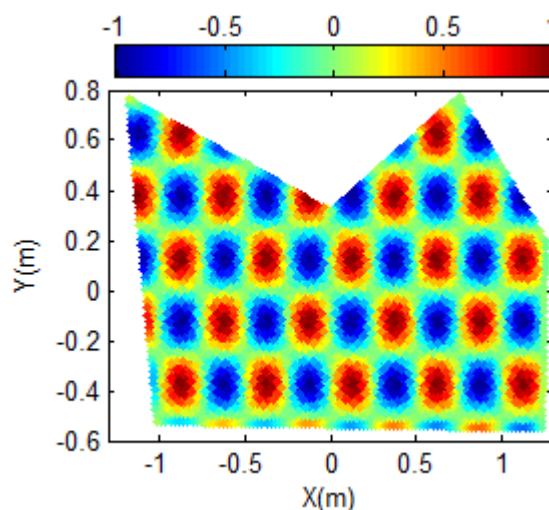
مسئله اول جریان های پتانسیل این پژوهش جریان گردابه می باشد که جواب تحلیلی آن طبق معادله زیر است:

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r) \quad (25)$$

که r بردار مکان و Γ شدت گردابه می باشد و در این تحقیق برابر با 2π فرض شده است. برای بررسی رفتار عددی مدل های حاضر، جریان گردابه بر روی دامنه محاسباتی ذکر شده با لحاظ کردن $Rc = 4 \text{ cm}$ و $L_0 = 1/150, 1/175, 1/200 \text{ m}$ مورد

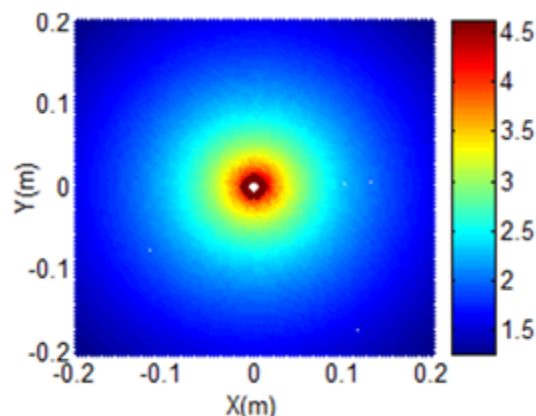


شکل 6- حل عددی معادله دیفرانسیل دوم با مدل 1

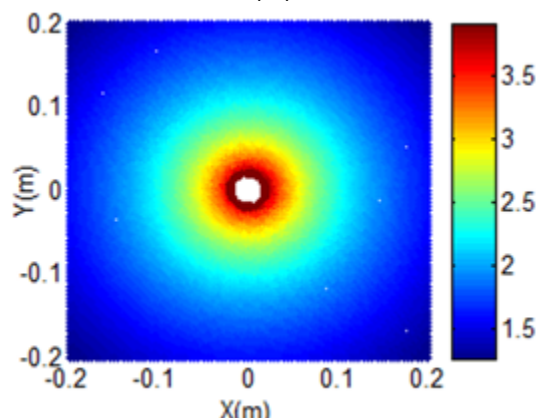


شکل 7- حل عددی معادله دیفرانسیل سوم با مدل 2

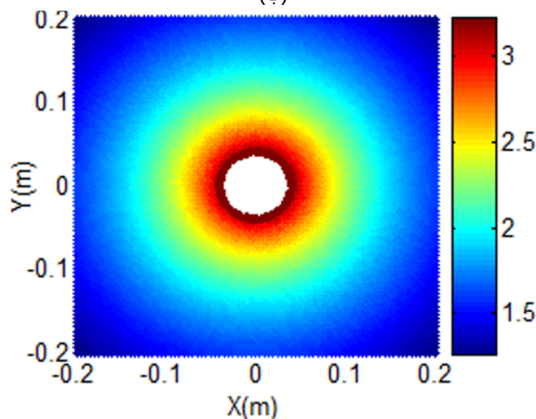
در شکل (8) خطاهای دو مدل عددی مقایسه شده اند که در آن دقت بالاتر مدل عددی دوم آشکار می باشد. لازم به ذکر است به دست آوردن نتایج عددی با دقت قابل قبول برای معادله دیفرانسیل سوم که نتایج تحلیلی آن فراز و فرود زیادی دارد دشوار می باشد. چنین معادلات دیفرانسیلی توصیف کننده بسیاری از پدیده های طبیعی هستند. به عنوان مثال، هنگامی که در جریان سیال موانع متعدد با بی نظمی زیاد وجود داشته باشند انتظار می رود میدان فشار جریان و بقیه ویژگی های دیگر جریان دارای تغییرات زیادی باشند. نتایج ارائه شده، قابلیت مدل عددی پیشنهادی را برای تحلیل چنین مسائلی نشان می دهد. به طور کلی حل معادلات دیفرانسیلی بیضوی (پواسون) در بسیاری از شاخه های مهندسی نظیر برق و مکانیک بسیار مهم می باشد. مدل عددی 2 برای تحلیل این مسائل حتی در شرایط پیچیده گزینه قابل توجهی می باشد.



(الف)



(ب)

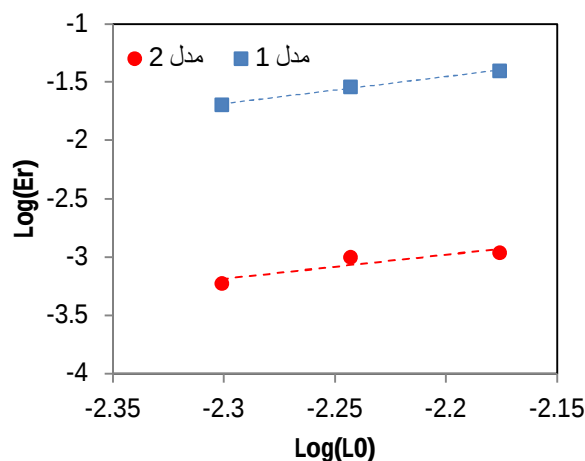


(ج)

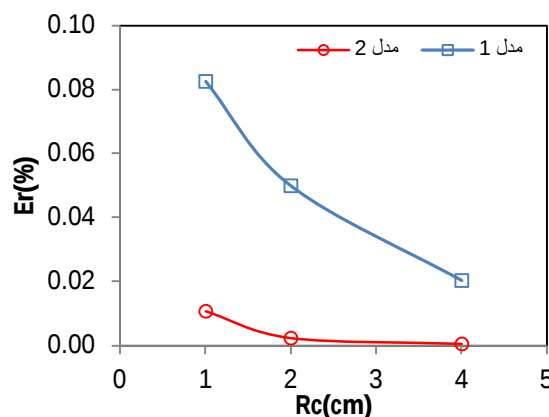
شکل 11- نتایج عددی مدل 2 برای تابع جریان مسئله گردابه و دایره با شعاع‌های: الف) 1، ب) 2، ج) 4 سانتی‌متر

برای اثبات کارآمدی بیشتر مدل شماره 2، توزیع گرهی تعریف شده نیز در نظر گرفته می‌شود که در آن تراکم گرهی در نواحی مختلف دامنه محاسباتی متفاوت در نظر گرفته می‌شود، به عبارت بهتر، در مناطقی که حدس زده می‌شود شدت تغییرات جواب مسئله کمتر است توزیع گرهی تنک‌تر و در بقیه نواحی از توزیع گرهی متراکم‌تر استفاده می‌شود که در این شرایط بسیاری از روش‌های عددی ممکن است نتایج رضایت‌بخشی تولید نکنند، درواقع با کاهش تراکم گرهی در برخی نواحی مسئله می‌توان

بررسی قرار می‌گیرد. خطاهای این سه اجرا در شکل (9) ارائه شده است که مطابق انتظار مدل 2 نتایج به مراتب بهتری از مدل 1 تولید می‌کند. برای به تصویر کشیدن بهتر توانمندی مدل 2، مسئله برای سه دایره با شعاع‌های مختلف ($R_c = 1, 2, 4$ cm) مجدداً حل می‌شود که نتایج این شرایط با لحاظ کردن $L_0 = 1/200$ m برای توزیع گرهی در شکل (10) به نمایش در آمده است. مدل 2 حتی برای دایره با شعاع کم که نزدیک به حالت تکنیکی نیز می‌باشد خطای کمی تولید می‌کند. این در حالی است که خطاهای مدل شماره 1 برای شعاع‌های کمتر دایره به شدت افزایش می‌یابد. در شکل (11) نتایج مدل عددی 2 برای شبیه‌سازی جریان به‌ازای این سه شعاع نشان داده شده است که شباهت بسیاری به همدیگر دارند که بیانگر توانمندی این مدل عددی در تولید نتایج مطلوب حتی در حالت نزدیک به تکنیکی می‌باشد.



شکل 9- خطاهای مدل‌های عددی برای جریان گردابه برای دایره با شعاع 4 سانتی‌متر



شکل 10- خطاهای مدل‌های عددی برای جریان گردابه برای دایره با شعاع‌های مختلف

مانند هوا و یا آب حرکت کند، معادلات دیفرانسیلی توصیف کننده جریان (به علت محدود بودن اثر لزجت در نواحی اطراف مرز جامد) نظیر همین جریان های پتانسیل می باشند. بنابراین توسعه روش های عددی کارآمد برای حل این چنین مسائلی کاربرد عملی قابل توجهی دارد.

3-3-2- جریان های پتانسیل ترکیبی

در بخش قبل به اهمیت و کاربرد حل جریان های پتانسیل و جریان های شبیه به آن اشاره شد. با توجه به خطی بودن معادلات دیفرانسیلی جریان های پتانسیل و همچنین اصل برهم نهی می توان جریان های پیچیده تر را با ترکیب آن ها فرمول بندی کرد. در این بخش دو جریان پتانسیل ترکیبی برای بررسی دقت دو مدل عددی مدنظر قرار می گیرد. در حالت اول با ترکیب جریان نقطه سکون و جریان گردابی، می توان به جریان پتانسیلی با تابع جریانی مطابق معادله زیر دست یافت:

$$\psi = 2Axy - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r) \quad (26)$$

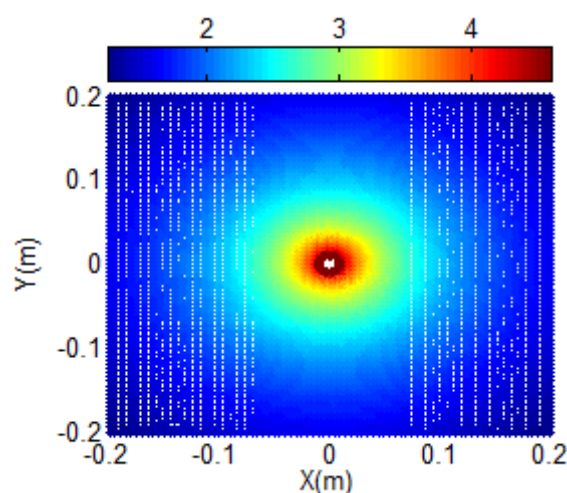
در این تحقیق $A = 10$ و $\Gamma = 2\pi/5$ فرض شده است. جمله اول معادله بالا بیانگر جریان نقطه سکون و جمله دوم نشان دهنده جریان گردابی می باشد. همچنین دایره حذف شده از دامنه محاسباتی شعاعی برابر $Rc = 3 \text{ cm}$ دارد و برای توزیع گرهی $L_0 = 1/100 \text{ m}$ در نظر گرفته شده است. معادله پتانسیل دوم با ترکیب جریان یکنواخت و دیپول به دست می آید که تابع جریان آن طبق معادله زیر می باشد:

$$\psi = U_{\infty}x + \frac{\kappa}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (27)$$

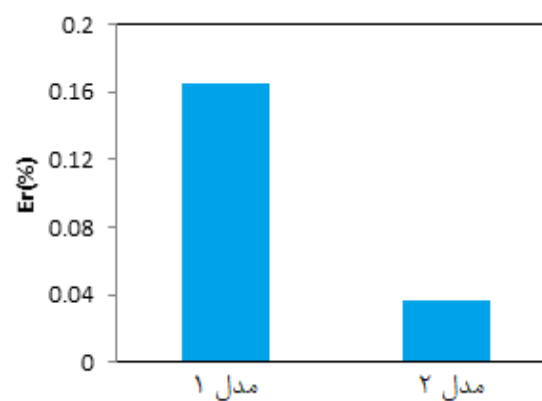
که U_{∞} بیانگر سرعت جریان یکنواخت است و برابر واحد در نظر گرفته شده است و پارامتر κ نیز بیانگر ویژگی جریان دیپول می باشد که عبارت $\kappa/2\pi$ در معادله بالا برابر $1/100$ لحاظ شده است. همچنین شعاع دایره دامنه محاسباتی برابر $Rc = 2 \text{ cm}$ است و توزیع گرهی با $L_0 = 1/300 \text{ m}$ تولید شده است.

در شکل های (14) و (15) به ترتیب میدان جریان محاسباتی مدل عددی 2 در قالب نقشه رنگی برای دو جریان پتانسیل ترکیبی نشان داده شده است. در شکل (16) نیز خطاهای عددی دو مدل موجود برای این دو جریان ترکیبی مقایسه شده اند که مجدداً بیانگر دقت قابل توجه مدل عددی دوم می باشد. در واقع از مجموعه نتایج ارائه شده این تحقیق قابلیت بالاتر مدل عددی 2 را می توان نتیجه گرفت.

هزینه محاسباتی را کاهش داد که در شبیه سازی های عددی بسیار مرسوم می باشد. در شکل (12) یک نمونه توزیع گرهی تظریف شده با شرایط $Rc = 1 \text{ cm}$ و $L_0 = 1/200 \text{ m}$ برای حل این مسئله در نظر گرفته می شود که در آن نقاط بیشتری در مرکز دامنه محاسباتی قرار داده می شوند. نتایج مسئله شباهت زیادی به شکل (11-الف) دارد که به خوبی توانمندی مدل عددی 2 را نمایان می سازد. خطای دو مدل عددی نیز برای این مسئله در شکل (13) ترسیم شده است که مدل شماره 2 نسبت به مدل شماره 1 برتری قابل توجهی نشان می دهد.



شکل 12- نتایج عددی مدل 2 برای شبیه سازی تابع جریان گردابه با توزیع گرهی تظریف شده



شکل 13- خطاهای مدل های عددی برای جریان گردابه با توزیع گرهی تظریف شده

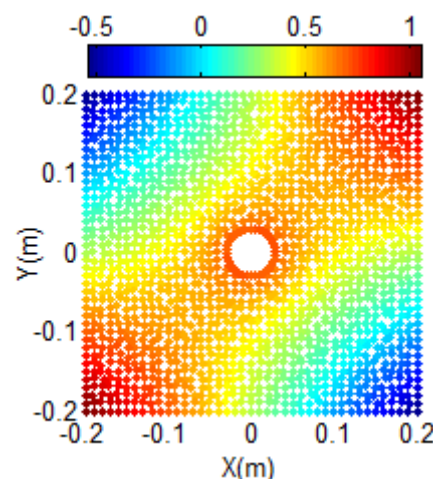
اگرچه شرایط خاصی باید حکم فرما باشد تا یک جریان پتانسیل شکل بگیرد، با این وجود با تقریب مناسب می توان در طبیعت موارد زیادی از این جریان ها را مشاهده کرد. به عنوان مثال هنگامی که یک جسم جامد مانند گلوله، خودرو، هواپیما، موشک و یا زیردریایی با ابعاد کوچک در یک محیط بزرگ از یک سیال

4- نتیجه‌گیری

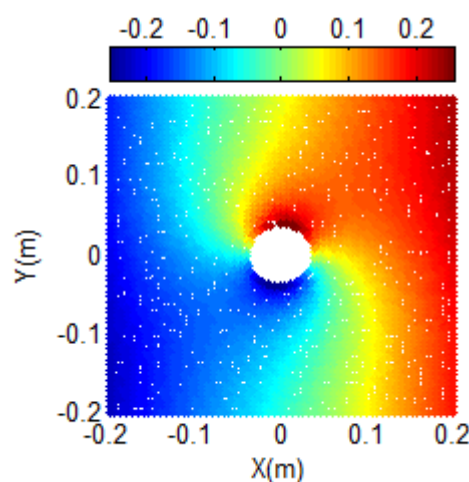
تحقیقات زیادی تاکنون برای ارتقاء روش‌های MPS و SPH به‌عنوان دو روش شاخص عددی بدون شبکه با عملکرد تقریباً برابر انجام شده است. در این پژوهش، دقت یکی از کارآمدترین مدل‌های پیشنهاد شده روش MPS (Shobeyri, 2024b) (مدل 1) با یک روش عددی بدون شبکه مبتنی بر بسط تیلور و حداقل مربعات (مدل 2) در حل معادلات دیفرانسیلی مرتبه دوم از جمله جریان‌های پتانسیل مقایسه شد. نتایج به‌روشنی بیانگر دقت بالاتر و هزینه محاسباتی کمتر مدل 2 می‌باشد. فرمول‌بندی روش‌هایی مانند MPS و SPH بر اساس یک میانگین‌گیری وزنی ساده می‌باشد و با ایده‌های مختلف ریاضی سعی شده است مدل‌های ارتقاء یافته آن‌ها ارائه شوند که این مبنای فرمول‌بندی به‌نوعی محدودیت برای آن‌ها به‌وجود می‌آورد. در مقابل، مدل عددی 2 را می‌توان به‌راحتی با لحاظ کردن جملات مرتبه بالاتر بسط تیلور به‌دقت زیاده‌تر رساند. همچنین در این روش تمامی مرتبه‌های مشتق دلخواه را هم‌زمان می‌توان محاسبه کرد و با استفاده از آن بسیاری از مسائل مهندسی که در قالب معادلات دیفرانسیل شامل مشتقات مرتبه اول و دوم هستند را به‌سادگی حل کرد. با این وجود، این مدل عددی باید برای مسائل پیچیده‌تر مانند جریان سیالات به‌ویژه در دیدگاه لاگرانژی نیز مورد بررسی قرار گیرد و کاستی‌های احتمالی آن مشخص و مرتفع شوند. به‌عنوان مثال در مسائل پیچیده جریان که ذرات سیال ممکن است پراکنده شوند در معکوس کردن ماتریس مورد نیاز برای تقریب مشتقات تابع ممکن است خطاهایی رخ دهد. به‌نظر می‌رسد در مسائل مکانیک جامدات که گرہ‌های محاسباتی حرکت چندانی ندارند این روش دچار مشکل جدی نشود. همین شرایط نیز برای مسائل مکانیک سیالات در دیدگاه اویلری نیز صادق می‌باشد.

5- مراجع

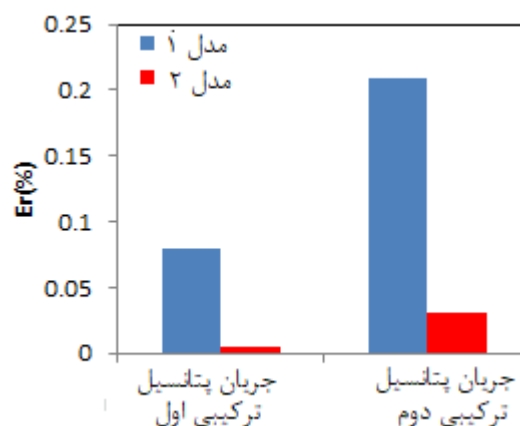
- Chen X, Cui J, Li MY, "Numerical simulation and energy extraction power fitting of OWSCs under regular waves using SPH method", Ocean Engineering, 2023, 283, 115077.
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2023.115077>
- Daneshvar FA, Rakhshandehroo GR, Talebbeydokhti, N, "New modified gradient models for MPS method applied to free-surface flow simulations", Applied Ocean Research, 2017, 66, 95-116.
<https://doi.org/10.1016/j.apor.2017.05.009>
- Duan G, Koshizuka S, Yamaji A, Chen B, Li X, Tamai T, "An accurate and stable multiphase moving particle semi-implicit method based on a corrective matrix for all particle interaction models", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2018, 115 (10), 1287-1314.
<https://doi.org/10.1002/nme.5844>
- Gingold RA, Monaghan JJ, "Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-



شکل 14- نتایج عددی مدل 2 برای شبیه‌سازی جریان پتانسیل ترکیبی اول



شکل 15- نتایج عددی مدل 2 برای شبیه‌سازی جریان پتانسیل ترکیبی دوم



شکل 16- خطاهای مدل‌های عددی برای جریان‌های پتانسیل ترکیبی

- Shobeyri G, "Improved MPS models for simulating free surface flows", *Mathematics and Computers in Simulation*, 2024a, 218, 79-97.
<https://doi.org/10.1016/j.matcom.2023.11.015>
- Shobeyri G, "Novel SPH and MPS laplacian models improved by mls method for solving poisson equations", *Numerical Methods in Civil Engineering*, 2024b, 9 (2), 29-39.
<https://doi.org/10.61186/NMCE.2406.1061>
- Shobeyri G, Ghoreishi Najafabadi S, Abed M, "A Comparative Study on Two Mixed Least Squares Meshless Models with Improved SPH, MPS and CPM Methods to Solve Elasticity Problems", *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, 2024, 48 (4), 1565-1580.
<https://doi.org/10.1007/s40997-023-00742-x>
- Sun Z, Djidjeli K, Xing JT, "Modified MPS method for the 2D fluid structure interaction problem with free surface", *Computers and Fluids*, 2015, 122, 47-65.
<https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2015.08.017>
- Tan H, Chen S, "A hybrid DEM-SPH model for deformable landslide and its generated surge waves", *Advances in water resources*, 2017, 108, 256-276.
<https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2017.07.023>
- Wu J, Zhang G, Sun Z, Yan H, Zhou B, "An improved MPS method for simulating multiphase flows characterized by high-density ratios and violent deformation of interface", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2023, 412, 116103.
<https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116103>
- Zha R, Peng H, Qiu W, "An improved higher-order moving particle semi-implicit method for simulations of two-dimensional hydroelastic slamming", *Physics of Fluids*, 2021, 33 (3).
<https://doi.org/10.1063/5.0033491>
- Zhang ZL, Walayat K, Chang JZ, Liu MB, "Meshfree modeling of a fluid-particle two-phase flow with an improved SPH method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2018, 116 (8), 530-569. <https://doi.org/10.1002/nme.5935>
- Zhang GY, Zhao WW, Wan DC, "Numerical simulations of sloshing waves in vertically excited square tank by improved MPS method", *Journal of Hydrodynamics*, 2022, 34 (1), 76-84.
<https://doi.org/10.1007/s42241-022-0008-5>
- Zheng X, Ma Q, Shao S, Khayyer A, Zheng X, Ma Q, Shao S, Khayyer A, "Modelling of violent water wave propagation and impact by incompressible SPH with first-order consistent kernel interpolation scheme", *Water*, 2017, 9 (6), 400.
<https://doi.org/10.3390/w9060400>
- spherical stars", *Monthly Notices of The Royal Astronomical Society*, 1977, 181 (3), 375-389.
<https://doi.org/10.1093/mnras/181.3.375>
- Gou W, Zhang S, Zheng Y, "Improvement of pressure calculations in the moving particle semi-implicit method for free-surface flows", *International Journal of Computational Methods*, 2020, 17 (09), 1950062.
<https://doi.org/10.1142/S0219876219500622>
- Han L, Hu X, "SPH modeling of fluid-structure interaction", *Journal of Hydrodynamics*, 2018, 30, 62-69.
<https://doi.org/10.1007/s42241-018-0006-9>
- Jandaghian M, Shakibaeinia A, "An enhanced weakly-compressible MPS method for free-surface flows", *Computer methods in Applied mechanics and Engineering*, 2020, 360, 112771.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.11447>
- Koh CG, Gao M, Luo C, "A new particle method for simulation of incompressible free surface flow problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2012, 89 (12), 1582-1604.
<https://doi.org/10.1002/nme.3303>
- Li D, Zhang H, Qin G, "A modified MPS method with a split-pressure Poisson equation and a virtual particle for simulating free surface flows", *Journal of Marine Science and Engineering*, 2023, 11 (1), 215.
<https://doi.org/10.3390/jmse11010215>
- Matsunaga T, Koshizuka S, "Stabilized LSMPS method for complex free-surface flow simulation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2022, 389, 114416.
<https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.114416>
- Mitsume N, Yoshimura S, Murotani K, Yamada T, "MPS-FEM partitioned coupling approach for fluid-structure interaction with free surface flow", *International Journal of Computational Methods*, 2014, 11 (4), 1350101.
<https://doi.org/10.1142/S0219876213501016>
- Pan X, Huai-Xin Z, Xue-Yao S, "Numerical simulation of sloshing with large deforming free surface by MPS-LES method", *China Ocean Engineering*, 2012 26 (4), 653-668.
<https://doi.org/10.1007/s13344-012-0049-6>
- Peer A, Gissler C, Band S, Teschner M, "An implicit SPH formulation for incompressible linearly elastic solids", *Computer Graphics Forum*, 2018, 37 (6), 135-148. <https://doi.org/10.1111/cgf.13317>
- Razavitoosi SL, Ayyoubzadeh SA, Valizadeh A, "Two-phase SPH modelling of waves caused by dam break over a movable bed", *International Journal of Sediment Research*, 2014, 29 (3), 344-356.
[https://doi.org/10.1016/S1001-6279\(14\)60049-4](https://doi.org/10.1016/S1001-6279(14)60049-4)
- Shobeyri G, Madadi HR, "An improvement in MPS method using Voronoi diagram and a new kernel function", *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2018, 40, 1-10. <https://doi.org/10.1007/s40430-018-1121-9>
- Shobeyri G, "Using a modified MPS gradient model to improve accuracy of SPH method for Poisson equations", *Computational Particle Mechanics*, 2023, 5, 1113-1126.
<https://doi.org/10.1007/s40571-022-00549-8>