

EXTENDED ABSTRACT

Analysis of Longitudinal Wave Propagation in Functionally Graded Materials (FGMs) Using Wave Element Method

Mohsen Mirzajani^{*}, Kambiz Falsafian

Department of Civil Engineering, Marand Technical Faculty, University of Tabriz, Tabriz 5166616471, Iran

Received: 20 June 2024; Reviewed: 03 January 2025; Accepted: 12 January 2025

Keywords:

Wave propagation; Functionally graded materials; Wave element method; Inhomogeneity; Material properties.

1. Abstract

This paper investigates the complex phenomenon of longitudinal wave propagation in functionally graded materials (FGMs). Unlike traditional homogeneous materials with constant properties, FGMs exhibit a continuous variation in properties across their structure. This inherent inhomogeneity presents unique challenges for analyzing wave propagation behavior. The study employs the wave element method, a powerful numerical technique commonly used for solving dynamic problems in complex structures. This method allows for the effective analysis of wave propagation in FGMs by incorporating the gradual variations in material properties along the length of the rod. The obtained results reveal significant differences in wave propagation between FGMs and homogeneous materials. In FGMs, wave characteristics like velocity, wavelength, and amplitude continuously vary along the material. This distinct behavior can be directly attributed to the inhomogeneity of material properties within the FGM. This finding underscores the importance of considering material property variations when analyzing wave propagation in FGMs compared to their homogeneous counterparts.

2. Introduction

Among the fundamental issues involved in wave propagation, homogeneous plane waves are considered to be an important component. In a homogeneous, linear, and non-dispersive solid, the Helmholtz equation describes these waves as amplitudes (A) and vectors (k), which are real-valued representations of a wave propagating in a homogeneous, linear, and non-dispersive solid. However, for materials exhibiting (linear) dispersive behavior, the simplest wave form deviates from this ideal state. While the wave retains a similar structure, the wave amplitude (A) and wave vector (k) acquire complex values. This shift from real to complex values necessitates a distinction between them. In such cases, the term "inhomogeneous wave" is commonly used. In principle, the term "inhomogeneous wave" can have two meanings. In the context of material properties, it denotes spatial variations; in the context of wave propagation through dissipative media, it represents a complex k-vector and associated amplitude change. Recognizing this duality will lead to a deeper understanding of wave behavior in various material systems. Viscoelastic materials, characterized by inherent energy dissipation mechanisms, are the primary setting for the formation of inhomogeneous waves. Extensive research has been conducted on these waves, demonstrating their effectiveness in explaining various wave modes and their dispersive nature. In dispersive media, the propagation velocity, attenuation constant, and associated angles are all frequency-dependent. In addition to viscoelastic materials, another class of environments that support inhomogeneous wave propagation is functionally graded materials (FGMs). Unlike

Publisher: Vice Chancellery for Research & Technology, University of Tabriz https://doi.org/10.22034/CEEJ.2025.62180.2366



Online ISSN: 2717-4077

* Orcid Cod Corresponding Author: 0000-0002-0342-084X

E-mail addresses: m.mirzajani@tabrizu.ac.ir (Mohsen Mirzajani), k.falsafian@tabrizu.ac.ir (Kambiz Falsafian).

homogeneous specimens with uniform properties throughout, FGM materials possess spatially varying elastic and inertial properties. This variation can occur continuously and be tailored to achieve specific performance objectives. In nature, most materials exhibit some degree of inhomogeneity at the microscopic level. However, for many engineering applications, they are often treated as homogeneous materials due to simplicity. Traditionally, metals and other industrial materials have largely been considered homogeneous, with their inherent defects neglected. However, recent advancements have enabled the design and fabrication of FGM materials with precisely controlled property variations in space.

3. Problem Formulation

This section introduces the governing equations for wave propagation in a one-dimensional (1D) inhomogeneous waveguide. Considering a rod with spatially varying properties of material along its length and thickness (as shown in Fig. 1). This simplified model depicts a 1D waveguide that includes three distinct sections made up of three different materials: steel, functionally graded material (FGM), and ceramic. It is assumed that the properties of steel and ceramic sections are independent of the spatial coordinates of the sections in question. The FGM section on the other hand is distinguished from the homogeneous section due to the gradual change in properties over the length of the section (x-direction) for both the elastic modulus (E) and density (ρ).

4. FGM Modeling

To model the inhomogeneous nature of the FGM section, different material property variation laws can be employed. Two distinct approaches can be considered: polynomial variation and exponential variation. For the polynomial variation, the functions representing the elastic modulus and density are expressed as polynomials of the rod's length. This approach allows for a gradual and controlled change in material properties within the FGM section. The alternative approach employs exponential variation as a means of achieving a more rapid transition within the FGM as opposed to the linear variation. The method selected in this paper is the polynomial variation method.

5. Wave Element Method

This section presents a numerical method called the wave element method. This method is based on the discretization of a rod of length L into elements of arbitrary lengths by means of a discretization process. According to this method, the propagation of strong discontinuities in velocities, stresses, and strains in terms of finite wave velocity is used to describe the propagation of discontinuities (Mirzajani et al., 2018; 2021).

6. Results and Discussion

The simulation results reveal significant differences in wave propagation between FGMs and homogeneous materials. In FGMs, wave velocity, wavelength, and amplitude continuously vary along the material's length due to the inherent inhomogeneity of the material properties.

Based on the findings, the absence of reflection and the preservation of the input wave's shape suggest that the impulse wave propagates uniformly along the road. This points out the rod's ability to function as a single, cohesive unit during wave propagation. This behavior is attributed to the linear material properties of the rod, which allow for the consistent transmission of mechanical energy without significant attenuation or distortion. Therefore, we can conclude that this type of structure behaves as a whole in opposition to the applied impulse wave.

7. Conclusions

This study shows that the propagation of longitudinal waves in FGMs is a complex phenomenon influenced by the inhomogeneity of material properties and the type of property variation law. The wave element method presented in this paper is an effective tool for analyzing wave propagation in FGM environments. This method holds potential for the design of industrial components, such as aircraft wings or turbine blades, where maintaining structural integrity during wave propagation is critical.

آنالیز انتشار امواج طولی در مواد گرادیان ترکیبی با استفاده از روش المان موج

محسن ميرزاجاني^{*1}، كامبيز فلسفيان²

¹ استادیار گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی مرند، دانشگاه تبریز ² استادیار گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی مرند، دانشگاه تبریز

دريافت: 1403/3/31، بازنگرى: 1403/10/14، پذيرش: 1403/10/23، نشر آنلاين: 1403/10/23

چکیدہ

انتتكاتبكو

این مقاله به بررسی پدیده پیچیده انتشار امواج طولی در مواد گرادیان ترکیبی (FGM) می پردازد. برخلاف مواد همگن سنتی که خواص ثابتی در سراسر ساختار خود دارند، مواد FGM تغییرات پیوستهای در خواص خود در سراسر ساختارشان نشان می دهند. این ناهمگنی ذاتی، چالش های منحصربه فردی را برای تحلیل رفتار انتشار امواج ایجاد می کند. این مطالعه از روش المان موج که یک تکنیک عددی قدر تمند و رایج برای حل مسائل دینامیکی در سازه های پیچیده است، استفاده می کند. این روش با در نظر گرفتن تغییرات تدریجی خواص ماده در طول میله، امکان تحلیل مؤثر انتشار امواج و رایج برای حل مسائل دینامیکی در را فراهم می کند. نتایج به دست آمده، تفاوت های قابل توجهی را در انتشار امواج بین مواد FGM و مواد همگن نشان می دهد. در مواد FGM، ویژگی های موج مانند سرعت، طول موج و دامنه، به طور پیوسته در طول ماده تغییر می کنند. این رفتار متمایز را می توان مستقیماً به ناهمگنی خواص ماده در MGM نسبت داد. این یافته، اهمیت در نظر گرفتن تغییرات خواص ماده می می زا می می ان شان می دهد. در مواد FGM، ویژگی های

ارمغان خواهد آورد.

کلیدواژدها: انتشار موج، مواد گرادیان ترکیبی، روش المان موج، ناهمگنی، خواص مواد.

1– مقدمه

در حوزه انتشار امواج، امواج صفحهای همگن بهعنوان یک مسئله بنیادی در نظر گرفته میشوند. این امواج که با معادله (A) و بردار موج (A) با مقادیر حقیقی هستند که نشاندهنده انتشار موج در یک جامد همگن، خطی و بدون پاشندگی است. با این حال، برای موادی که خاصیت پاشندگی¹ (خطی) را نشان میدهند، سادهترین شکل موج از این حالت ایدهآل منحرف میشود. در حالی که موج ساختار مشابهی را حفظ می کند، دامنه موج (A) و بردار موج (x) مقادیر مختلط پیدا می کنند. این تغییر از مقادیر حقیقی به مقادیر معمولاً از اصطلاح "موج غیرهمگن" استفاده میشود. در اصل، اصطلاح "موج غیرهمگن" میتواند معنای دوگانه داشته باشد. در زمینه خواص مواد، نشاندهنده تغییرات فضایی است؛ و در زمینه

1. Dispersion

 \odot

ناشر: معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه تبریز شاپا الکترونیکی: 4077-2717

نویسنده مسئول؛ شماره تماس: 09141978257

* Orcid Cod Corresponding Author: 0000-0002-0342-084X

انتشار موج از طریق محیطهای اتلاف کننده، نشان دهنده یک بردار

k مختلط و با تغییر دامنه مرتبط است. تشخیص این دوگانگی،

درک عمیقتری از رفتار موج در سیستمهای مختلف مواد را به

مواد ویسکوالاستیک، که با مکانیزمهای ذاتی اتلاف انرژی

مشخص می شوند، بستر اصلی شکل گیری امواج غیر همگن هستند.

بررسی مودهای موج و پراکندگی در محیطهای پاشنده، باعث

مشخص شدن برهمکنشهای پیچیده بین سرعت انتشار،

ثابتهای اتلاف و پدیدههای وابسته به فرکانس میشود. روابط

پاشندگی، همبستگی پیچیده بین فرکانس یک موج و عدد موج

استخراج و تعیین خواص مؤثر مرتبط با محیطهای پاشنده ایفا

می کنند (Touboul و همکاران، 2024). اندر کنش مودهای موج

وابسته به فرکانس است، که الگوریتمهای مرتبسازی مودها برای

روشهای همگنسازی با فرکانس بالا نقش مهمی را در

مربوط را مشخص می کنند (Gavassino و همکاران، 2024).

آدرس ايميل: m.mirzajani@tabrizu.ac.ir (م. ميرزاجاني)، k.falsafian@tabrizu.ac.ir (ک. فلسفيان).

https://doi.org/10.22034/CEEJ.2025.62180.2366

دستهبندی مودهای امواج و برای تمایز بین این مودها در سازههای پیچیده مورد استفاده قرار می گیرند (Aslam و همکاران، 2024). این امر بهخوبی مشخص شده است که امواج هارمونیک زمانی که از محیطهای اتلاف کننده عبور می کنند، دارای عدد موج با مقدار مختلط هستند. با این حال، امواج غیرهمگن، همان طور که در (Gopalakrishnan، 2016) بهطور جامع بررسی شده است، شامل امواجی هستند که بردار موج آنها (k) مقادیر مختلط دارد در این عبارت، k_1 و k_2 به تر تیب قسمتهای. ($k = k_1 + jk_2$) حقیقی و موهومی بردار موج را نشان میدهند. نکته قابل توجه این است که در امواج غیرهمگن، k_1 و k_2 لزوماً همراستا نیستند. این عدم همراستایی، امواج غیرهمگن را از نمونههای سادهتر آنها متمایز می کند، که در این حالت بردار موج کاملاً حقیقی باقی-میماند و جهت انتشار و تضعیف همجهت میشوند. وجود بردار موج غیرموازی در امواج غیرهمگن، منجربه پدیده جالب توجهی می گردد که در ادامه توضیح داده می شود. به دلیل وجود مؤلفه موهومي (k₂)، دامنه موج بهطور نمايي با افزايش فاصله كاهش مى يابد. با اين حال، مؤلفه حقيقى (k1) جهت كلى انتشار را تعيين می کند که می تواند از جهت تضعیف (تحت تأثیر k_2) منحرف شود. این جداسازی بین جهتهای انتشار و تضعیف، یک ویژگی منحصر بهفرد امواج غیرهمگن است و دیدگاه ارزشمندی در مورد رفتار موج در مواد با اتلاف ارائه میدهد.

علاوه بر مواد ویسکوالاستیک، دسته دیگری از محیطها که شامل انتشار امواج غیرهمگن میشوند، مواد گرادیان ترکیبی (FGM) هستند. برخلاف نمونههای همگن که خواص یکسانی در تمام نقاط دارند، مواد FGM دارای خواص الاستیک و اینرسی و برای دستیابی به اهداف عملکردی خاص تنظیم شود. در طبیعت، اکثر مواد در سطح میکروسکوپی تا حدی ناهمگنی از خود نشان میدهند. با این حال، برای بسیاری از کاربردهای مهندسی، اغلب بهطور سنتی، فلزها و سایر مواد صنعتی تا حد زیادی همگن فرض شده و نقصهای ذاتی آنها نادیده گرفته میشد. با این حال، پیشرفتهای اخیر امکان طراحی و ساخت مواد FGM با تغییرات خواص کنترلشده دقیق در فضا را فراهم کرده است.

نیاز به مواد با کارایی بالاتر و عملکردهای متنوع، محرک اصلی توسعه مواد گرادیان ترکیبی (FGM) است. مواد متعارف اغلب در برآوردن این نیازها، بهویژه در مواردی که تقاضاهای متناقضی وجود دارد، ناتوان هستند. بهعنوان مثال، ممکن است در یک کاربرد خاص بهطور همزمان به هدایت حرارتی بالا در یک سطح و عایق یا سختی بیشتر در سطح دیگر نیاز باشد. برای درک بهتر این چالش، در صورتی که یک کامپوزیت فلز- سرامیک معمولی در نظر گرفته شود؛ بهدلیل تفاوت قابل توجه در مدول الاستیسیته

بین فلز و سرامیک، تنشهای زیادی بین سطوح آنها ایجاد میشود. این تمرکز تنش میتواند منجربه ترکخوردگی و خرابی در وجه مشترک بین فلز و سرامیک شود و مزایای بالقوه استفاده از این کامپوزیت را از بین ببرد.

مواد FGM با ارائه راهحلی برای این مشکل، گامی انقلابی در علم مواد برداشتهاند. این مواد با داشتن خواصی که بهطور پیوسته در فضا تغییر می کند، می توانند نیازهای متناقض را در یک جزء واحد را برآورده کنند. بهعنوان مثال، می توان FGM را طوری طراحی کرد که در یک سمت هدایت حرارتی بالایی داشته باشد و در سمت دیگر عایق یا سخت تر باشد. این قابلیت FGMها، کاربردهای گستردهای را در زمینههای مختلف مانند مهندسی هوافضا، پزشکی و انرژی باز می کند. با استفاده از FGMها می توان قطعاتی با عملکرد و بازدهی بالاتر، وزن کمتر و طول عمر بیشتر تولید کرد. همچنین، آنها عملکرد عالی را در زمینههایی مانند و مدیریت حرارتی، یکپارچگی سازهای در محیطهای شدید و مقاومت در برابر سایش ارائه می دهند.

برخلاف کامپوزیتهای رایج که دارای مرز مشخصی بین مواد مختلف هستند، مواد FGM خواص الاستیک و حرارتی را به طور تدریجی و پیوسته در سرتاسر جزء تغییر میدهند. این تغییر تدریجی، جهشهای تنشی را که معمولاً در محل اتصال مواد مختلف در کامپوزیتهای سنتی ایجاد میشود، به حداقل میرساند. به این ترتیب، یکپارچگی و عملکرد سازهای قطعه به طور قابل توجهی بهبود می یابد.

برای روشنتر شدن موضوع، لازم است به کامپوزیتهای ماتریس فلزی (MMCs) بهعنوان رویکردی دیگر برای ترکیب خواص فلزات و سرامیکها اشاره کنیم. در MMCها، تقویتکنندههای سرامیکی مانند الیاف، سبیلکها یا ذرات در یک ماتریس فلزی تعبیه میشوند. با وجود مزایای خاص MMCها، ساختار آنها اغلب شامل فازهای مجزا در مقیاسهای مختلف (از 100 نانومتر تا میلی متر) است. این فازهای مجزا میتوانند نقاطی با تمرکز تنش ایجاد کنند که عملکرد آنها را در مقایسه با مواد FGM که دارای گرادیانهای پیوسته خواص هستند، محدود میکند.

در مقایسه با کامپوزیتهای سنتی، طراحی مواد FGM پیچیدهتر است. اما این پیچیدگی با مزایای قابل توجهی همراه است. FGMها با حذف رابطهای ناگهانی بین مواد و ایجاد تغییری کنترلشده و پیوسته در خواص، عملکرد بهتری را در کاربردهایی ارائه میدهند که به ترکیبی بهینه از قابلیتها در یک جزء واحد نیاز دارند.

تحلیل انتشار امواج در مواد گرادیان ترکیبی (FGM) بهدلیل ناهمگنی ذاتی این مواد، چالش علمی قابل توجهی بهشمار میرود. برخلاف مواد همگن که خواصشان در تمام نقاط یکسان است،

FGMها دارای خواص الاستیک و اینرسی متغیر در فضا هستند. این تغییر، تحلیل رفتار موج را در مقایسه با روشهای سنتی که برای مواد همگن به کار میروند، بهطور قابل توجهی پیچیدهتر میکند.

در حال حاضر، تحقیقات کمی در مورد رفتار مواد FGM تحت بارهای دینامیکی و ضربهای که نشاندهنده محیطهای مکانیکی شدید هستند، انجام شده است. این کمبود دانش، نیاز به مطالعات بیشتر بر روی پدیدههای انتشار موج در FGMها را نشان میدهد. درک عمیقتر رفتار موج در این مواد پیشرفته برای موارد زیر ضروری است:

بهینهسازی طراحیFGM: با درک عمیقتر از چگونگی انتشار امواج در مواد FGM، میتوان اصول طراحی جدیدی برای این مواد پیشرفته ایجاد کرد که عملکرد بهتری در برابر بارهای دینامیکی از خود نشان دهند. این دانش به مهندسان کمک میکند تا ترکیب مواد و گرادیانهای خواص را بهطور دقیق انتخاب کنند تا FGM را برای کاربردهای خاص بهینه کنند.

پیش بینی مکانیزمهای خرابی: دانش ما در مورد نحوه انتشار امواج در مواد FGM می تواند به شناسایی مکانیزمهای بالقوه خرابی این مواد تحت بارهای دینامیکی کمک کند. با تجزیه و تحلیل چگونگی تعامل امواج با ناهمگونیهای مواد FGM، می توانیم درک کنیم که ترکها چگونه شروع و منتشر می شوند. این امر به نوبه خود به ما امکان می دهد تا طرحهای FGM مقاوم تر در برابر خرابی را توسعه دهیم.

نیاز به روشهای نوین برای بررسی مواد FGM: ویژگیهای منحصر به فرد انتشار موج در مواد FGM، نیاز به استفاده از روشهای نوین برای بررسی و سنجش دقیق این مواد را بهوجود میآورد. این روشهای نوین میتوانند شامل تطبیق روشهای موجود مبتنی بر موج با مواد FGM یا توسعه رویکردهای کاملاً جدید برای ارزیابی رفتار دینامیکی این مواد پیشرفته باشند.

تحقیق انجام یافته در (Swaminathan و همکاران، 2015 ر روشهای تحلیلی و عددی مختلف برای تحلیل صفحات FGM را بهطور خلاصه بررسی کرده است. این مقاله بدون پرداختن به جزئیات ریاضی پیچیده، بر تنش، ارتعاش و رفتار کمانش پیشبینیشده توسط تئوریهای مختلف تمرکز دارد. نویسندگان بررسی کردهاند که چگونه تغییر خواص مواد، انواع بارگذاری و هندسه صفحه، از جمله اثرات غیرخطی، بر رفتار صفحات FGM تأثیر می گذارند. مطالعهای که در (Lu و همکاران، 2022) ارائه شده است، طراحی جدیدی برای تیرها ارائه میدهد که می تواند بهطور قابل توجهی ارتعاشات را در سازههای ساندویچی کامپوزیت کاهش دهد. این طراحی جدید از یک ماده FGM با ساختار خاص برای ایجاد شکاف باند (band gap) استفاده کرده است.

Li و همکاران (2022) روشی نوین برای ساخت پوستههای ساندویچی ارائه کردهاند که هم سبک و هم در برابر ضربه مقاوم باشند. این روش شامل ترکیب هستههای سهبعدی auxetic با صفحات رویی کامپوزیت با FGM (مواد با خواص تدریجی) میشود. محققان برای بررسی عملکرد این طراحی جدید، از تکنیکهای پیشرفته مدلسازی استفاده کرده و تأثیر دما و ضربه را بر روی پوستهها شبیهسازی کردهاند. نتایج نشان داده که این روش نوین پتانسیل بالایی برای کاربرد در مهندسی دریا دارد، زیرا پوستههای ساندویچی ساخته شده با این روش میتوانند هم وزن کمی داشته باشند و هم در برابر ضربههای شدید دریایی مقاوم باشند.

Liu و همکاران (2021) روشی جدید برای بررسی رفتار امواج در میکرو/ نانو- صفحات غیرهمسانگرد با FGM ارائه کردهاند. این روش جدید که "چندجملهایهای لژاندر متعامد توسعهیافته" نام دارد، به حل کارآمدتر مسائل مربوط به این نوع صفحات و اجتناب از روشهای پیچیده سلسله مراتبی کمک میکند. برای سنجش دقت این روش، نتایج آن با رویکرد دیگری مقایسه شده است. در این مطالعه، محققان تأثیر ابعاد و گرادیانهای مواد بر رفتار موج را بررسی کردهاند. نتایج نشان میدهد که ابعاد صفحه بر الگوهای موج تأثیر می گذارد و باعث ایجاد چین و چروک در آنها می شود. در مقابل، گرادیانهای مواد بر دامنه و برد امواج تأثیر می گذارند. همچنین، در مورد امواج SH، مشاهده شده است که پارامترهای ابعادی به طور متفاوتی بر فرکانس قطع و روند منحنی پاشندگی امواج تأثیر می گذارند. در (Zhang و همکاران، 2022)، محققان به بررسی رفتار امواج در استوانههای پیزوالکتریک با ساختار کریستالی منحصر بهفرد و مواد گرادیان ترکیبی تکبعدی پرداختهاند. این مطالعه، تأثیر همزمان خواص مواد، هندسه و نوع موج را بر روی انتشار و رفتار امواج در این نوع استوانهها بررسی میکند. تحلیلهای انجام شده نشان میدهد که چگونه این عوامل مختلف می توانند بر ویژگی های موج مانند سرعت، طول موج و دامنه آن تأثير بگذارند. همچنين، اين مطالعه منجربه شناسايي پدیدههای موجی جدیدی در این نوع استوانهها شده است. یافتههای این مقاله میتواند پایه و اساس نظری لازم برای طراحی و ساخت تجهیزات پیزوالکتریک با عملکرد بالا را فراهم کند، که در کاربردهای مختلفی مانند سنسورها، محرکها و مبدلهای انرژی مورد استفاده قرار می گیرند. در (Pshenichnov و همکاران، 2022)، محققان به بررسی انتشار امواج طولی غیرایستا در مواد ویسکوالاستیک با FGM پرداختهاند. این مطالعه بهطور خاص بر رفتار امواج در لایهها و استوانههای ساخته شده از این مواد تمرکز دارد. برای حل پیچیدگیهای ناشی ازFGM، محققان این مواد را به مجموعهای از لایههای نازک و یکنواخت با خواص مجزا تقریب زده، سپس با استفاده از روشهای تحلیلی و عددی، رفتار امواج در این ساختار لایهای را بررسی کردهاند. اعتبار روش حل با مقایسه

نتایج با موارد مشابه تأیید شده است. در نهایت، محققان تأثیر خواص مواد، ازجمله ویسکوزیته و ناهمگنی، بر انتشار امواج را در مواد FGM تحلیل کردهاند. این مطالعه میتواند در درک بهتر رفتار امواج در مواد پیچیده و طراحی مواد جدید با خواص موجی مطلوب کاربرد داشته باشد.

Koutoati و همکاران (2021) محققان مدلی جدیدی برای بررسی رفتار ارتعاشی تیرهای ساندویچی ساخته شده از FGM حاوى مواد ويسكوالاستيك ارائه كردهاند. اين مدل قادر به تحليل رفتارهای ارتعاشی و استاتیکی تیر با در نظر گرفتن خواص غیرخطی و وابسته به فرکانس مواد است. در این مقاله، دو مدل تغییر شکل برشی و قوانین مختلف ویسکوالاستیک با یکدیگر مقایسه شدهاند. روش حل ارائه شده برای این مدل کارآمد بوده و با مدلسازیهای سهبعدی اعتبارسنجی شده است. محققان با استفاده از این مدل، تأثیر خواص مواد و شرایط مرزی را بر ویژگیهای استاتیکی، دینامیکی و میرایی تیر بررسی کردهاند. نتایج نشان داده است که ضریب میرایی و وابستگی توانی غیرخطی آن، تأثیر قابل توجهی بر ویژگیهای دینامیکی تیر دارند. همچنین، مشاهده شده است که شرایط مرزی بر مُدهای ارتعاش تیر تأثیر می گذارند و در مورد خاص تیر کنسولی، نیاز به بهینهسازی ویژهای دارند. در (Belabed و همکاران، 2024) خصوصیات دینامیکی تیرهای ساندویچی FGM با مقطع متغیر مورد ارزیابی قرار گرفته و از مدل المان محدود پیشرفته تیر استفاده شده است. نوآروی این تحقیق در تحلیل تیرهای با مقطع متغیر ساندویچی و بررسی پیامدهای ناشی از ترکیب مواد و آرایش هندسی بر پاسخ ارتعاش آزاد و اجباری از جمله شرایط مرزی متنوع بوده است که منجربه پیشرفت در مدلسازی مکانیکی سازههای ساندویچ کامپوزیت، به-ویژه آنهایی که از مواد FGM همراه با ملاحظات هندسی پیچیده استفاده میکنند، شده است.

زمانی که جهت انتشار موج و جهت تغییر خواص ماده همجهت باشند، مسئله پیچیدگی قابل توجهی از خود نشان میدهد. در چنین مواردی، حتی اگر سیستم ماهیتاً اتلاف کننده نباشد، عدد موج مقدار مختلط پیدا می کند. این عدد موج مختلط دارای اجزای حقیقی و موهومی غیرحقیقی است که نشاندهندهی انحراف از رفتار سادهتر مشاهدهشده در موجبرها (راهنماهای موج) همگن است. این پیچیدگی ایجاب می کند برای درک کامل رفتار موج در این مواد ناهمگن، تحقیقات بیشتری انجام شود.

یکی از چالشهای اصلی در این نوع تحلیل، معادله حاکم آن است. برخلاف معادلات مربوط به مواد همگن با ضرایب ثابت، در مواد ناهمگن ضرایب معادله نیز متغیر هستند که این امر منجر به پیچیدهتر شدن معادله دیفرانسیل جزئی حاکم میشود. برای حل این معادله، روشهای مختلفی در حوزههای زمان و فرکانس مورد بررسی قرار میگیرند. در حوزه زمان، رویکرد "اجزای محدود فوق

همگرا" بهعنوان روشی نویدبخش مطرح میشود. این روش از راهحلهای دقیق برای مؤلفه استاتیکی معادله حاکم بهعنوان تابع درونیابی برای جابهجاییها استفاده میکند. این توابع منجربه ماتریس سختی دقیق و توابع شکل ذاتی دقیق میشوند. در ادامه روند حل، از این توابع دقیق برای دستیابی به ماتریس جرمی دقیق تر نسبت به روشهای متداول استفاده شده است. این رویکرد در فرمول بندی اجزای محدود دقیق برای سازههای مختلف مانند کامپوزیتهای لایهای عمیق (Phaubey و همکاران، 2018) و مواد گرادیان ترکیبی موفقیتآمیز بوده است. با این حال، روشهای اندازههای سیستم میتوانند از نظر محاسباتی پرهزینه باشند، اندازههای سیستم میتوانند از نظر محاسباتی پرهزینه باشند، محدود فرموله شده طیفی میتواند مفید باشد. این المانهای ویژه معدود فرموله شده طیفی میتواند مفید باشد. این المانهای ویژه بهدلیل ویژگیهای فرمول بندیشان، به طور خاص برای مسائل انتشار موج مناسب هستند.

در مقاله حاضر به انتشار موج در یک ماده یک بعدی (1 بعدی) ناهمگن پرداخته می شود، جایی که خواص مواد در جهت انتشار موج تغییر می کند. در حالی که اصطلاح «موج ناهمگن» اغلب در رابطه با تغییرات در مختصات فضایی به کار می رود، ما در اینجا از آن برای توصیف چالش های منحصر به فردی که در این سناریوی خاص به وجود می آید، استفاده می کنیم.

در این مقاله، روش جایگزینی بهنام "روش المان موج" برای حل مسائل انتشار موج در محیطهای پیچیده به کار گرفته شده است. این روش که در سالهای اخیر مورد توجه قرار گرفته (Khaji و همکاران؛ 2021، Mirzajani و همکاران، 2018؛ Mirzajani و همکاران، 2021)، از مدلسازی ریاضی مستقیم برای شبیهسازی دقیق انتشار موج و تنشها و کرنشهای ایجاد شده در المانها استفاده می کند. بهدلیل اتکا به مدلسازی ریاضی مستقیم، نیازی به فرمول بندی و حل معادلات دیفرانسیل حرکت نیست و در نتیجه، نتایج این روش در بسیاری از موارد با حل دقیق مسئله تطابق کامل دارد (Shorr، Shorr).

2- فرمولبندى مسئله

در این بخش به معرفی معادله دیفرانسیل حاکم برای انتشار موج در یک راهنمای موج (wave guide) یک بعدی ناهمگن پرداخته می شود. یک میله با خواص مواد متغیر در طول و ضخامت آن را در نظر بگیرید (همان طور که در شکل (1) نشان داده شده است). این مدل ساده شده، یک راهنمای موج یک بعدی را نشان می دهد که از سه بخش مجزا با مواد مختلف تشکیل شده است: فولاد، یک ماده گرادیان ترکیبی (FGM) و سرامیک. فرض بر این است که بخش های فولادی و سرامیکی دارای خواصی هستند که مستقل از مختصات فضایی هستند. برعکس، بخش FGM به دلیل

تغيير تدريجي خواص در طول (جهت x) براى مدول الاستيسيته (E) و چگالی(ρ) طبق معادلات زیر، از بخشهای همگن متمایز مى شود:

$$E(x,z) = E_0 f(x) g(z),
\rho(x,z) = \rho_0 s(x) t(z),$$
(1)

بخش FGM بهدلیل تغییر خواص مواد در طول و ضخامت خود، از بخشهای همگن فولاد و سرامیک متمایز می شود. این ناهمگنی پیچیدگیهایی را بهوجود میآورد که نیازمند استخراج یک معادله حاکم مخصوص برای راهنماهای موج ناهمگن است. در بخشهای همگن فولاد و سرامیک (شکل (1))، خواص مواد مانند مدول الاستیسیته (E_0) و چگالی (ρ_0) در سراسر طول و ضخامت آنها ثابت هستند. از آنجایی که تحلیل فقط بر انتشار موج طولی متمرکز است، مؤلفه مهم تنش، تنش نرمال (σ_{xx}) در جهت x و تغییرمکان مربوطه، تغییرمکان طولی (u) میباشد. رابطه بین تنش و تغییرمکان در این بخشها توسط قانون هوک کنترل مى شود:

$$\varepsilon_{xx} = \partial u / \partial x; \ \sigma_{xx} = E(x, z) \partial u / \partial x$$
, (2)

که در آن $\partial u/\partial x$ شیب (گرادیان) تغییرمکان در جهت x را نشان میدهد. در این بخش، اصل کمترین عمل همیلتون بهعنوان روشی قدرتمند برای استخراج معادله حاکم برای میله FGM معرفی می شود. این اصل بیان می کند که در غیاب نیروهای خارجی، عملگر (Σ) کل سیستم، که نمایانگر کل کنش است، نسبت به تغییرات میدان تغییرمکان (U) بهمقدار ایستایی میرسد. بهعبارت ریاضی، این اصل را میتوان بهصورت زیر بیان کرد:

$$\delta\Sigma = \delta \int_0^T (T - U) dt = 0$$
(3)

که در آن δ نماد تغییرات است؛ T انرژی جنبشی میله t مىباشد؛ U انرژى پتانسيل ذخيرهشده درون ميله است و نشاندهنده زمان است. در نتیجه می توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A_{11} f(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = I_0 s(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{4}$$

که برای سادگی، فرض میکنیم سطح مقطع (A) در طول میله ثابت است A_{11} و I_0 عبارتهایی هستند که برحسب ضخامت (z) انتگرال گیری شدهاند و به صورت زیر تعریف می شوند:

$$A_{11} = E_0 \int_A g(z) dA$$
, $I_0 = \rho_0 \int_A t(z) dA$ (5)

با استفاده از اصل تغییرات، شرطهای مرزی طبیعی بهصورت زير تعريف مي شوند:

$$A_{11}f(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = F,$$
(6)

شرطهای مرزی طبیعی از اصل تغییرات برای گرههای انتهایی در x=0 و x=L بهدست میآیند، که در آن F هر نیروی نقطهای اعمال شده در مرزها را نشان میدهد. برای سادگی، فرض بر این است که خواص مواد E و ρ هیچ تغییری در جهت ضخامت (z) (1) ندارند، همان طور که با مقادیر ثابت g(z) و $\rho(z)$ در معادله نشان داده شده است. تغییر در جهت طول (جهت x) توسط توابع و (x) و (x) دشان داده می شود (chakraborty و f(x).(2003 Gopalakrishnan



شکل 1- المان میله شامل مواد گرادیان ترکیبی

3- روش المان موج

در این بخش روشی عددی به نام روش المان موج ارائه شده است. این روش شامل گسستهسازی یک میله بهطول L به المانهای با طول دلخواه (شکل (2-الف) را ببینید) می شود. در این روش، انتشار گسستگیهای قوی در سرعتها، تنشها و کرنشها با سرعت موج محدود بیان می شود.



شکل 2- نحوه گسستهسازی المانها در در روش المان موج

شکل (2-الف) گسستهسازی یک میله را به المانهای مجزا نشان میدهد. با فرض قرار گیری مبدأ محور x در مرز المانها و جهت مثبت آن بهسمت راست، گسستگیهای تنش و کرنش در

محل اندرکنش المانهای 1 – $j \in j$ در زمان t = 0 میتوانند به - صورت رابطه (7) بیان شوند:

$$\begin{aligned}
\nu(x,0) &= \begin{cases} \nu_{j-1,0}, x < 0 \\ \nu_{j,0}, x > 0 \end{cases}; \\
\sigma(x,0) &= \begin{cases} \sigma_{j-1,0}, x < 0 \\ \sigma_{j,0}, x > 0 \end{cases}
\end{aligned} (7)$$

سپس با استفاده از رابطه (2) و نوشتن معادله دیفرانسیل حرکت برای یک میله همگن بهصورت:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(E_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{8}$$

میتوان با استفاده از روش مشخصهها و تعریف شرایط اولیه (رابطه (7)) به رابطه (9) رسید:

$$\nu(x,t) = 0.5 [\nu_{j,0} + \nu_{j-1,0} + (\sigma_{j,0} - \sigma_{j-1,0})/\rho c]$$
(9)

که در آن $c = \sqrt{E_0/\rho_0}$ است و رابطه (9) برای $c = \sqrt{E_0/\rho_0}$ برای ناحیه آشفته معتبر است. برای مدلسازی ماهیت ناهمگن بخش FGM، میتوان از قوانین مختلف تغییر خواص مواد استفاده کرد. دو رویکرد مجزا را میتوان مورد بررسی قرار داد: تغییر چندجملهای و تغییر نمایی. در مورد تغییر چندجملهای ، توابع f(x) که نشان دهنده مدول الاستیسیته (E) و چگالی (ρ) هستند، به صورت زیر بیان می شوند:

$$f(x) = (1 + \alpha x)^{n}, s(x) = (1 + \beta x)^{n}$$
(10)

که α و β به گونه ای انتخاب شده اند که خواص مواد به طور پیوسته از یک ماده به ماده دیگر تغییر می کند. این رویکرد چند جمله ای به تغییری تدریجی و کنترل شده خواص مواد در بخش FGM اجازه می دهد. رویکرد جایگزین، از تغییر نمایی استفاده می کند، جایی که f(x) و (x) به صورت زیر تعریف می شوند:

$$f(x) = e^{\alpha x}, \qquad s(x) = e^{\beta x} \tag{11}$$

تغییر نمایی، روش دیگری برای مدلسازی تغییر خواص ارائه میدهد و بهطور بالقوه، نشاندهنده یک گذار سریعتر در FGM است. با در نظر گرفتن این دو سناریوی متضاد، میتوانیم درک گستردهتری از رفتار انتشار موج در طیف وسیعی از پروفایلهای مواد ناهمگن بهدست آوریم.

با توجه به شکل (1) و شکل (2) میتوان سلول واحدی را در روش پیشنهادی در نظر گرفت و با استفاده از روابط حاکم بر این سلول واحد، انتشار موج در طول میله را برای هر ترکیب دلخواهی از لایههای FGM مدلسازی کرد. در گام زمانی *i*، فرض میشود که اندازه گام زمانی برابر Δt_i و سرعت موج در المان f برابر $c_j = \Delta x_j / \Delta t_i$

با اعمال نیرو به محیط مسئله، گسستگیهای شدیدی در تنشها و سرعتها وجود خواهد داشت. برای تحلیل انتشار موج، فرض میشود که این گسستگیها در یک لحظه زمانی بسیار کوچک رخ می می شود که این گسستگیها در یک لحظه زمانی بسیار کوچک رخ می دمید. بنابراین، باید بین دو لحظه زمانی $_{i-1}^{-1} e +_{i-1}^{-1}$ تمایز قائل می دهد. بنابراین، باید بین دو لحظه قبل از ایجاد گسستگی شدید (r_{i-1}^{+1}) و لحظه بانفاصله بعد از ایجاد گسستگی (r_{i-1}^{+1}) هستند. در (r_{i-1}^{-1}) و لحظه قبل از ایجاد گسستگی شدید در (r_{i-1}^{-1}) و لحظه قبل از ایجاد گسستگی شدید. در (r_{i-1}^{-1}) و لحظه قبل از ایجاد گسستگی (r_{i-1}^{+1}) هستند. در (r_{i-1}^{-1}) و محالت لحظه قبل از ایجاد گسستگی (r_{i-1}^{+1}) هستند. در این حالت، سرعت (r_{i-1}) و جابه به استاتیکی قرار داشته باشد. در این حالت، سرعت (r_{i-1}) و جابه روابط مکانیکی حاکم بر یک المان را به مورت زیر نوشت: $(r_{i-1}) - u_{j,0} - u_{j,0} - u_{j,0} - u_{j,0}$ مومنتوم خطی: $(r_{i-1}) - u_{j,0} - u_{i,0} - u_{i,0}$ انرژی جنبشی: $(r_{i,0} - u_{j,0}) - (L_{i,0}(x)) - U_{i,0}$ انرژی پتانسیل: $(r_{i,0} - u_{j,0}) - (u_{i,0} - u_{j,0}) - (r_{i,0}) - u_{i,0}$

با استفاده از روابط مکانیکی در لحظه مورد نظر، میتوان روابط نیروی اعمالی به المان در گرههای آن را مطابق با رابطه (12) بهدست آورد:

$$F_{j,0}^{\pm} = \frac{\partial P_{j,0}}{\partial u_{j,0}^{\pm}} = \pm \left(A_{11} f(x) \right)_j (u_{j,0}^+ - u_{j,0}^-) / \Delta x_j$$
(12)

با توجه به این که سرعتهای $_{0.1-i}v$ و $_{0,i}v$ در المانهای مجاور 1 - j و j می توانند مقادیر متفاوتی داشته باشند، در محل گره j (مطابق با شکل (2 - -)) گسستگی سرعت ایجاد می شود و این گره در تعادل نخواهد بود. در نتیجه، گسستگیهای شدیدی در سرعتها و تنشها در بین این دو المان در زمان $_{i-1}^{-1}$ به وجود می آید. از آنجا که گرهها در المانهای مجاور باید در تعادل باشند، می آید. از آنجا که گرهها در المانهای مجاور باید در تعادل باشند، این گستگیهای شدیدی در مرعتها و تنش ها در بین این دو المان در زمان $_{i-1}^{-1}$ به وجود می آید. از آنجا که گرهها در المانهای مجاور باید در تعادل باشند، این گسستگیها باید بلافاصله (یعنی در زمان $_{i-1}^{-1}$) به مقادیر $F_j^ F_{j-1}^-$ و نیروهای مرزی $_{i-1}^{+1}$ ثابت جدید سرعتهای مرزی $_{i-1}^{-1}v$ زمانی $_{i+1}$ ثابت رابطه (13) کاهش یابند. تمامی این مقادیر باید در طول گام زمانی (رابطه (13)) باقی بمانند و درنتیجه باید شرط مرزی بین المانی (رابطه (13))

$$F_j^* + F_j^- - F_{j-1}^+ = 0$$
 (13)

$$v_{j-1}^+ = v_j^-$$
 (13)

در این معادله، F_i^* نیروی خارجی است که میتواند در گره مشترک المانها اعمال شود. رابطه (13-الف) شرط تعادل مرز داخلی المانها و رابطه (13-ب) بیانگر پیوستگی بین المانی است. در مرحله بعد، بهمنظور تحلیل انتشار امواج تنش و سرعت در طول المان، از اصل پایستگی مومنتوم در دو فاز استفاده میشود. برای این منظور، گام زمانی Δt_i به دو قسمت تقسیم میشود. در نصف با اتمام گام زمانی Δt_i یعنی $\Delta t_i + \Delta t_{i-1} = -i$ ، حالت مکانیکی تمامی المانها به حالت شبهایستا باز خواهد گشت. در این مرحله، با مشخص بودن سرعتها و جابهجاییهای جدید گرهای، میتوان دوباره حالت جدید المانهای موج را مشخص کرد و روند محاسبات قبلی را برای گام زمانی بعدی تکرار نمود. تنها مجهول باقیمانده در این مرحله، گام زمانی $i\Delta$ یا بهعبارتی سرعت المانهای موج است. برای تعیین $i\Delta$ از قانون پایستگی انرژی برای کل میله استفاده میکنیم. بر اساس این قانون، مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل المانها باید برابر با کار انجام شده توسط سیستم باشد:

$$P_{i\Sigma} + K_{i\Sigma} = W_{i\Sigma}^* \tag{20}$$

در این معادله، $P_{i\Sigma}$ انرژی پتانسیل کل میله و $K_{i\Sigma}$ انرژی جنبشی کل میله در لحظه زمانی t_i^- و $W_{i\Sigma}^*$ کار انجام شده توسط سیستم در کل فرآیند انتشار موج است.

4- مثالهای عددی 1-4- صحتسنجی

در این بخش، صحتسنجی روابط ارائه شده مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور یک مسئله ناهمگن که مصالح آن توسط یک لایه مصالح FG از هم جدا شدهاند در نظر گرفته شده است. مصالح در نظر گرفته شده شامل آلومینیوم و آلومینا است. مشخصات مصالح مورد استفاده در جدول (1) ارائه شده است.

جدول 1- مشخصات مصالح

	C	07 .	
ho (kg/ı	m³) E	(GPa)	مصالح
2600)	70	آلومينيوم
3950)	390	آلومينا

میله دارای طول واحد است و مساحت مقطع آن 0/01 مترمربع در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی بهصورت یک سر آزاد و یک سر گیردار است. یک ضربه با مدت زمان 50 میکروثانیه و محتوی فرکانسی تقریباً 46 کیلوهرتز به آن اثر میکند.

زمانی که میله با دو مصالح متفاوت که در جهت طولی بههم اتصال داده شدهاند را داشته باشیم که تحت اثر بار ضربه قرار بگیرند، بهدلیل تغییر در امپدانس در وجه مشترک دو مصالح، انعکاس اضافی در این وجه ایجاد خواهد شد، که در بسیاری از موارد باعث کاهش یکپارچگی سازه میشود. یکی از راهحلها استفاده از مصالح غیرهمگن از نوع FGM در بین دو مصالح است که انعکاس موج را بهطور کامل از بین ببرد. جهت بررسی این پدیده یک میله با دو مصالح آلومینیوم و آلومینا در نظر گرفته شده است. بارگذاری در انتهای آزاد میله اعمال شده و سرعت در ابتدای اول این گام زمانی، یعنی تا زمانی که امواج به وسط المانها نرسیدهاند، میتوان نوشت:

$$\begin{cases} \nu_{j-1}^{+} = \nu_{j-1,0} + \frac{\left(F_{j-1}^{+} - F_{j-1,0}\right)\Delta t_{i}}{\left(I_{0}s(x)\right)_{j-1}\Delta x_{j-1}} \\ \nu_{j}^{-} = \nu_{j,0} - \frac{\left(F_{j}^{-} - F_{j,0}\right)\Delta t_{i}}{\left(I_{0}s(x)\right)_{j}\Delta x_{j}} \end{cases}$$
(14)

با استفاده از رابطه (14)، میتوان مقادیر سرعت در سمت راست المان 1 - j و سمت چپ المان j - 1 و همچنین ارتباط آنها با تنشهای اعمال شده را به دست آورد. سپس، با جایگذاری روابط (14) در روابط (13)، سرعتهای مرزی جدید به دست میآیند:

$$v_{j-1}^{+} = v_{j}^{-}$$

$$= \frac{(I_{0}s(x))_{j-1}\Delta x_{j-1}v_{j-1,0} + (I_{0}s(x))_{j}\Delta x_{j}v_{j,0}}{(I_{0}s(x))_{j-1}\Delta x_{j-1} + (I_{0}s(x))_{j}\Delta x_{j}} \qquad (15)$$

$$+ \frac{(F_{j,0} - F_{j-1,0} + F_{j}^{*})\Delta t_{i}}{(I_{0}s(x))_{j-1}\Delta x_{j-1} + (I_{0}s(x))_{j}\Delta x_{j}}$$

$$\begin{cases} F_{j-1,0} \\ F_{j-1}^{+} = \frac{(I_0 s(x))_{j-1} \Delta x_{j-1} (\nu_{j-1}^{+} - \nu_{j-1,0})}{\Delta t_i} \\ F_{j,0} \\ F_{j}^{-} = -\frac{(I_0 s(x))_j \Delta x_j (\nu_{j}^{-} - \nu_{j,0})}{\Delta t_i} \\ F_{j-1}^{-} = F_{j-1}^{+} - F_{j}^{*} \end{cases}$$
(16)

با استفاده از روابط (15) و (16)، میتوان سرعتها و نیروها در مرز بین دو المان 1 - j و j را بهطور کامل مشخص کرد. در نصف دوم این گام زمانی، امواج به مرکز المانها میرسند و پس از آن بهسمت انتهای المان j باز خواهند گشت. با اعمال اصل پایستگی مومنتوم به کل المان در گام زمانی Δt_i سرعت جدید المان بهدست میآید:

$$v_{j} = v_{j,0} + \frac{\left(F_{j-1}^{+} - F_{j}^{-} - F_{j}^{*}\right)\Delta t_{i}}{\left(I_{0}s(x)\right)_{j}\Delta x_{j}}$$
(17)

طبق بخش دوم، رابطه (14)، حالت جدید اینرسی- تنش بهصورت زیر خواهد بود (شکل (2-ب)):

$$\begin{cases} F_j = F_j^- + F_j^+ - F_{j,0} \\ \nu_j = \nu_j^- + \nu_j^+ - \nu_{j,0} \end{cases}$$
(18)

جابهجاییهای جدید گرهی برابر خواهد بود با:

$$u_j^{\pm} = u_{j,0}^{\pm} + v_j^{\pm} \Delta t_i \tag{19}$$

میله اندازه گیری شده است. سپس ناحیه FGM به تدریج از صفر تا صد درصد افزایش داده شده است. این ناحیه در وسط میله در نظر گرفته شده است. انتهای گیردار میله شامل مصالح آلومینیوم می شود و انتهای آزاد مصالح آلومینا را شامل می شود. نتایج به-دست آمده در شکل (3) نشان داده شده است (Mirzajani و همکاران، 2018).



در این شکل، FGM %0 مربوط به میله با دو مصالح بدون لایه FGM است. اولین پیک به وجود آمده متناسب با بار اعمالی به سازه است. پیک دوم و سوم مربوط به انعکاس اول و انعکاس دوم موج در ناحیه آلومینا است. با توجه به این که سرعت موج طولی در آلومينا برابر 9/9365 كيلومتر بر ثانيه است، زماني كه طول می کشد تا بار اعمالی در طول یک متر انتشار یابد برابر <u>100μsec + 100μsec + جواهد بود؛</u> يعنى 200/6 ميكروثانيه. اين همان زمان وقوع پیک دوم است که در شکل (3) نشان داده شده است. بهطور مشابه پیک سوم زمانی بهاندازه 100µsec + ² برابر با 301/28 میکروثانیه نیاز دارد. درنهایت، سرعت موج طولی در آلومینیوم برابر 5/1887 کیلومتر بر ثانیه است، و زمان لازم برای بار اعمالی برای رسیدن به پیکهای بعدی بعد از انعکاس از انتهای گیردار برابر <u>100μsec + 1, 1887</u> + <u>100μsec</u> یعنی 393/36 میکروثانیه خواهد بود. این مقادیر در شکل (3) مشخص هستند. همچنین اضافه شده ناحیه FGM باعث از بین رفتن انعکاس موج در مسئله شده است که در شکل (3) مشاهده می شوند.

2-4- نتايج عددى

در این بخش میله دولایه ارائه شده در بخش قبلی در نظر \mathcal{R} رفته شده است. برای سادهسازی محاسبات پارامترها به حالت بی بعد تبدیل شدهاند. به این صورت که قسمت آلومینیوم دارای پارامترهای بی بعد 1 = $E_1 = I$ انتخاب شده و در لایه بعدی (آلومینا) 2.6582 = $\rho_2 = 0.1795$ و 2.1795 تعیین شده است. طول میله به 15000 المان تقسیم شده است. بار اعمال شده به انتهای آزاد میله به صورت پالسهای مستطیلی با عرضهای زمانی متفاوت

انتخاب شده است که در رابطه زیر و شکل (4) نحوه تغییر عرض زمانی بار مشخص شده است:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (10, 30, 70, 120) \times \Delta x$$
 (21)



1-2-4- ميله دولايه با FGM %

در ابتدا، میله دولایه بدون FGM در نظر گرفته شده است. در این میله، نصف طول میله شامل مصالح آلومینا و نصف دیگر شامل مصالح آلومینیوم میباشد. لذا در محل وجه مشترک دو لایه تغییر در امپدانس مصالح را داریم و انعکاس موج تنش در این وجه مشترک رخ خواهد داد. برای مشخص شدن نحوه انتشار موج تنش در این میله، شکل (5) در نظر گرفته شده است. محل وجه مشترک با یک خط چین در شکل مشخص شده است. در این مشترک با یک خط چین در شکل مشخص شده است. در این مشترک ای موم تنش در طول میله در هفت گام زمانی مختلف نمایش داده شده است. تا زمانی که موج به وجه مشترک نرسیده است، شکل موج تنش مشابه با بار اعمالی در طول میله انتشار مییابد. با رسیدن موج به وجه مشترک دو لایه انعکاس در شکل موج تنش بهوقوع میپیوندد که در نمودارهای نشان داده شده قابل مشاهده است.



شکل 5- پاسخ میله FGM %0 به بار اعمالی

خاطرنشان می گردد در شکل (5)، گامهای زمانی از پایین به بالا افزایش می ابند، بنابراین خط آبی اولین موج تنش و خط قرمز پررنگ آخرین موج تنش را نشان می دهند. به دلیل ماهیت پیچیده موج تنش به میزان بسیار محدودی اختلاف با حل تحلیلی مشاهده می گردد که با توجه به ماهیت عددی روش مورد استفاده طبیعی بوده و در نتایج تأثیر نخواهد داشت.

2-2-4- ميله دولايه با FGM %

در گام بعدی، مصالح FGM به میله دولایه اضافه شده است. به این صورت که ده درصد از طول میانی میله تبدیل به مصالح FGM شده است و خواص مصالح با استفاده از رابطه (10) و بهصورت خطی از آلومینا به آلومینیوم تغییر داده شده است. همان طور که در شکل (6) نشان داده شده است، با ورود بار اعمالی به ناحیه FGM انعکاس موج رخ داده است، اما نحوه انتشار موج تنش با حالت بدون FGM تغییر یافته است.



30% FGM -3-2-4 ميله دولايه با

روند افزایش ناحیه FGM در میله دولایه ادامه یافته و در این بخش سی درصد از بخش میانی میله به مصالح FGM اختصاص داده شده است. در شکل (7) نحوه انتشار موج تنش در این میله نمایش داده شده است. تغییر شکل موج بهدلیل انعکاس در سهلایه از میله در زمانهای مختلف قابل مشاهده است.

4-2-4- میله دولایه با FGM %

در مرحله بعد، میزان پوشش لایه FGM در میله دولایه به شصت درصد افزایش یافته است. در این حالت بخش عمدهای از میله شامل مصالح FGM میشود که خواص مصالح بهصورت خطی از آلومینا به آلومینیوم تغییر میکنند. با ورود موج ورودی به ناحیه FGM انعکاس موج رخ داده است که در سه نمودار آبی، قرمز و سبز در سمت چپ و پایین نمودار شکل (8) مشخص است. با ورود

موج به ناحیه FGM این انعکاس با شدت کمتری مشاهده می شود که ناشی از تغییر خطی خواص ماده در این ناحیه است.





5-2-4- ميله دولايه با FGM %

درنهایت، کل طول میله تبدیل به مصالح FGM شده است. مصالح از آلومینا از ابتدای میله شروع می شوند و با یک تغییر خطی به آلومینیوم می رسند. در این حالت انتظار داریم که هیچ گونه انعکاسی در موج تنش رخ ندهد و بار اعمالی در طول میله انتشار یابد. در شکل (9) نتایج مربوط به این حالت نشان داده شده است. همان گونه که مشاهده می گردد موج ورودی بدون انعکاس در طول میله منتشر شده است و اثرات تغییرات خطی مصالح نیز در شکل موج تنش مشاهده می شود. بنابراین می توان نتیجه گرفت که این نوع سازه در برابر موج ضربه اعمالی به شکل یکپارچه عمل رفتار است.

- Chaubey AK, Ajay K, Chakrabarti A, "Novel shear deformation model for moderately thick and deep laminated composite conoidal shell", Mechanics Based Design of Structures and Machines, 2018, 46 (5), 650-668.
- https://doi.org/10.1080/15397734.2017.1422433 Doyle JF, Doyle JF, "Wave propagation in structures (pp. 126-156)", Springer US, 1989.
- Gavassino LMD, Noronha J, "Dispersion relations alone cannot guaranteecausality", Physical review letters, 2024, 132 (16), 162301.
- https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.132.162301 Gopalakrishnan S, "Wave propagation in materials and structures", Crc Press, 2016.
- Khaji N, Mirzajani M, Hori M, "Analysis of elastic pulse dispersion in periodically layered composite rods using wave finite element method", International Journal of Applied Mechanics, 2021, 13 (05), 2150050.

https://doi.org/10.1142/S1758825121500502

- Koutoati K, Foudil M, Carrera E, "A finite element approach for the static and vibration analyses of functionally graded material viscoelastic sandwich beams with nonlinear material behavior", Composite Structures, 2021, 274, 114315.
- https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114315 Li C, Shen H, Yang J, "Low-velocity impact response of cylindrical sandwich shells with auxetic 3D double-V meta-lattice core and FG GRC facesheets", Ocean Engineering, 2022, 262, 112299.
- https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.112299 Liu C, Yu J, Xu W, Zhang X, Wang X, "Dispersion characteristics of guided waves in functionally graded anisotropic micro/nano-plates based on the modified couple stress theory", Thin-Walled Structures, 2021, 161, 107527. https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107527
- Lu Q, Chunchuan L, Peng W, "Band gap enhancement and vibration reduction of functionally graded sandwich metastructure beam", Composite Structures, 2022, 292. 115650.
- https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115650 Mirzajani M, Khaji N, Muneo H, "Wave propagation analysis of micropolar elastic beams using a novel micropolar wave finite element method", Mechanics of advanced materials and structures, 2021, 28 (6), 551-567.
- https://doi.org/10.1080/15376494.2019.1572844
- Mirzajani M, Khaji N, Hori M, "Stress wave propagation analysis in one-dimensional micropolar rods with variable cross-section using micropolar wave finite element method", International Journal of Applied Mechanics, 2018, 10 (04), 1850039. https://doi.org/10.1142/S1758825118500394
- Pshenichnov S, Ivanov R, Datcheva M, "Transient wave propagation in functionally graded viscoelastic structures", Mathematics, 2022, 10 (23), 4505. https://doi.org/10.3390/math10234505
- Shorr BF, "The wave finite element method in Foundation of Engineering Mechanics Series", Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2004.
- Swaminathan K, Naveenkumar DT, Zenkour AM, Carrera E, "Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates-A state-of-the-art review", Composite Structures, 2015, 120, 10-31.



شکل **9-** پاسخ میله FGM %100 به بار اعمالی

5- نتيجەگىرى

در این مقاله، از روش المان موج برای تحلیل انتشار موج در محیط FGM استفاده گردید. برای این منظور، انتشار موج طولی در میله ناهمگن، که بهطور خاص دارای طبیعت پاشنده بودند مورد بررسی قرار گرفت. مثالهای متعددی با استفاده از روش FGM مورد بررسی قرار گرفت. مشخص شد که با تغییر مصالح از حالت همگن به حالت ناهمگن، نحوه انتشار موج و شکل انتشار موج تغییر مییابد. در حالتی که کل میله به صورت FGM بود نیز مشخص شد که هیچ گونه انعکاسی در موج تنش نخواهیم داشت. نتایج حاصل از این مقاله میتواند در طراحی المانهای صنعتی که حفظ یکپارچگی سازه در هنگام انتشار موج بسیار اهمیت دارد مورد استفاده قرار گیرد.

6- مراجع

- Aslam M, Park J, Lee J, "A comprehensive study on guided wave dispersion in complex structures", International Journal of Mechanical Sciences, 2024, 269, 109089.
 - https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2024.109089
- Belabed Z, Abdeldjebbar T, Abdelmoumen, AB, Abdelouahed T, Yaylacı M, "Accurate free and forced vibration behavior prediction of functionally graded sandwich beams with variable cross-section: A finite element assessment", Mechanics Based Design of Structures and Machines, 2024, 1-34. https://doi.org/10.1080/15397734.2024.2337914
- Chakraborty A, Gopalakrishnan S, "Various numerical techniques for analysis of longitudinal wave propagation in inhomogeneous one-dimensional waveguides", Acta mechanica, 2003, 162 (1), 1-27. https://doi.org/10.1007/s00707-003-1014-5
- Chakraborty A, Gopalakrishnanm S, "Wave propagation in inhomogeneous layered media: solution of forward and inverse problems", Acta Mechanica, 2004, 169, 1, 153-185.

https://doi.org/10.1007/s00707-004-0080-7

- Touboul M, Vial B, Assier R, Guenneau S, Craster RV, "High-frequency homogenization for periodic dispersive media", Multiscale Modeling and Simulation, 2024, 22 (3), 1136-1168. https://doi.org/10.1137/23M159648X
- Zhang B, Wang XHL, Elmaimouni J, Yu G, Zhang XM, "Axial guided wave characteristics in functionally graded one-dimensional hexagonal piezoelectric quasi-crystal cylinders", Mathematics and Mechanics of Solids, 2022, 27 (1), 125-143. https://doi.org/10.1177/10812865211013458