

آنالیز انتشار امواج طولی در مواد گرادیان ترکیبی با استفاده از روش المان موج

محسن میرزاجانی*^۱ و کامبیز فلسفیان^۲

^۱ استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی مرنند، دانشگاه تبریز

^۲ استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی مرنند، دانشگاه تبریز

(دریافت: ۰۰/۰۰/۰۰، پذیرش: ۰۰/۰۰/۰۰، نشر آنلاین: ۰۰/۰۰/۰۰)

چکیده

این مقاله به بررسی پدیده پیچیده انتشار امواج طولی در مواد گرادیان ترکیبی (FGM) می‌پردازد. برخلاف مواد همگن سنتی که خواص ثابتی در سراسر ساختار خود دارند، مواد FGM تغییرات پیوسته‌ای در خواص خود در سراسر ساختارشان نشان می‌دهند. این ناهمگنی ذاتی، چالش‌های منحصر به فردی را برای تحلیل رفتار انتشار امواج ایجاد می‌کند. این مطالعه از روش المان موج که یک تکنیک عددی قدرتمند و رایج برای حل مسائل دینامیکی در سازه‌های پیچیده است، استفاده می‌کند. این روش با در نظر گرفتن تغییرات تدریجی خواص ماده در طول میله، امکان تحلیل مؤثر انتشار امواج در FGM را فراهم می‌کند. نتایج به دست آمده، تفاوت‌های قابل توجهی را در انتشار امواج بین مواد FGM و مواد همگن نشان می‌دهد. در مواد FGM، ویژگی‌های موج مانند سرعت، طول موج و دامنه، به طور پیوسته در طول ماده تغییر می‌کنند. این رفتار متمایز را می‌توان مستقیماً به ناهمگنی خواص ماده در FGM نسبت داد. این یافته، اهمیت در نظر گرفتن تغییرات خواص ماده را در مقایسه با مواد همگن، هنگام تحلیل انتشار امواج در FGM برجسته می‌کند.

کلیدواژه‌ها: انتشار موج؛ مواد گرادیان ترکیبی؛ روش المان موج؛ ناهمگنی؛ خواص مواد

۱- مقدمه

درک عمیق‌تری از رفتار موج در سیستم‌های مختلف مواد را به ارمان خواهد آورد.

مواد ویسکوالاستیک، که با مکانیزم‌های ذاتی اتلاف انرژی مشخص می‌شوند، بستر اصلی شکل‌گیری امواج غیرهمگن هستند. بررسی مودهای موج و پراکندگی در محیط‌های پاشنده، باعث مشخص شدن برهمکنش‌های پیچیده بین سرعت انتشار، ثابت‌های اتلاف و پدیده‌های وابسته به فرکانس می‌شود. روابط پاشندگی، همبستگی پیچیده بین فرکانس یک موج و عدد موج مربوط را مشخص می‌کنند (Gavassino و همکاران، ۲۰۲۴). روش‌های همگن‌سازی با فرکانس بالا نقش مهمی را در استخراج و تعیین خواص مؤثر مرتبط با محیط‌های پاشنده ایفا می‌کنند (Touboul و همکاران، ۲۰۲۴). اندرکنش مودهای موج وابسته به فرکانس است، که الگوریتم‌های مرتب‌سازی مودها برای دسته‌بندی مودهای امواج و برای تمایز بین این مودها در سازه‌های پیچیده مورد استفاده قرار می‌گیرند (Aslam و همکاران، ۲۰۲۴).

در حوزه انتشار امواج، امواج صفحه‌ای همگن به عنوان یک مسئله بنیادی در نظر گرفته می‌شوند. این امواج که با معادله $u = Ae^{i(kx - \omega t)}$ توصیف می‌شوند، دارای دامنه موج (A) و بردار موج (k) با مقادیر حقیقی هستند که نشان دهنده انتشار موج در یک جامد همگن، خطی و بدون پاشندگی است. با این حال، برای موادی که خاصیت پاشندگی^۱ (خطی) را نشان می‌دهند، ساده‌ترین شکل موج از این حالت ایده‌آل منحرف می‌شود. در حالی که موج ساختار مشابهی را حفظ می‌کند، دامنه موج (A) و بردار موج (k) مقادیر مختلط پیدا می‌کنند. این تغییر از مقادیر حقیقی به مقادیر مختلط مستلزم ایجاد تمایز بین آنها است. در چنین مواردی معمولاً از اصطلاح "موج غیرهمگن" استفاده می‌شود. در اصل، اصطلاح "موج غیرهمگن" می‌تواند معنای دوگانه داشته باشد. در زمینه خواص مواد، نشان‌دهنده تغییرات فضایی است؛ و در زمینه انتشار موج از طریق محیط‌های اتلاف‌کننده، نشان‌دهنده یک بردار k مختلط و با تغییر دامنه مرتبط است. تشخیص این دوگانگی،

¹ dispersion

* نویسنده مسئول؛ شماره تماس: ۰۰۰-۰۰۰۰۰۰۰۰

آدرس ایمیل: aaaa@cccc.ac.ir (ن. اول)، bbbb@cccc.ac.ir (ن. دوم)

این تمرکز تنش می‌تواند منجر به ترک خوردگی و خرابی در وجه مشترک بین فلز و سرامیک شود و مزایای بالقوه‌ی استفاده از این کامپوزیت را از بین ببرد.

مواد FGM با ارائه راه‌حلی برای این مشکل، گامی انقلابی در علم مواد برداشته‌اند. این مواد با داشتن خواصی که به طور پیوسته در فضا تغییر می‌کند، می‌توانند نیازهای متناقض را در یک جزء واحد را برآورده کنند. به عنوان مثال، می‌توان FGM را طوری طراحی کرد که در یک سمت هدایت حرارتی بالایی داشته باشد و در سمت دیگر عایق یا سخت‌تر باشد. این قابلیت FGMها، کاربردهای گسترده‌ای را در زمینه‌های مختلف مانند مهندسی هوافضا، پزشکی و انرژی باز می‌کند. با استفاده از FGMها می‌توان قطعاتی با عملکرد و بازدهی بالاتر، وزن کمتر و طول عمر بیشتر تولید کرد. همچنین، آنها عملکرد عالی را در زمینه‌هایی مانند مدیریت حرارتی، یکپارچگی سازه‌ای در محیط‌های شدید و مقاومت در برابر سایش ارائه می‌دهند.

برخلاف کامپوزیت‌های رایج که دارای مرز مشخصی بین مواد مختلف هستند، مواد FGM خواص الاستیک و حرارتی را به طور تدریجی و پیوسته در سرتاسر جزء تغییر می‌دهند. این تغییر تدریجی، جهش‌های تنش را که معمولاً در محل اتصال مواد مختلف در کامپوزیت‌های سنتی ایجاد می‌شود، به حداقل می‌رساند. به این ترتیب، یکپارچگی و عملکرد سازه‌ای قطعه به طور قابل توجهی بهبود می‌یابد.

برای روشن‌تر شدن موضوع، لازم است به کامپوزیت‌های ماتریس فلزی (MMCs) به عنوان رویکردی دیگر برای ترکیب خواص فلزات و سرامیک‌ها اشاره کنیم. در MMCها، تقویت‌کننده‌های سرامیکی مانند الیاف، سبیلک‌ها یا ذرات در یک ماتریس فلزی تعبیه می‌شوند. با وجود مزایای خاص MMCها، ساختار آنها اغلب شامل فازهای مجزا در مقیاس‌های مختلف (از ۱۰۰ نانومتر تا میلی‌متر) است. این فازهای مجزا می‌توانند نقاطی با تمرکز تنش ایجاد کنند که عملکرد آنها را در مقایسه با مواد FGM که دارای گرادیان‌های پیوسته خواص هستند، محدود می‌کند.

در مقایسه با کامپوزیت‌های سنتی، طراحی مواد FGM پیچیده‌تر است. اما این پیچیدگی با مزایای قابل توجهی همراه است. FGMها با حذف رابط‌های ناگهانی بین مواد و ایجاد تغییراتی کنترل شده و پیوسته در خواص، عملکرد بهتری را در کاربردهایی ارائه می‌دهند که به ترکیبی بهینه از قابلیت‌ها در یک جزء واحد نیاز دارند.

تحلیل انتشار امواج در مواد گرادیان ترکیبی (FGM) به دلیل ناهمگنی ذاتی این مواد، چالش علمی قابل توجهی به شمار می‌رود. برخلاف مواد همگن که خواصشان در تمام نقاط یکسان است، FGMها دارای خواص الاستیک و اینرسی متغیر در فضا هستند.

این امر به خوبی مشخص شده است که امواج هارمونیک زمانی که از محیط‌های اتلاف‌کننده عبور می‌کنند، دارای عدد موج با مقدار مختلط هستند. با این حال، امواج غیرهمگن، همان‌طور که در (Gopalakrishnan, ۲۰۱۶) به طور جامع بررسی شده است، شامل امواجی هستند که بردار موج آنها $(k = k_1 + jk_2)$ در این عبارت، k_1 و k_2 به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی بردار موج را نشان می‌دهند. نکته‌ی قابل توجه این است که در امواج غیرهمگن، k_1 و k_2 لزوماً هم‌راستا نیستند. این عدم هم‌راستایی، امواج غیرهمگن را از نمونه‌های ساده‌تر آنها متمایز می‌کند، که در این حالت بردار موج کاملاً حقیقی باقی می‌ماند و جهت انتشار و تضعیف هم‌جهت می‌شوند. وجود بردار موج غیرموازی در امواج غیرهمگن، منجر به پدیده‌ی جالب توجهی می‌گردد که در ادامه توضیح داده می‌شود. به دلیل وجود مؤلفه‌ی موهومی (k_2) ، دامنه‌ی موج به طور نمایی با افزایش فاصله کاهش می‌یابد. با این حال، مؤلفه‌ی حقیقی (k_1) جهت کلی انتشار را تعیین می‌کند که می‌تواند از جهت تضعیف (تحت تأثیر k_2) منحرف شود. این جداسازی بین جهت‌های انتشار و تضعیف، یک ویژگی منحصر به فرد امواج غیرهمگن است و دیدگاه ارزشمندی در مورد رفتار موج در مواد با اتلاف ارائه می‌دهد.

علاوه بر مواد ویسکوالاستیک، دسته‌ی دیگری از محیط‌ها که شامل انتشار امواج غیرهمگن می‌شوند، مواد گرادیان ترکیبی (FGM) هستند. برخلاف نمونه‌های همگن که خواص یکسانی در تمام نقاط دارند، مواد FGM دارای خواص الاستیک و اینرسی متغیر فضایی هستند. این تغییر می‌تواند به صورت پیوسته رخ دهد و برای دستیابی به اهداف عملکردی خاص تنظیم شود. در طبیعت، اکثر مواد در سطح میکروسکوپی تا حدی ناهمگنی از خود نشان می‌دهند. با این حال، برای بسیاری از کاربردهای مهندسی، اغلب به دلیل ساده‌تر بودن، مواد به صورت همگن در نظر گرفته می‌شوند. به طور سنتی، فلزها و سایر مواد صنعتی تا حد زیادی همگن فرض شده و نقص‌های ذاتی آنها نادیده گرفته می‌شد. با این حال، پیشرفت‌های اخیر امکان طراحی و ساخت مواد FGM با تغییرات خواص کنترل‌شده دقیق در فضا را فراهم کرده است.

نیاز به مواد با کارایی بالاتر و عملکردهای متنوع، محرک اصلی توسعه‌ی مواد گرادیان ترکیبی (FGM) است. مواد متعارف اغلب در برآوردن این نیازها، به ویژه در مواردی که تقاضاهای متناقضی وجود دارد، ناتوان هستند. به عنوان مثال، ممکن است در یک کاربرد خاص به طور همزمان به هدایت حرارتی بالا در یک سطح و عایق یا سختی بیشتر در سطح دیگر نیاز باشد. برای درک بهتر این چالش، در صورتی که یک کامپوزیت فلز-سرامیک معمولی در نظر گرفته شود؛ به دلیل تفاوت قابل توجه در مدول الاستیسیته بین فلز و سرامیک، تنش‌های زیادی بین سطوح آنها ایجاد می‌شود.

روش شامل ترکیب هسته‌های سه‌بعدی با auxetic با صفحات رویی کامپوزیت با FGM (مواد با خواص تدریجی) می‌شود. محققان برای بررسی عملکرد این طراحی جدید، از تکنیک‌های پیشرفته مدل‌سازی استفاده کرده و تأثیر دما و ضربه را بر روی پوسته‌ها شبیه‌سازی کرده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که این روش نوین پتانسیل بالایی برای کاربرد در مهندسی دریا دارد، زیرا پوسته‌های ساندویچی ساخته شده با این روش می‌توانند هم وزن کمی داشته باشند و هم در برابر ضربه‌های شدید دریایی مقاوم باشند. در (Liu و همکاران، ۲۰۲۱)، محققان روشی نوین برای بررسی رفتار امواج در میکرو/نانو-صفحات غیرهمسانگرد با FGM ارائه کرده‌اند. این روش جدید که "چندجمله‌ای ارتودنسی لژاندر توسعه‌یافته" نام دارد، به حل کارآمدتر مسائل مربوط به این نوع صفحات و اجتناب از روش‌های پیچیده سلسله مراتبی کمک می‌کند. برای سنجش دقت این روش، نتایج آن با رویکرد دیگری مقایسه شده است. در این مطالعه، محققان تأثیر ابعاد و گرادیان‌های مواد بر رفتار موج را بررسی کرده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که ابعاد صفحه بر الگوهای موج تأثیر می‌گذارد و باعث ایجاد چین و چروک در آنها می‌شود. در مقابل، گرادیان‌های مواد بر دامنه و برد امواج تأثیر می‌گذارند. همچنین، در مورد امواج SH، مشاهده شده است که پارامترهای ابعادی به طور متفاوتی بر فرکانس قطع و روند منحنی پاشندگی امواج تأثیر می‌گذارند. در (Zhang و همکاران، ۲۰۲۲)، محققان به بررسی رفتار امواج در استوانه‌های پیزوالکتریک با ساختار کریستالی منحصر به فرد و مواد گرادیان ترکیبی تک‌بعدی پرداخته‌اند. این مطالعه، تأثیر همزمان خواص مواد، هندسه و نوع موج را بر روی انتشار و رفتار امواج در این نوع استوانه‌ها بررسی می‌کند. تحلیل‌های انجام شده نشان می‌دهد که چگونه این عوامل مختلف می‌توانند بر ویژگی‌های موج مانند سرعت، طول موج و دامنه آن تأثیر بگذارند. همچنین، این مطالعه منجر به شناسایی پدیده‌های موجی جدیدی در این نوع استوانه‌ها شده است. یافته‌های این مقاله می‌تواند پایه و اساس نظری لازم برای طراحی و ساخت تجهیزات پیزوالکتریک با عملکرد بالا را فراهم کند، که در کاربردهای مختلفی مانند سنسورها، محرک‌ها و مبدل‌های انرژی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در (Pshenichnov و همکاران، ۲۰۲۲)، محققان به بررسی انتشار امواج طولی غیرایستا در مواد ویسکوالاستیک با FGM پرداخته‌اند. این مطالعه به طور خاص بر رفتار امواج در لایه‌ها و استوانه‌های ساخته شده از این مواد تمرکز دارد. برای حل پیچیدگی‌های ناشی از FGM، محققان این مواد را به مجموعه‌ای از لایه‌های نازک و یکنواخت با خواص مجزا تقریب می‌زنند. سپس با استفاده از روش‌های تحلیلی و عددی، رفتار امواج در این ساختار لایه‌ای را بررسی می‌کنند. اعتبار روش حل با مقایسه نتایج با موارد مشابه تأیید می‌شود. در نهایت، محققان تأثیر خواص مواد، از جمله ویسکوزیته و ناهمگنی، بر انتشار امواج را در

این تغییر، تحلیل رفتار موج را در مقایسه با روش‌های سنتی که برای مواد همگن به کار می‌روند، به طور قابل توجهی پیچیده‌تر می‌کند.

در حال حاضر، تحقیقات کمی در مورد رفتار مواد FGM تحت بارهای دینامیکی و ضربه‌ای که نشان‌دهنده محیط‌های مکانیکی شدید هستند، انجام شده است. این کمبود دانش، نیاز به مطالعات بیشتر بر روی پدیده‌های انتشار موج در FGM را نشان می‌دهد. درک عمیق‌تر رفتار موج در این مواد پیشرفته برای موارد زیر ضروری است:

بهینه‌سازی طراحی FGM: با درک عمیق‌تر از چگونگی انتشار امواج در مواد FGM، می‌توان اصول طراحی جدیدی برای این مواد پیشرفته ایجاد کرد که عملکرد بهتری در برابر بارهای دینامیکی از خود نشان دهند. این دانش به مهندسان کمک می‌کند تا ترکیب مواد و گرادیان‌های خواص را به طور دقیق انتخاب کنند تا FGM را برای کاربردهای خاص بهینه کنند.

پیش‌بینی مکانیزم‌های خرابی: دانش ما در مورد نحوه انتشار امواج در مواد FGM می‌تواند به شناسایی مکانیزم‌های بالقوه خرابی این مواد تحت بارهای دینامیکی کمک کند. با تجزیه و تحلیل چگونگی تعامل امواج با ناهمگونی‌های مواد FGM، می‌توانیم درک کنیم که ترک‌ها چگونه شروع و منتشر می‌شوند. این امر به نوبه خود به ما امکان می‌دهد تا طرح‌های FGM مقاوم‌تر در برابر خرابی را توسعه دهیم.

نیاز به روش‌های نوین برای بررسی مواد FGM: ویژگی‌های منحصر به فرد انتشار موج در مواد FGM، نیاز به استفاده از روش‌های نوین برای بررسی و سنجش دقیق این مواد را به وجود می‌آورد. این روش‌های نوین می‌توانند شامل تطبیق روش‌های موجود مبتنی بر موج با مواد FGM یا توسعه رویکردهای کاملاً جدید برای ارزیابی رفتار دینامیکی این مواد پیشرفته باشند.

تحقیق انجام یافته در (Swaminathan و همکاران، ۲۰۱۵) روش‌های تحلیلی و عددی مختلف برای تحلیل صفحات FGM را به طور خلاصه بررسی می‌کند. این مقاله بدون پرداختن به جزئیات ریاضی پیچیده، بر تنش، ارتعاش و رفتار کمانش پیش‌بینی‌شده توسط تئوری‌های مختلف تمرکز دارد. نویسندگان بررسی می‌کنند که چگونه تغییر خواص مواد، انواع بارگذاری و هندسه صفحه، از جمله اثرات غیرخطی، بر رفتار صفحات FGM تأثیر می‌گذارند. مطالعه‌ای که در (Liu و همکاران، ۲۰۲۲) ارائه شده است، طراحی جدیدی برای تیرها ارائه می‌دهد که می‌تواند به طور قابل توجهی ارتعاشات را در سازه‌های ساندویچی کامپوزیت کاهش دهد. این طراحی نوآورانه از یک ماده FGM با ساختار خاص برای ایجاد شکاف باند (band gap) استفاده می‌کند. در (Li و همکاران، ۲۰۲۲)، محققان روشی نوین برای ساخت پوسته‌های ساندویچی ارائه می‌کنند که هم سبک و هم در برابر ضربه مقاوم باشند. این

ماتریس سختی دقیق و توابع شکل ذاتی دقیق می‌شوند. در ادامه روند حل، از این توابع دقیق برای دستیابی به ماتریس جرمی دقیق‌تر نسبت به روش‌های متداول استفاده شده است. این رویکرد در فرمول‌بندی اجزای محدود دقیق برای سازه‌های مختلف مانند کامپوزیت‌های لایه‌ای عمیق (Chaubey و همکاران، ۲۰۱۸) و مواد گرادیان ترکیبی موفقیت‌آمیز بوده است. با این حال، روش‌های اجزای محدود (FE) به ویژه در تحلیل انتشار موج که در آن اندازه‌های سیستم می‌توانند از نظر محاسباتی پرهزینه باشند، محدودیت‌هایی دارد. در چنین مواردی، استفاده از المان‌های محدود فرموله شده طیفی می‌تواند مفید باشد. این المان‌های ویژه به دلیل ویژگی‌های فرمول‌بندی‌شان، به طور خاص برای مسائل انتشار موج مناسب هستند.

در مقاله حاضر به انتشار موج در یک ماده یک‌بعدی (۱ بعدی) ناهمگن پرداخته می‌شود، جایی که خواص مواد در جهت انتشار موج تغییر می‌کند. در حالی که اصطلاح «موج ناهمگن» اغلب در رابطه با تغییرات در مختصات فضایی به کار می‌رود، ما در اینجا از آن برای توصیف چالش‌های منحصر به فردی که در این سناریوی خاص به وجود می‌آید، استفاده می‌کنیم.

در این مقاله، روش جایگزینی به نام "روش المان موج" برای حل مسائل انتشار موج در محیط‌های پیچیده به کار گرفته شده است. این روش که در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته (Khaji و همکاران؛ ۲۰۲۱، Mirzajani و همکاران، ۲۰۱۸؛ Mirzajani و همکاران، ۲۰۲۱)، از مدل‌سازی ریاضی مستقیم برای شبیه‌سازی دقیق انتشار موج و تنش‌ها و کرنش‌های ایجاد شده در المان‌ها استفاده می‌کند. به دلیل اتکا به مدل‌سازی ریاضی مستقیم، نیازی به فرمول‌بندی و حل معادلات دیفرانسیل حرکت نیست و در نتیجه، نتایج این روش در بسیاری از موارد با حل دقیق مسئله تطابق کامل دارد (Shorr، ۲۰۰۴).

۲- فرمول‌بندی مسئله

در این بخش به معرفی معادله دیفرانسیل حاکم برای انتشار موج در یک راهنمای موج (wave guide) یک‌بعدی ناهمگن پرداخته می‌شود. یک میله با خواص مواد متغیر در طول و ضخامت آن را در نظر بگیرید (همانطور که در شکل ۱ نشان داده شده است). این مدل ساده‌شده، یک راهنمای موج یک‌بعدی را نشان می‌دهد که از سه بخش مجزا با مواد مختلف تشکیل شده است: فولاد، یک ماده گرادیان ترکیبی (FGM) و سرامیک. فرض بر این است که بخش‌های فولادی و سرامیکی دارای خواص هستند که مستقل از مختصات فضایی هستند. برعکس، بخش FGM به دلیل تغییر تدریجی خواص در طول (جهت x) برای مدول الاستیسیته (E) و چگالی (ρ) طبق معادلات زیر، از بخش‌های همگن متمایز می‌شود:

مواد FGM تحلیل می‌کنند. این مطالعه می‌تواند در درک بهتر رفتار امواج در مواد پیچیده و طراحی مواد جدید با خواص موجی مطلوب کاربرد داشته باشد. در (Koutoati و همکاران، ۲۰۲۱)، محققان مدلی نوین برای بررسی رفتار ارتعاشی تیرهای ساندویچی ساخته شده از FGM حاوی مواد ویسکوالاستیک ارائه می‌کنند. این مدل قادر به تحلیل رفتارهای ارتعاشی ساکن و آزاد تیر با در نظر گرفتن خواص غیرخطی و وابسته به فرکانس مواد است. در این مقاله، دو مدل تغییر شکل برشی و قوانین مختلف ویسکوالاستیک با یکدیگر مقایسه شده‌اند. روش حل ارائه شده برای این مدل کارآمد بوده و با شبیه‌سازی‌های سه‌بعدی اعتبارسنجی شده است. محققان با استفاده از این مدل، تاثیر خواص مواد و شرایط مرزی را بر ویژگی‌های ساکن، دینامیکی و میرایی تیر بررسی کرده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که ضریب میرایی و وابستگی توانی میرایی تاثیر قابل توجهی بر ویژگی‌های دینامیکی تیر دارند. همچنین، مشاهده شده است که شرایط مرزی بر مدهای ارتعاش تیر تاثیر می‌گذارند و در مورد خاص تیر کنسولی، نیاز به بهینه‌سازی ویژه‌ای دارند. در (Belabed و همکاران، ۲۰۲۴) خصوصیات دینامیکی تیرهای ساندویچی FGM با مقطع متغیر مورد ارزیابی قرار گرفته و از مدل المان محدود پیشرفته تیر استفاده شده است. نوآوری این تحقیق در تحلیل تیرهای با مقطع متغیر ساندویچی و بررسی پیامدهای ناشی از ترکیب مواد و آرایش هندسی بر پاسخ ارتعاش آزاد و اجباری از جمله شرایط مرزی متنوع بوده است که منجر به پیشرفت در مدل‌سازی مکانیکی سازه‌های ساندویچ کامپوزیت، به ویژه آنهایی که از مواد FGM همراه با ملاحظات هندسی پیچیده استفاده می‌کنند، شده است.

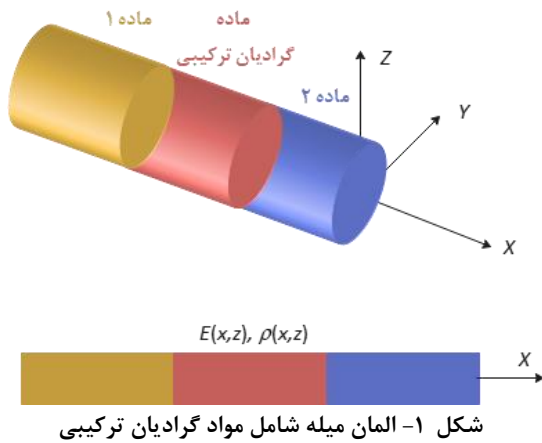
زمانی که جهت انتشار موج و جهت تغییر خواص ماده هم‌جهت باشند، مسئله پیچیدگی قابل توجهی از خود نشان می‌دهد. در چنین مواردی، حتی اگر سیستم ماهیتاً اتلاف‌کننده نباشد، عدد موج مقدار مختلط پیدا می‌کند. این عدد موج مختلط دارای اجزای حقیقی و موهومی غیرحقیقی است که نشان‌دهنده‌ی انحراف از رفتار ساده‌تر مشاهده‌شده در موج‌ها (راهنماهای موج) همگن است. این پیچیدگی ایجاب می‌کند برای درک کامل رفتار موج در این مواد ناهمگن، تحقیقات بیشتری انجام شود.

یکی از چالش‌های اصلی در این نوع تحلیل، معادله حاکم آن است. برخلاف معادلات مربوط به مواد همگن با ضرایب ثابت، در مواد ناهمگن ضرایب معادله نیز متغیر هستند که این امر منجر به پیچیده‌تر شدن معادله دیفرانسیل جزئی حاکم می‌شود. برای حل این معادله، روش‌های مختلفی در حوزه‌های زمان و فرکانس مورد بررسی قرار می‌گیرند. در حوزه زمان، رویکرد "اجزای محدود فوق همگرا" به عنوان روشی نوین بخش مطرح می‌شود. این روش از راه‌حل‌های دقیق برای مؤلفه استاتیکی معادله حاکم به عنوان تابع درون‌یابی برای جابجایی‌ها استفاده می‌کند. این توابع منجر به

با استفاده از اصل تغییرات، شرطهای مرزی طبیعی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_{11}f(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = F, \quad (۶)$$

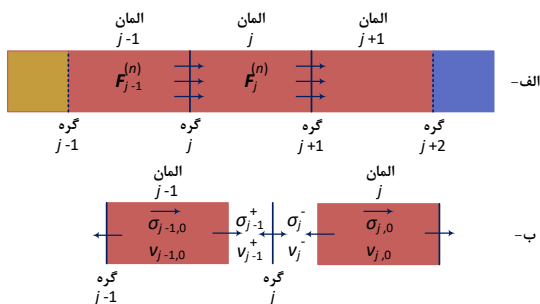
شرطهای مرزی طبیعی از اصل تغییرات برای گره‌های انتهایی در $x=0$ و $x=L$ به دست می‌آیند، که در آن هر نیروی نقطه‌ای اعمال شده در مرزها را نشان می‌دهد. برای سادگی، فرض بر این است که خواص مواد E و ρ هیچ تغییری در جهت ضخامت (z) ندارند، همانطور که با مقادیر ثابت $g(z)$ و $\rho(z)$ در معادله (۱) نشان داده شده است. تغییر در جهت طول (جهت x) توسط توابع $f(x)$ و $s(x)$ نشان داده می‌شود (Chakraborty و Gopalakrishnan، ۲۰۰۳).



شکل ۱- المان میله شامل مواد گرادیان ترکیبی

۳- روش المان موج

در این بخش روشی عددی به نام روش المان موج ارائه شده است. این روش شامل گسسته‌سازی یک میله به طول L به المان‌های با طول دلخواه (شکل ۲ الف را ببینید) می‌شود. در این روش، انتشار گسستگی‌های قوی در سرعت‌ها، تنش‌ها و کرنش‌ها با سرعت موج محدود بیان می‌شود.



شکل ۲- نحوه گسسته سازی المانها در روش المان موج

شکل ۲- الف گسسته‌سازی یک میله را به المان‌های مجزا نشان می‌دهد. با فرض قرارگیری مبدأ محور x در مرز المان‌ها و

$$\begin{aligned} E(x, z) &= E_0 f(x) g(z), \\ \rho(x, z) &= \rho_0 s(x) t(z), \end{aligned} \quad (۱)$$

بخش FGM به دلیل تغییر خواص مواد در طول و ضخامت خود، از بخش‌های همگن فولاد و سرامیک متمایز می‌شود. این ناهمگنی پیچیدگی‌هایی را به وجود می‌آورد که نیازمند استخراج یک معادله حاکم مخصوص برای راهنماهای موج ناهمگن است. در بخش‌های همگن فولاد و سرامیک (شکل ۱)، خواص مواد مانند مدول الاستیسیته (E_0) و چگالی (ρ_0) در سراسر طول و ضخامت آنها ثابت هستند. از آنجایی که تحلیل فقط بر انتشار موج طولی متمرکز است، مؤلفه مهم تنش، تنش نرمال (σ_{xx}) در جهت x و تغییر مکان مربوطه، تغییر مکان طولی (u) می‌باشد. رابطه بین تنش و تغییر مکان در این بخش‌ها توسط قانون هوک کنترل می‌شود:

$$\varepsilon_{xx} = \partial u / \partial x; \quad \sigma_{xx} = E(x, z) \partial u / \partial x, \quad (۲)$$

که در آن $\partial u / \partial x$ شیب (گرادیان) تغییر مکان در جهت x را نشان می‌دهد.

در این بخش، اصل کمترین عمل همیلتون به عنوان روشی قدرتمند برای استخراج معادله حاکم برای میله FGM معرفی می‌شود. این اصل بیان می‌کند که در غیاب نیروهای خارجی، عملگر (Σ) کل سیستم، که نمایانگر کل کنش است، نسبت به تغییرات میدان تغییر مکان (u) به مقدار ایستایی می‌رسد. به عبارت ریاضی، این اصل را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\delta \Sigma = \delta \int_0^T (T - U) dt = 0 \quad (۳)$$

که در آن: δ نماد تغییرات است؛ T انرژی جنبشی میله می‌باشد؛ U انرژی پتانسیل ذخیره شده درون میله است و t نشان‌دهنده‌ی زمان است. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A_{11} f(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = I_0 s(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (۴)$$

که برای سادگی، فرض می‌کنیم سطح مقطع (A) در طول میله ثابت است A_{11} و I_0 عبارت‌هایی هستند که برحسب ضخامت (z) انتگرال‌گیری شده‌اند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_{11} = E_0 \int_A g(z) dA, \quad I_0 = \rho_0 \int_A t(z) dA \quad (۵)$$

واحد، انتشار موج در طول میله را برای هر ترکیب دلخواهی از لایه‌های FGM مدل‌سازی کرد. در گام زمانی i ، فرض می‌شود که اندازه گام زمانی برابر Δt_i و سرعت موج در المان j برابر $c_j = \Delta x_j / \Delta t_i$ باشد. مقادیر Δt_i ، c_j در این مرحله نامعلوم هستند. با اعمال نیرو به محیط مسئله، گسستگی‌های شدیدی در تنش‌ها و سرعت‌ها وجود خواهد داشت. برای تحلیل انتشار موج، فرض می‌شود که این گسستگی‌ها در یک لحظه زمانی بسیار کوچک رخ می‌دهند. بنابراین، باید بین دو لحظه زمانی t_{i-1}^- و t_{i-1}^+ تمایز قائل شد که به ترتیب نشان‌دهنده لحظه قبل از ایجاد گسستگی شدید (t_{i-1}^-) و لحظه بلافاصله بعد از ایجاد گسستگی (t_{i-1}^+) هستند. در لحظه قبل از ایجاد گسستگی شدید، المان می‌تواند در یک حالت شبه‌استاتیکی قرار داشته باشد. در این حالت، سرعت $v_{j,0}$ و جابجایی‌های گره‌ای $u_{j,0}^\pm$ مشخص هستند. در این لحظه، می‌توان روابط مکانیکی حاکم بر یک المان را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{j,0} &= (u_{j,0}^+ - u_{j,0}^-) / \Delta x_j \quad \text{کرنش:} \\ M_{j,0} &= (I_0 s(x))_j \Delta x_j v_{j,0} \quad \text{مومنتوم خطی:} \\ I_0 \dot{v}_{j,0} &= 0.5 (I_0 s(x))_j \Delta x_j v_{j,0}^2 \quad \text{انرژی جنبشی:} \\ P_{j,0} &= 0.5 (A_{11} f(x))_j (u_{j,0}^+ - u_{j,0}^-)^2 / \Delta x_j \quad \text{انرژی پتانسیل:} \end{aligned}$$

با استفاده از روابط مکانیکی در لحظه مورد نظر، می‌توان روابط نیروی اعمالی به المان در گره‌های آن را مطابق با رابطه ۱۲ به دست آورد:

$$F_{j,0}^\pm = \frac{\partial P_{j,0}}{\partial u_{j,0}^\pm} = \pm (A_{11} f(x))_j (u_{j,0}^+ - u_{j,0}^-) / \Delta x_j \quad (12)$$

با توجه به اینکه سرعت‌های $v_{j,0}$ و $v_{j-1,0}$ در المان‌های مجاور $j-1$ و j می‌توانند مقادیر متفاوتی داشته باشند، در محل گره j (مطابق با شکل ۲-ب) گسستگی سرعت ایجاد می‌شود و این گره در تعادل نخواهد بود. در نتیجه، گسستگی‌های شدیدی در سرعت‌ها و تنش‌ها در بین این دو المان در زمان t_{i-1}^- به وجود می‌آید. از آنجا که گره‌ها در المان‌های مجاور باید در تعادل باشند، این گسستگی‌ها باید بلافاصله (یعنی در زمان t_{i-1}^+) به مقادیر جدید سرعت‌های مرزی v_{j-1}^+ ، v_j^- و نیروهای مرزی F_{j-1}^+ ، F_j^- کاهش یابند. تمامی این مقادیر باید در طول گام زمانی Δt_i ثابت باقی بمانند و در نتیجه باید شرط مرزی بین المانی (رابطه ۱۳) را ارضا کنند:

$$\begin{aligned} F_j^* + F_j^- - F_{j-1}^+ &= 0 \quad (13\text{-الف}) \\ v_{j-1}^+ &= v_j^- \quad (13\text{-ب}) \end{aligned}$$

در این معادله، F_j^* نیروی خارجی است که می‌تواند در گره مشترک المان‌ها اعمال شود. رابطه (۱۳-الف) شرط تعادل مرز داخلی المان‌ها و رابطه (۱۳-ب) بیانگر پیوستگی بین المانی است.

جهت مثبت آن به سمت راست، گسستگی‌های تنش و کرنش در محل اندرکنش المان‌های $j-1$ و j در زمان $t=0$ می‌توانند به صورت رابطه (۷) بیان شوند:

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \begin{cases} v_{j-1,0}, & x < 0 \\ v_{j,0}, & x > 0 \end{cases} \\ \sigma(x, 0) &= \begin{cases} \sigma_{j-1,0}, & x < 0 \\ \sigma_{j,0}, & x > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

سپس با استفاده از رابطه (۲) و نوشتن معادله دیفرانسیل حرکت برای یک میله همگن به صورت:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(E_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (8)$$

می‌توان با استفاده از روش مشخصه‌ها و تعریف شرایط اولیه (رابطه ۷) به رابطه (۹) رسید:

$$v(x, t) = 0.5 [v_{j,0} + v_{j-1,0} + (\sigma_{j,0} - \sigma_{j-1,0}) / \rho c] \quad (9)$$

که در آن $c = \sqrt{E_0 / \rho_0}$ است و رابطه (۹) برای $-c_{j-1} \Delta t_i < x < c_j \Delta t_i$ یعنی برای ناحیه آشفته معتبر است.

برای مدل‌سازی ماهیت ناهمگن بخش FGM، می‌توان از قوانین مختلف تغییر خواص مواد استفاده کرد. دو رویکرد مجزا را می‌توان مورد بررسی قرار داد: تغییر چندجمله‌ای و تغییر نمایی. در مورد تغییر چندجمله‌ای، توابع $f(x)$ و $s(x)$ که نشان‌دهنده مدول الاستیسیته (E) و چگالی (ρ) هستند، به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + \alpha x)^n, \\ s(x) &= (1 + \beta x)^n \end{aligned} \quad (10)$$

که α و β به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که خواص مواد به طور پیوسته از یک ماده به ماده دیگر تغییر می‌کند. این رویکرد چندجمله‌ای به تغییر تدریجی و کنترل‌شده خواص مواد در بخش FGM اجازه می‌دهد. رویکرد جایگزین، از تغییر نمایی استفاده می‌کند، جایی که $f(x)$ و $s(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f(x) = e^{\alpha x}, \quad s(x) = e^{\beta x} \quad (11)$$

تغییر نمایی، روش دیگری برای مدل‌سازی تغییر خواص ارائه می‌دهد و به طور بالقوه، نشان‌دهنده‌ی یک گذار سریع‌تر در FGM است. با در نظر گرفتن این دو سناریوی متضاد، می‌توانیم درک گسترده‌تری از رفتار انتشار موج در طیف وسیعی از پروفایل‌های مواد ناهمگن به دست آوریم.

با توجه به شکل ۱ و شکل ۲ می‌توان سلول واحدی را در روش پیشنهادی در نظر گرفت و با استفاده از روابط حاکم بر این سلول

$$\begin{cases} F_j = F_j^- + F_j^+ - F_{j,0} \\ v_j = v_j^- + v_j^+ - v_{j,0} \end{cases} \quad (18)$$

جابجایی‌های جدید گرهی برابر خواهد بود با:

$$u_j^\pm = u_{j,0}^\pm + v_j^\pm \Delta t_i \quad (19)$$

با اتمام گام زمانی Δt_i یعنی $t_i^- = t_{i-1}^+ + \Delta t_i$ ، حالت مکانیکی تمامی المان‌ها به حالت شبه‌ایستا باز خواهد گشت. در این مرحله، با مشخص بودن سرعت‌ها و جابجایی‌های جدید گره‌ای، می‌توان دوباره حالت جدید المان‌های موج را مشخص کرد و روند محاسبات قبلی را برای گام زمانی بعدی تکرار نمود. تنها مجهول باقیمانده در این مرحله، گام زمانی Δt_i یا به عبارتی سرعت المان‌های موج است. برای تعیین Δt_i ، از قانون پایستگی انرژی برای کل میله استفاده می‌کنیم. بر اساس این قانون، مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل المان‌ها باید برابر با کار انجام شده توسط سیستم باشد:

$$P_{i\Sigma} + K_{i\Sigma} = W_{i\Sigma}^* \quad (20)$$

در این معادله، $P_{i\Sigma}$ انرژی پتانسیل کل میله و $K_{i\Sigma}$ انرژی جنبشی کل میله در لحظه زمانی t_i^- و $W_{i\Sigma}^*$ کار انجام شده توسط سیستم در کل فرآیند انتشار موج است.

۴- مثال‌های عددی

۴-۱- صحت سنجی

در این بخش صحت‌سنجی روابط ارائه شده مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور یک مسئله ناهمگن که مصالح آن توسط یک لایه مصالح FG از هم جدا شده‌اند در نظر گرفته شده است. مصالح در نظر گرفته شده شامل آلومینیوم و آلومینا است. مشخصات مصالح مورد استفاده در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱- مشخصات مصالح

مصالح	E (GPa)	ρ (kg/m ³)
آلومینیوم	70	2600
آلومینا	390	3950

میله دارای طول واحد است و مساحت مقطع آن 0.01 مترمربع در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی به صورت یک سر آزاد و یک سر گیردار است. یک ضربه با مدت زمان ۵۰ میکروثانیه و محتوی فرکانسی تقریباً ۴۶ کیلوهرتز به آن اثر می‌کند.

در مرحله بعد، به منظور تحلیل انتشار امواج تنش و سرعت در طول المان، از اصل پایستگی مومنوم در دو فاز استفاده می‌شود. برای این منظور، گام زمانی Δt_i به دو قسمت تقسیم می‌شود. در نصف اول این گام زمانی، یعنی تا زمانی که امواج به وسط المان‌ها نرسیده‌اند، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} v_{j-1}^+ = v_{j-1,0} + \frac{(F_{j-1}^+ - F_{j-1,0})\Delta t_i}{(I_0 S(x))_{j-1} \Delta x_{j-1}} \\ v_j^- = v_{j,0} - \frac{(F_j^- - F_{j,0})\Delta t_i}{(I_0 S(x))_j \Delta x_j} \end{cases} \quad (14)$$

با استفاده از رابطه (۱۴)، می‌توان مقادیر سرعت در سمت راست المان $1 - z$ و سمت چپ المان z و همچنین ارتباط آنها با تنش‌های اعمال شده را به دست آورد. سپس، با جایگذاری روابط (۱۴) در روابط (۱۳)، سرعت‌های مرزی جدید به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} v_{j-1}^+ &= v_j^- \\ &= \frac{(I_0 S(x))_{j-1} \Delta x_{j-1} v_{j-1,0} + (I_0 S(x))_j \Delta x_j v_{j,0}}{(I_0 S(x))_{j-1} \Delta x_{j-1} + (I_0 S(x))_j \Delta x_j} \\ &\quad + \frac{(F_{j,0} - F_{j-1,0} + F_j^*)\Delta t_i}{(I_0 S(x))_{j-1} \Delta x_{j-1} + (I_0 S(x))_j \Delta x_j} \end{aligned} \quad (15)$$

سپس نیروهای مرزی را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$\begin{cases} F_{j-1}^+ = \frac{F_{j-1,0}}{(I_0 S(x))_{j-1} \Delta x_{j-1} (v_{j-1}^+ - v_{j-1,0})} + \frac{\Delta t_i}{F_{j,0}} \\ F_j^- = \frac{(I_0 S(x))_j \Delta x_j (v_j^- - v_{j,0})}{\Delta t_i} \\ F_j^- = F_{j-1}^+ - F_j^* \end{cases} \quad (16)$$

با استفاده از روابط (۱۵) و (۱۶)، می‌توان سرعت‌ها و نیروها در مرز بین دو المان $1 - z$ و z را به طور کامل مشخص کرد. در نصف دوم این گام زمانی، امواج به مرکز المان‌ها می‌رسند و پس از آن به سمت انتهای المان z باز خواهند گشت. با اعمال اصل پایستگی مومنوم به کل المان در گام زمانی Δt_i ، سرعت جدید المان به دست می‌آید:

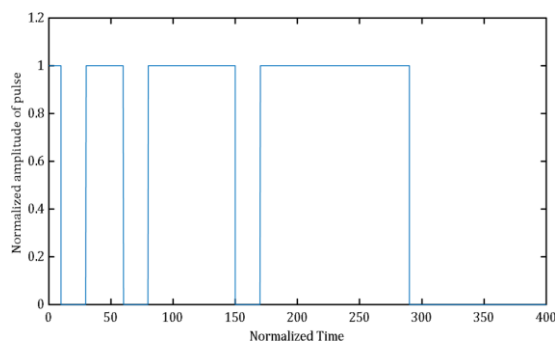
$$v_j = v_{j,0} + \frac{(F_{j-1}^+ - F_j^- - F_j^*)\Delta t_i}{(I_0 S(x))_j \Delta x_j} \quad (17)$$

طبق بخش دوم رابطه (۱۴)، حالت جدید اینرسی-تنش به صورت زیر خواهد بود (شکل ۲-ب را ببینید):

۴-۲- نتایج عددی

در این بخش میله دولایه ارائه شده در بخش قبلی در نظر گرفته شده است. برای ساده‌سازی محاسبات پارامترها به حالت بی‌بعد تبدیل شده‌اند. به این صورت که قسمت آلومینیوم دارای پارامترهای بی‌بعد $\rho_1 = E_1 = 1$ انتخاب شده و در لایه بعدی (آلومینا) $\rho_2 = 0.6582$ و $E_2 = 0.1795$ تعیین شده است. طول میله به ۱۵۰۰۰ المان تقسیم شده است. بار اعمال شده به انتهای آزاد میله به صورت پالس‌های مستطیلی با عرض‌های زمانی متفاوت انتخاب شده است که در رابطه زیر و شکل ۴ نحوه تغییر عرض زمانی بار مشخص شده است:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (10, 30, 70, 120) \times \Delta x \quad (21)$$

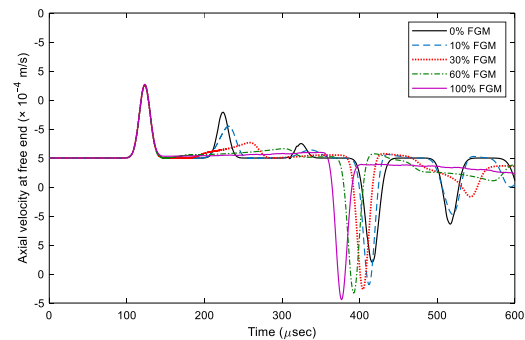


شکل ۴- بار اعمالی در انتهای آزاد میله FGM

۴-۲-۱- میله دولایه با 0% FGM

در ابتدا میله دولایه بدون FGM در نظر گرفته شده است. در این میله، نصف طول میله شامل مصالح آلومینا و نصف دیگر شامل مصالح آلومینیوم می‌باشد. لذا در محل وجه مشترک دو لایه تغییر در امپدانس مصالح را داریم و انعکاس موج تنش در این وجه مشترک رخ خواهد داد. برای مشخص شدن نحوه انتشار موج تنش در این میله، شکل ۵ در نظر گرفته شده است. محل وجه مشترک با یک خط چین در شکل مشخص شده است. در این شکل نحوه انتشار موج تنش در طول میله در هفت گام زمانی مختلف نمایش داده شده است. تا زمانی که موج به وجه مشترک نرسیده است، شکل موج تنش مشابه با بار اعمالی در طول میله انتشار می‌یابد. با رسیدن موج به وجه مشترک دو لایه انعکاس در شکل موج تنش به وقوع می‌پیوندد که در نمودارهای نشان داده شده قابل مشاهده است. خاطر نشان می‌گردد در این شکل گام‌های زمانی از پایین به بالا افزایش می‌یابند، بنابراین خط آبی اولین موج تنش و خط قرمز پررنگ آخرین موج تنش را نشان می‌دهند. به دلیل ماهیت پیچیده موج تنش به میزان بسیار محدودی اختلاف با حل تحلیلی مشاهده می‌گردد که با توجه به ماهیت عددی روش مورد استفاده طبیعی بوده و در نتایج تاثیر نخواهد داشت.

زمانی که میله با دو مصالح متفاوت که در جهت طولی به هم اتصال داده شده‌اند را داشته باشیم که تحت اثر بار ضربه قرار بگیرند، به دلیل تغییر در امپدانس در وجه مشترک دو مصالح، انعکاس اضافی در این وجه ایجاد خواهد شد، که در بسیاری از موارد باعث کاهش یکپارچگی سازه می‌شود. یکی از راه‌حل‌ها استفاده از مصالح غیرهمگن از نوع FGM در بین دو مصالح است که انعکاس موج را به طور کامل از بین ببرد. جهت بررسی این پدیده یک میله با دو مصالح آلومینیوم و آلومینا در نظر گرفته شده است. بارگذاری در انتهای آزاد میله اعمال شده و سرعت در ابتدای میله اندازه‌گیری شده است. سپس ناحیه FGM به تدریج از صفر تا صد درصد افزایش داده شده است. این ناحیه در وسط میله در نظر گرفته شده است. انتهای گیردار میله شامل مصالح آلومینیوم می‌شود و انتهای آزاد مصالح آلومینا را شامل می‌شود. نتایج بدست آمده در شکل ۳ نشان داده شده است (Mirzajani و همکاران، ۲۰۱۸).

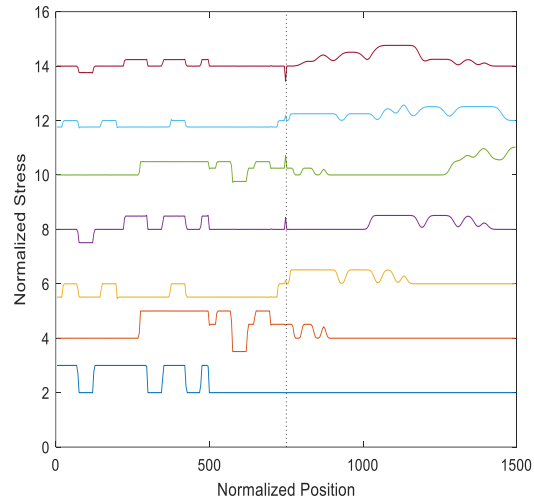


شکل ۳- پاسخ سرعت در میله FGM

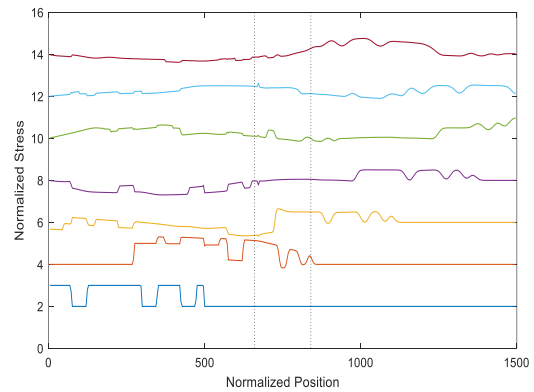
در این شکل 0% FGM مربوط به میله با دو مصالح بدون لایه FGM است. اولین پیک به وجود آمده متناسب با بار اعمالی به سازه است. پیک دوم و سوم مربوط به انعکاس اول و انعکاس دوم موج در ناحیه آلومینا است. با توجه به اینکه سرعت موج طولی در آلومینا برابر $9/9365$ کیلومتر بر ثانیه است، زمانی که طول می‌کشد تا بار اعمالی در طول یک متر انتشار یابد برابر $\frac{1}{9.9365} + 100\mu\text{sec}$ خواهد بود؛ یعنی $200/6$ میکروثانیه. این همان زمان وقوع پیک دوم است که در شکل ۳ نشان داده شده است. به طور مشابه پیک سوم زمانی به اندازه $\frac{2}{9.9365} + 100\mu\text{sec}$ در $301/28$ میکروثانیه نیاز دارد. در نهایت، سرعت موج طولی در آلومینیوم برابر $5/1887$ کیلومتر بر ثانیه است، و زمان لازم برای بار اعمالی برای رسیدن به پیک‌های بعدی بعد از انعکاس از انتهای گیردار برابر $\frac{1}{9.9365} + \frac{1}{5.1887} + 100\mu\text{sec}$ یعنی $393/36$ میکروثانیه خواهد بود. این مقادیر در شکل ۳ مشخص هستند. همچنین اضافه شده ناحیه FGM باعث از بین رفتن انعکاس موج در مسئله شده است که در شکل ۳ مشاهده می‌شوند.

۴-۲-۲- میله دولایه با 10% FGM

در گام بعدی، مصالح FGM به میله دو لایه اضافه شده است. به این صورت که ده درصد از طول میانی میله تبدیل به مصالح FGM شده است و خواص مصالح با استفاده از رابطه (۱۰) و به صورت خطی از آلومینا به آلومینیوم تغییر داده شده است. همان طور که در شکل ۶ نشان داده شده است، با ورود بار اعمالی به ناحیه FGM انعکاس موج رخ داده است، اما نحوه انتشار موج تنش با حالت بدون FGM تغییر یافته است.



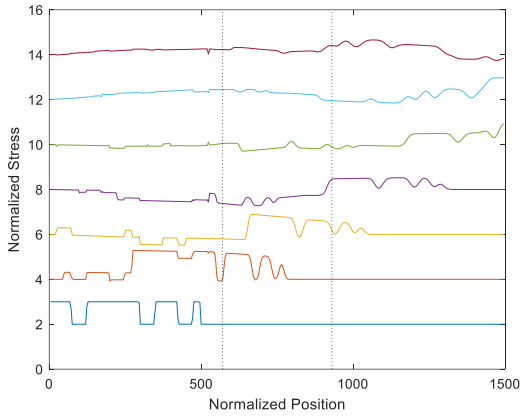
شکل ۵- پاسخ میله 0% FGM به بار اعمالی



شکل ۶- پاسخ میله 10% FGM به بار اعمالی

۴-۲-۳- میله دولایه با 30% FGM

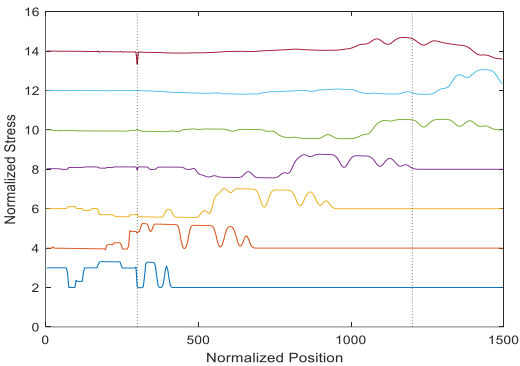
روند افزایش ناحیه FGM در میله دولایه ادامه یافته و در این بخش سی درصد از بخش میانی میله به مصالح FGM اختصاص داده شده است. در شکل ۷ نحوه انتشار موج تنش در این میله نمایش داده شده است. تغییر شکل موج به دلیل انعکاس در سه لایه از میله در زمان‌های مختلف قابل مشاهده است.



شکل ۷- پاسخ میله 30% FGM به بار اعمالی

۴-۲-۴- میله دولایه با 60% FGM

در مرحله بعد میزان پوشش لایه FGM در میله دو لایه به شصت درصد افزایش یافته است. در این حالت بخش عمده‌ای از میله شامل مصالح FGM می‌شود که خواص مصالح به صورت خطی از آلومینا به آلومینیوم تغییر می‌کنند. با ورود موج ورودی به ناحیه FGM انعکاس موج رخ داده است که در سه نمودار آبی، قرمز و سبز در سمت چپ و پایین نمودار شکل ۸ مشخص است. با ورود موج به ناحیه FGM این انعکاس با شدت کمتری مشاهده می‌شود که ناشی از تغییر خطی خواص ماده در این ناحیه است.



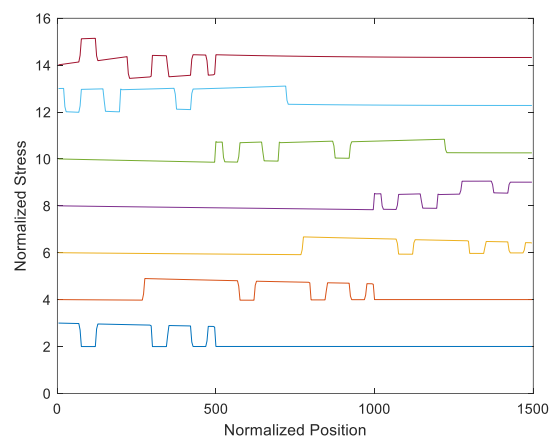
شکل ۸- پاسخ میله 60% FGM به بار اعمالی

۴-۲-۵- میله دولایه با 100% FGM

در نهایت، کل طول میله تبدیل به مصالح FGM شده است. مصالح از آلومینا از ابتدای میله شروع می‌شوند و با یک تغییر خطی به آلومینیوم می‌رسند. در این حالت انتظار داریم که هیچ گونه انعکاسی در موج تنش رخ ندهد و بار اعمالی در طول میله انتشار یابد. در شکل ۹ نتایج مربوط به این حالت نشان داده شده است. همان گونه که مشاهده می‌گردد موج ورودی بدون انعکاس در طول میله منتشر شده است و اثرات تغییرات خطی مصالح نیز در شکل موج تنش مشاهده می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت

- Chakraborty, A., Gopalakrishnan S. "Wave propagation in inhomogeneous layered media: solution of forward and inverse problems." *Acta Mechanica*, 2004, 169, 1, 153-185.
- Chaubey, A. K, Ajay K, Chakrabarti, A. "Novel shear deformation model for moderately thick and deep laminated composite conoidal shell." *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2018, 46(5), 650-668.
- Doyle, J. F., Doyle, J. F. *Wave propagation in structures* (pp. 126-156). Springer US, 1989.
- Gavassino, L, M. D, Noronha, J. "Dispersion relations alone cannot guarantee causality." *Physical review letters*, 2024, 132(16), 162301.
- Gopalakrishnan, S. *Wave propagation in materials and structures*. Crc Press, 2016.
- Khaji, N., Mirzajani, M., Hori, M. "Analysis of elastic pulse dispersion in periodically layered composite rods using wave finite element method." *International Journal of Applied Mechanics*, 2021, 13(05), 2150050.
- Koutoati, K., Foudil M., Carrera, E. "A finite element approach for the static and vibration analyses of functionally graded material viscoelastic sandwich beams with nonlinear material behavior." *Composite Structures*, 2021, 274, 114315.
- Li, C., Shen, H., Yang, J. "Low-velocity impact response of cylindrical sandwich shells with auxetic 3D double-V meta-lattice core and FG GRC facesheets." *Ocean Engineering*, 2022, 262, 112299.
- Liu, C, Yu, J., Xu, W., Zhang, X., Wang, X. "Dispersion characteristics of guided waves in functionally graded anisotropic micro/nano-plates based on the modified couple stress theory." *Thin-Walled Structures*, 2021, 161, 107527.
- Lu, Q., Chunchuan L., Peng W. "Band gap enhancement and vibration reduction of functionally graded sandwich metastructure beam." *Composite Structures*, 2022, 292, 115650.
- Mirzajani, M., Khaji N., Muneo H. "Wave propagation analysis of micropolar elastic beams using a novel micropolar wave finite element method." *Mechanics of advanced materials and structures*, 2021, 28(6), 551-567.
- Mirzajani, M., Khaji, N, Hori, M. "Stress wave propagation analysis in one-dimensional micropolar rods with variable cross-section using micropolar wave finite element method." *International Journal of Applied Mechanics*, 2018, 10(04), 1850039.
- Pshenichnov, S., Ivanov, R., Datcheva, M. "Transient wave propagation in functionally graded viscoelastic structures." *Mathematics*, 2022, 10(23), 4505.
- Shorr, B.F., *The wave finite element method in "Foundation of Engineering Mechanics Series"*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2004.
- Swaminathan, K., Naveenkumar, D. T., Zenkour, A. M., Carrera, E. "Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates—A state-of-the-art review." *Composite Structures*, 2015, 120, 10-31.
- Touboul, M., Vial, B., Assier, R., Guenneau, S., Craster, R V. "High-frequency homogenization for periodic

که این نوع سازه در برابر موج ضربه اعمالی به شکل یکپارچه عمل رفتار است.



شکل ۹- پاسخ میله 100% FGM به بار اعمالی

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، از روش المان موج برای تحلیل انتشار موج در محیط FGM استفاده گردید. برای این منظور، انتشار موج طولی در میله ناهمگن، که به طور خاص دارای طبیعت پاشنده بودند مورد بررسی قرار گرفت. مثال‌های متعددی با استفاده از روش المان جهت نمایش نحوه انتشار موج تنش در طول میله FGM مورد بررسی قرار گرفت. مشخص شد که با تغییر مصالح از حالت همگن به حالت ناهمگن، نحوه انتشار موج و شکل انتشار موج تغییر می‌یابد. در حالتی که کل میله به صورت FGM بود نیز مشخص شد که هیچ گونه انعکاسی در موج تنش نخواهیم داشت. نتایج حاصل از این مقاله می‌تواند در طراحی المان‌های صنعتی که حفظ یکپارچگی سازه در هنگام انتشار موج بسیار اهمیت دارد مورد استفاده قرار گیرد.

۶- مراجع

- Aslam, M, Park, J., Lee, J. "A comprehensive study on guided wave dispersion in complex structures." *International Journal of Mechanical Sciences*, 2024, 269, 109089.
- Belabed, Z, Abdeldjebbar, T., Abdelmoumen, A B, Abdelouahed, T., Yaylaci, M. "Accurate free and forced vibration behavior prediction of functionally graded sandwich beams with variable cross-section: A finite element assessment." *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2024, 1-34.
- Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S. "Various numerical techniques for analysis of longitudinal wave propagation in inhomogeneous one-dimensional waveguides." *Acta mechanica*, 2003, 162(1), 1-27
- Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S. "Various numerical techniques for analysis of longitudinal wave propagation in inhomogeneous one-dimensional waveguides." *Acta mechanica*, 2003, 162, 1, 1-27.

- dispersive media." *Multiscale Modeling & Simulation*, 2024, 22(3), 1136-1168.
- Zhang, B., Wang, X. H., L. Elmaimouni, J., Yu, G., Zhang, X. M. "Axial guided wave characteristics in functionally graded one-dimensional hexagonal piezoelectric quasi-crystal cylinders." *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2022, 27(1), 125-143.