ارائه فرمول‌بندی جدید برای تحلیل دینامیکی تاریخچه زمانی غیرخطی ارتعاشات سازه‌های تحت بارگذاری زلزله

محمّدرضا حنفی[۱]، مهدی بابائی قلعه‌جوق*[۲]، پیمان نرج‌آبادی[۲]

[۱] دانشجوی کارشناسی مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بناب

[۲] استادیار گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بناب

دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۴، بازنگری: ۱۴۰۲/۲/۲۹، پذیرش: ۱۴۰۲/۳/۲۱، نشر آنلاین ۱۴۰۲/۳/۲۱

چکیده

یک روش عددی سریع و کارآمد تحت عنوان روش نیوتن- کاتس- تتای چهار نقطه‌ای (Newton-Cotes-4P-θ Method)، برای تحلیل تاریخچه زمانی سیستم‌های سازه‌ای یک درجه آزادی (SDOF) تحت اثر زلزله ارائه شده است. این روش از فرمول عددی نیوتن- کاتس- تتای چهار نقطه‌ای برای حل معادله حرکت استفاده کرده و سیستم‌های خطی و غیرخطی را نیز پوشش می‌دهد. در این روش هرگونه بارگذاری از نوع نیروهای خارجی وابسته به زمان و یا تحریک لرزه‌ای، قابل اعمال به سیستم دینامیکی بوده و تحلیل آن امکان‌پذیر است. مزیت مهم فرمول‌بندی جدید سهولت اجرا، سادگی محاسبات و دقت بالای آن در مقایسه با سایر روش‌های مشابه خود مانند انتگرال دوهامل و روش‌های نیومارک- بتا (Newmark-β) و ویلسون- تتا (Wilson-θ) می‌باشد. متعاقباً سطح دقت روش ارائه‌شده در حد روش‌های شبه تحلیلی انتگرال دوهامل بوده و سرعت پردازش آن نیز، مشابه روش‌های انتگرال‌گیری گام‌به‌گام نیومارک- بتا و ویلسون- تتا می‌باشد. قابل ذکر است که فرمول‌بندی جدید ارائه‌شده برخلاف روش نیومارک- بتا غیرخطی، نیاز به اجرای یک‌روند مستقل مانند تکرار نیوتن، برای لحاظ اثرات غیرخطی ندارد؛ بلکه تکرار یک سری محاسبات ساده منجربه همگرایی رفتار غیرخطی خواهد شد. علاوه‌برآن، روش حاضر در هنگام تحلیل سیستم‌های دارای دوره تناوب کمتر از ۰/۱۵ ثانیه ($T_n < 0.15$ sec) و نسبت میرایی کمتر از ۰/۰۲ ($\zeta < 0.02$)، عملکرد بهتری دارد و دارای پایداری مؤثر، سرعت همگرایی بالا و دقت کافی جهت تحلیل سیستم‌های دینامیکی بوده و به‌سادگی قابلیت اجرا دارد. نتایج عددی، مؤثربودن روش جدید را در مقایسه با انتگرال دوهامل و روش‌های نیومارک- بتا و ویلسون- تتا نشان می‌دهد.

کلیدواژه‌ها: پاسخ لرزه‌ای، تحلیل غیرخطی، سیستم یک درجه آزادی، تحلیل تاریخچه زمانی، روش نیوتن- کاتس- تتای چهار نقطه‌ای.

۱- مقدمه

پاسخ دینامیکی یک سیستم سازه‌ای تحت بار لرزه‌ای وابسته به زمان با یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم[۱] مدل‌سازی می‌شود. ازآنجایی‌که در بسیاری از موارد نمی‌توان یک حل تحلیلی برای این معادله ارائه کرد. به این جهت، غالباً از روش‌های عددی برای محاسبه پاسخ معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم استفاده می‌شود. همچنین، در علوم کاربردی حاضر با پیشرفت فناوری معادلات متعددی در مکانیک کاربردی، فیزیک، زیست‌شناسی و اقتصاد وجود دارند که باید به‌صورت عددی حل شوند؛ بنابراین، استفاده از روش‌های عددی در تحلیل سیستم‌های فیزیکی ضروری بوده و توسعه این روش‌ها به یکی از جذاب‌ترین زمینه‌های علوم کاربردی برای محققین تبدیل شده است. متعاقباً، در تئوری دینامیک سازه‌ها، مدل ریاضی یک سازه چند درجه آزادی اغلب به‌صورت یک سیستم یک درجه آزادی ارائه می‌شود که توسط معادلات دیفرانسیل حرکت (DEOM[۲]) فرمول‌بندی

1. ODE

2. Differential equation of motion

ناشر: معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه تبریز شاپا الکترونیکی: ۴۰۷۷-۲۷۱۷

DOI: 10.22034/CEEJ.2023.54564.2209

* نویسنده مسئول؛ شماره تماس: ۰۴۱-۳۷۷۴۵۰۰۰

آدرس ایمیل: mr.hanafi@ubonab.ac.ir (م. ر. حنفی)، m.babaei@ubonab.ac.ir (م. بابائی قلعه‌جوق)، narjabadifam.peyman@ubonab.ac.ir (پ. نرج‌آبادی فام).

می‌شود (Paz M و Leigh W، ۱۹۹۷؛ Bathe، ۱۹۹۶؛ Fombrune، ۱۹۸۶).

در این راستا، حل معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم برای یک سیستم یک درجه آزادی تحت تحریک تکیه‌گاهی همیشه مورد توجه بسیاری از محققان بوده است (Veletsos و همکاران، ۱۹۶۵؛ Chopra و همکاران، ۲۰۰۳؛ Izadifard و همکاران، ۲۰۱۶؛ Newmark، ۱۹۵۹).

روش‌های شبه‌تحلیلی در حوزه فرکانس (مانند، انتگرال فوریه) یا روش‌های شبه‌تحلیلی دامنه زمانی (مانند، انتگرال دوهامل) اغلب پاسخ نهایی سیستم را با استفاده از اصل جمع آثار قوا روی مؤلفه‌های پاسخی به‌دست‌آمده، محاسبه می‌کنند. ازآنجایی‌که، این روش‌ها از اصل جمع آثار قوا پیروی می‌کنند، قابلیت تحلیل سیستم‌های غیرخطی را ندارند؛ چرا که اصل جمع آثار قوا فقط برای سیستم‌های خطی کاربرد دارد. از سوی دیگر، روش‌های گام‌به‌گام مانند روش درون‌یابی از تابع تحریک، تفاضل محدود مرکزی، رانگ- کوتا و نیومارک- بتا (Clough و Penzien، ۱۹۷۵؛ Paz M و Leigh W، ۲۰۰۴) برای سیستم‌های سازه‌ای غیرخطی ارائه شده‌اند.

امروزه در مقالات روش‌های عددی زیادی برای تحلیل پاسخ دینامیکی سازه‌های ساختمانی وجود دارد. گزارش فنی منتشر شده توسط گروه مهندسان ارتش آمریکا، دقت و کارایی برخی از روش‌های گام‌به‌گام عددی را در برآورد پاسخ دینامیکی سیستم‌های یک درجه آزادی در برابر بارهای ضربه‌ای وابسته به زمان ارزیابی کرده که این مطالعات عمدتاً بر روی روش‌های ویلسون- تتا، روش شتاب خطی، نیومارک- بتا، روش تفاضل محدود مرکزی، روش رانگ- کوتا مرتبه چهارم، انتگرال دوهامل و روش‌های چند گامی تمرکز کرده‌اند (Ebeling و همکاران، ۱۹۹۷).

عملکرد و پایداری روش نیومارک در حل سیستم‌های غیرخطی یک درجه آزادی توسط Chang با استفاده از چند مثال عددی ارزیابی و تأیید شده است (Chang، ۲۰۰۴).

سپس تبدیل لاپلاس برای تحلیل سیستم‌های معادل‌سازی شده با سیستم یک درجه آزادی جرم استفاده شده است (Kazakov، ۲۰۰۸).

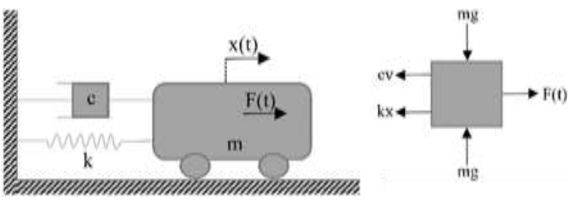
سال‌ها بعد، Kurt و Cevik بسط تیلور را برای توسعه یک روش عددی ساده برای محاسبه پاسخ لرزه‌ای سیستم‌های سازه‌ای یک درجه آزادی پیشنهاد کردند (Kurt و Cevik، ۲۰۰۸).

Li و Wu یک روش تکرارشونده برای محاسبه پاسخ غیرخطی سیستم‌های پایدار یک درجه آزادی ارائه دادند (Li و Wu، ۲۰۰۴). اخیراً نیز، دو روش تحلیلی جدید توسط Babaei و همکاران برای تحلیل پاسخ دینامیکی سیستم‌های خطی و غیرخطی ارائه داده شده است (Babaei و همکاران، ۲۰۲۱؛ Babaei و همکاران، ۲۰۲۲؛ Babaei و Hanafi، ۲۰۲۲).

اما بااین وجود، بسیاری از روش‌های ارائه‌شده برای حل معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم ارتعاشات الگوریتم پیچیده‌ای دارند و گاهی از ریاضیات پیشرفته در فرمول‌بندی خود استفاده می‌کنند که این امر به نوبه خود نیازمند تخصص فنی می‌باشد. هدف مقاله حاضر، ارائه یک روش تحلیلی عددی ساده دارای قابلیت برنامه‌نویسی کامپیوتری ساده و انجام تحلیل دقیق برای حل معادله دیفرانسیل ارتعاش سیستم‌های یک درجه آزادی می‌باشد. روش ارائه‌شده به طور قابل‌مقایسه‌ای دقیق بوده و ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم‌های یک درجه آزادی را تحت اثر انواع تحریک‌های دلخواه امکان‌پذیر می‌کند. این روش نیوتن- کاتس- تتای چهار نقطه‌ای نامیده می‌شود چرا که در فرمول‌بندی خود قانون نیوتن- کاتس و همچنین قانون نیوتن- کاتس اصلاح‌شده مورد استفاده قرار گرفته است.

۲- بیان مسئله

شکل (۱) سیستم معادل جرم- فنر خطی تحت نیروی خارجی دلخواه $F(t)$ را نشان می‌دهد. این سیستم از سه مؤلفه اصلی تشکیل شده‌است: مؤلفه جرم، فنر و میراگر. هر مؤلفه از این سیستم می‌تواند دارای رفتار خطی یا غیر خطی باشد. لازم به ذکر است، اغلب سیستم‌های واقعی در طول رخداد زلزله وارد حوزه رفتاری غیرخطی می‌شوند که این امر ناشی از رفتار غیر خطی فنر در جابه‌جایی‌های بزرگ و یا به‌علت رخداد رفتارهای غیرخطی در مدل‌های میرایی غیرویسکوز می‌باشد (Ge و همکاران، ۲۰۲۲؛ Meirovitch و همکاران، ۱۹۸۶). ازاین‌رو ، نیروی ایجادشده توسط هر مؤلفه از این سیستم در حالت کلی تابعی از جابه‌جایی و سرعت خواهد بود. در چنین مواردی، باید مستقیماً از فرم بنیادین معادله ارتعاشات، در فرمول‌بندی عددی استفاده کرد (Wu، ۲۰۱۳).



شکل ۱- مدل ریاضی (تحلیلی) سیستم خطی معادل جرم-فنر

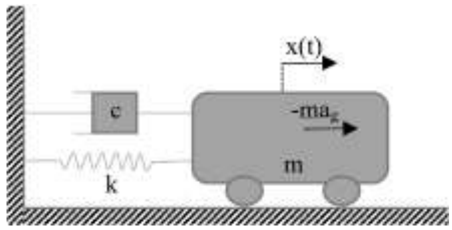
برای حصول به فرم بنیادین معادله ارتعاش، فرض می‌کنیم، مؤلفه جابه‌جایی نسبی (تغییر شکل فنر) را با x، سرعت نسبی را با v و شتاب نسبی سیستم را با a، نشان می‌دهیم؛ حال، معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت سیستم‌های غیرخطی تحت نیروی خارجی، را به‌صورت زیر ارائه می‌دهیم:

$$F_S(x\,,v)+F_D(x\,,v)+m(t)\,a=F(t) \quad (۱)$$

رابطه (۱)، جامع‌ترین شکل بیان معادله ارتعاش است که در آن غیرخطی‌بودن، ناشی از تغییرات جرم سیستم نیز در نظر گرفته شده است. اگرچه تغییرات جرم سیستمی ممکن است منجر به غیرخطی شدن معادله گردد، بااین‌حال، در تئوری ارتعاشات سازه‌ها جرم سیستم ثابت فرض می‌شود. در رابطه بالا پارامترهای داخل پرانتز صرفاً برای تأکید بر غیرخطی‌بودن مؤلفه‌های متناظر هستند. حال با فرض خطی‌بودن رفتار فنر $F_S=kx$ و رفتار میرایی ویسکوز $F_D=cv$ معادله فوق را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$kx+cv+ma=F(t) \quad (۲)$$

در رابطه (۲)، k ثابت فنر، c نسبت میرایی ویسکوز، m جرم سیستم می‌باشد که در طول ارتعاش ثابت است و $F(t)$ نیروی خارجی وابسته به زمان (تحریک) می‌باشد. هنگامی که این سیستم در معرض جابه‌جایی‌های تکیه‌گاهی $x_g=x_g(t)$ قرار می‌گیرد، می‌توان آن را با سیستمی که در شکل (۲) نشان داده شده است، معادل در نظر گرفت.



شکل ۲- مدل ریاضی (تحلیلی) سیستم خطی معادل جرم- فنر تحت اثر مؤلفه جابه‌جایی

در این شکل $-ma_g$ جایگزین نیروی $F(t)$ موجود در رابطه (۱) شده است که $x_g=x_g(t)$ شتاب تکیه‌گاه و x جابه‌جایی نسبی (تغییر شکل) فنر می‌باشد. براین‌اساس، باتوجه‌به تئوری‌های ارائه‌شده در متون فنی Paz، Li و مبانی دینامیک سازه Chopra (Paz M و Leigh W، ۱۹۹۷؛ Chopra، ۲۰۱۲) معادله دیفرانسیل حرکت برای سیستم‌های غیرخطی تحت اثر زلزله به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$F_S(x\,,v)+F_D(x\,,v)+m(t)\,a=-m(t)\,a_g \quad (۳)$$

رابطه (۳) نشان می‌دهد که دو سیستم با فرکانس طبیعی و نسبت میرایی برابر، صرف‌نظر از اینکه نسبت به دیگری سخت‌تر یا سنگین‌تر باشند، دارای پاسخ تاریخچه زمانی یکسانی خواهد بود. اگر مؤلفه‌های این سیستم رفتار خطی داشته باشند، $F_S(x\,,v)=kx$، $F_D(x\,,v)=cv$ و $m(t)=m$ می‌باشد، معادله (۳) را می‌توان به شکل زیر ساده کرد:

$$kx+cv+ma=-ma_g \quad (۴)$$

با تقسیم طرفین رابطه (۴) به جرم سیستم (m)، معادله دیفرانسیل حرکت سیستم‌های خطی تحت شتاب زلزله به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\omega_n^2x+2\zeta\omega_nv+a=-a_g \quad (۵)$$

که در رابطه (۵)، $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$ فرکانس طبیعی سیستم و $\zeta=\frac{c}{2m\omega_n}$ نسبت میرایی سیستم می‌باشد. این فرمول، شکل ساده‌ای از معادله ارتعاش برای سیستم‌های خطی می‌باشد که آن را در فرمول‌بندی‌های خود استفاده خواهیم کرد.

در سیستم‌های مطرح مهندسی سازه، غالباً به‌جای نیروهای خارجی، تحریک از نوع شتاب زلزله عارض می‌شود که اغلب به‌صورت تابعی گسسته نسبت به زمان t_i ارائه می‌گردد و از بازه $i=1$ تا N می‌باشد. متغیر N تعداد نقاط زمانی و $N-1$ تعداد گام‌های زمانی را نشان می‌دهد. گام زمانی، $h=t_i+1-t_i$ معمولاً ثابت فرض می‌شود. در روش‌های گام‌به‌گام انتگرال‌گیری، معادله دیفرانسیل حرکت باید در لحظه t_i ارضا گردد:

$$F_{S,i}+F_{D,i}+m_ia_i=-m_ia_{g,i} \quad (۶)$$

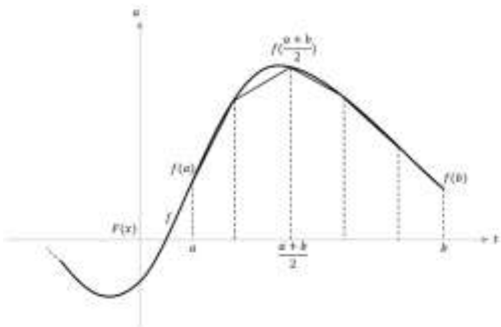
در رابطه (۶)، $F_{S,i}=F_S(x_i,v_i)$، $F_{D,i}=F_D(x_i,v_i)$، $m_i=m(ti)$ و $a_{g,i}=a_g(t_i)$ می‌باشد. هدف از ارائه الگوریتم‌های عددی موجود، تخمین پاسخ در t_{i+1} با دانستن پاسخ در لحظه t_i می‌باشد؛ بنابراین، معادله دیفرانسیل حرکت باید در لحظه t_{i+1} ارضا گردد؛ بنابراین داریم:

$$F_{S,i+1}+F_{D,i+1}+m_{i+1}a_{i+1}=-m_{i+1}a_{g,i+1} \quad (۷)$$

در رابطه (۷)، $F_{S,i+1}=F_S(x_{i+1},v_{i+1})$، $F_{D,i+1}=F_D(x_{i+1},v_{i+1})$، $m_{i+1}=m(t_{i+1})$ و $a_{g,i+1}=a_g(t_{i+1})$ می‌باشد. در ادامه، مفاهیم اولیه روش ارائه‌شده برای محاسبه پاسخ سیستم در لحظه t_{i+1} با استفاده از معادلات (۶) و (۷) و روابط بازگشتی آن ارائه می‌گردد.

۳- مبانی روش نیوتن- کاتس- تتای- چهار نقطه‌ای

برای آشنایی و درک بهتر فرمول‌بندی روش نیوتن- کاتس- تتای چهار نقطه‌ای، ابتدا روابط اولیه حاکم بین شتاب و سرعت و جابه‌جایی و سرعت را یادآوری می‌کنیم. در گام اول باتوجه‌به شکل (۳)، نمودار شماتیک شتاب-زمان روش نیوتن-کاتس-تتای چهار نقطه‌ای را تعریف می‌کنیم و با استفاده از مبانی این روش روابط حاکم بین شتاب و سرعت و جابه‌جایی و سرعت را بیان می‌کنیم.



شکل ۳- نمودار شماتیک شتاب برحسب زمان برای روش نیوتن-کاتس-تتای چهار نقطه‌ای

در این راستا، اگر $x = x(t)$، $v = v(t)$، $a = a(t)$ باشد؛ می‌توان نوشت:

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{۸}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{۹}$$

با استفاده از قانون دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال برای معادله دیفرانسیلی (۸) و (۹)، می‌توان نوشت:

$$v_{i+1} - v_{i-2} = \int_{t_{i-2}}^{t_{i+1}} a(t)\, dt \tag{۱۰}$$

$$x_{i+1} - x_{i-2} = \int_{t_{i-2}}^{t_{i+1}} v(t)\, dt \tag{۱۱}$$

اگر انتگرال سمت راست رابطه (۱۰) و (۱۱)، را با استفاده از قانون نیوتن- کاتس- چهار نقطه‌ای، تخمین بزنیم، داریم:

$$v_{i+1} = v_{i-2} + h\left(\frac{3}{8}a_{i-2} + \frac{9}{8}a_{i-1} + \frac{9}{8}a_i + \frac{3}{8}a_{i+1}\right) \tag{۱۲}$$

$$x_{i+1} = x_{i-2} + h\left[\frac{3}{8}v_{i-2} + \frac{9}{8}v_{i-1} + \frac{9}{8}v_i + \frac{3}{8}v_{i+1}\right] \tag{۱۳}$$

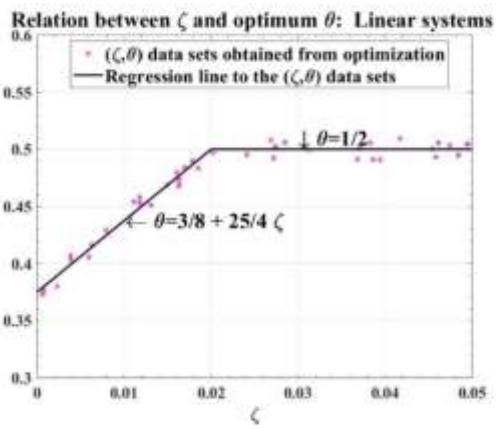
که در رابطه (۱۲) (Evtushenko و Stoer، ۱۹۸۵)، $v_{i-2} = v(t_{i-2})$، $v_{i-1} = v(t_{i-1})$، $v_i = v(t_i)$، $v_{i+1} = v(t_{i+1})$ سرعت سیستم در لحظات متوالی زمانی و $a_{i-2} = a(t_{i-2})$، $a_{i-1} = a(t_{i-1})$، $a_i = a(t_i)$، $a_{i+1} = a(t_{i+1})$ شتاب سیستم در آن مقاطع زمانی می‌باشند. همچنین، $t_{i-2} = t_i - 2h$، $t_{i-1} = t_i - h$، $t_{i+1} = t_i + h$ مقادیر زمانی در چهار مقطع متوالی هستند. با بررسی‌های انجام‌شده در این تحقیق، جفت فرمول‌های (۱۲) و (۱۳)، عملکرد خوبی در تحلیل سیستم‌های پایستار یا به‌عبارت‌دیگر نامیرا ($\zeta = 0$) دارند؛ ولی در سیستم‌های میرا پاسخ سیستم را با خطای قابل‌ملاحظه‌ای تخمین می‌زنند. به همین علت، در این تحقیق پیشنهاد می‌شود که برای سیستم‌های با میرایی زیاد فرمول انتگرال‌گیری سرعت از قاعده نیوتن- کاتس به قانون ذوزنقه مرکب در سه گام متوالی تغییر یابد:

$$v_{i+1} = v_{i-2} + h\left[\frac{1}{2}a_{i-2} + 1a_{i-1} + 1a_i + \frac{1}{2}a_{i+1}\right] \tag{۱۴}$$

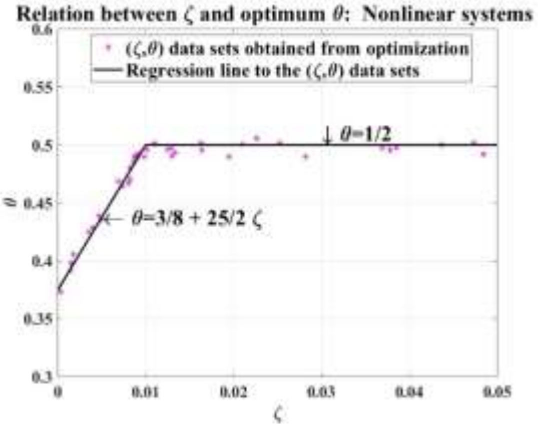
جفت معادلات (۱۲) و (۱۴) نیز برای سیستم‌های با میرایی زیاد ($\zeta \geq 0.02$) در سیستم‌های خطی و ($\zeta \geq 0.01$) در سیستم‌های غیرخطی) پاسخ‌های دقیقی را ارائه می‌دهد. حال برای سیستم‌هایی که میرایی آن‌ها مابین صفر و مقادیر فوق می‌باشد، فرمول سرعت باید به فرمی بینابین دو فرمول نیوتن- کاتس و ذوزنقه مرکب باشد. برای حصول به چنین فرمولی، بایستی مقادیر ضرایب وزنی دو فرمول مذکور را بر حسب پارامتری مانند تتا (θ) به‌صورت زیر درون‌یابی شود:

$$v_{i+1} = v_{i-2} + h\left[\theta a_{i-2} + \frac{(3-2\theta)}{2}a_{i-1} + \frac{(3-2\theta)}{2}a_i + \theta a_{i+1}\right] \tag{۱۵}$$

که در آن، پارامتر (θ) یک پارامتر تعیین‌کننده برای تنظیم پایداری و هم‌گرایی فرمول‌بندی فوق‌الذکر، بین سیستم‌های میرا و نامیرا می‌باشد که مقدار آن از $\frac{۱}{۲}$ تا $\frac{۳}{۸}$ متغیر است. برای یافتن رابطه‌ای بین نسب میرایی (ζ) و پارامتر تتا (θ)، تعدادی مثال نمونه همانند مثال‌های (۱) و (۲) با مقادیر تصادفی نسبت میرایی و دوره تناوب حل شد، و برای این مثال‌ها مقدار تتا (θ) طوری بهینه‌یابی شد که خطای بین منحنی پاسخ (منحنی درشت‌گام) و منحنی پاسخ دقت بالا (منحنی ریزگام)، به پایین‌ترین حد ممکن رسید. نتایج به‌دست‌آمده از مقادیر بهینه پارامتر تتا (θ) برحسب نسبت میرایی (ζ) برای سیستم‌های خطی در شکل (۴) و برای سیستم‌های غیرخطی نیز در شکل (۵) نشان داده شده است.



شکل ۴- خط برازش پارامتر(θ) برحسب نسبت میرایی (ζ) در سیستم‌های خطی



شکل ۵- خط برازش پارامتر(θ) برحسب نسبت میرایی (ζ) در سیستم‌های غیرخطی

معادله خط برازش شکل (۴) به‌صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\theta = min\left\{\frac{3}{8} + \frac{25}{4}\zeta\,, 0.5\right\} \qquad (۱۶)$$

همچنین، به‌روش مشابه معادله خط برازش شکل (۵) نیز به‌ترتیب زیر خواهد بود:

$$\theta = min\left\{\frac{3}{8} + \frac{25}{2}\zeta\,, 0.5\right\} \qquad (۱۷)$$

در شکل‌های (۴) و (۵)، مقادیر به‌دست‌آمده از روند مذکور و خط برازش داده‌های تجربی فوق (خط سیاه‌رنگ)، رابطه بین نسبت میرایی (ζ) و پارامتر تتا (θ) را نشان می‌دهد. به‌دلیل حجم بالای داده‌های آماری، فقط خروجی مثال‌های حل‌شده در اشکال فوق ارائه شده است. با استفاده از این مقدار بهینه پارامتر (θ)، فرمول‌بندی ارائه‌شده در صورت صفر بودن مقدار نسبت میرایی ($\zeta = 0$) تبدیل به فرمول نیوتن- کاتس- تتای چهار نقطه‌ای شده و در میرایی های ۰/۰۲ و بزرگتر ($\zeta \geq 0.02$) تبدیل به فرمول ذوزنقه می‌شود. همچنین، باید توجه داشت که در سیستم‌های خطی مرز جدایی ۰/۰۲، اما در سیستم‌های غیرخطی این مقدار برابر با ۰/۰۱ می‌باشد.

برای شروع محاسبات تحلیلی، ما به اطلاعات گام‌های اول، دوم و سوم نیازمندیم. اطلاعات موردنیاز در گام اول با شرایط اولیه داده می‌شود درحالی‌که گام‌های دوم و سوم باید توسط مجموعه‌ای از فرمول‌های تک‌مرحله‌ای تحلیل گردند. فرمول‌های آدامز- مولتون[3] دو نقطه‌ای ساده و آدامز- مولتون دو نقطه‌ای تصحیح‌شده می‌توانند مجموعه مناسبی از معادلات برای محاسبه x_2، x_3، v_2 و v_3 باشند، در این راستا می‌توان نوشت:

$$v_{i+1} = v_i + h\left(\frac{1}{2}a_i + \frac{1}{2}a_{i+1}\right) \qquad (۱۸)$$

$$x_{i+1} = x_i + h\left(\frac{1}{2}v_i + \frac{1}{2}v_{i+1}\right) + h^2\left(\frac{1}{12}a_i - \frac{1}{12}a_{i+1}\right) \qquad (۱۹)$$

در روابط فوق، $i = 1,2$ می‌باشد؛ لازم است، مقدار شتاب a_{i+1} را در هم‌زمان با x_{i+1} و v_{i+1} محاسبه و به‌روزرسانی کنیم. معادله حرکت حاوی اطلاعات حرکتی وضعیت سیستم در هر لحظه می‌باشد و در صورت ارائه داده‌های دقیق از x_{i+1} و v_{i+1}، جزئیات دقیقی از حرکات نوسانی را ارائه می‌دهد؛ بنابراین، این مؤلفه سینماتیکی به‌طور مستقیم از روی معادله دیفرانسیل حرکتی به‌شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$a_{i+1} = -\left(m_{i+1}\, a_{g,i+1} + F_{s,i+1} + F_{d,i+1}\right)/m_{i+1} \qquad (۲۰)$$

به‌طور مشابه نیز، شتاب سیستم‌های خطی را می‌توانیم از رابطه زیر محاسبه کنیم:

$$a_{i+1} = -\left(a_{g,i+1} + \omega_n^2 x_{i+1} + 2\omega_n \zeta v_{i+1}\right) \qquad (۲۱)$$

برای تسریع فرایند الگوریتم روش نیوتن- کاتس- تتای چهار نقطه‌ای، از بسط تیلور برای محاسبه پاسخ اولیه در شروع هر مرحله استفاده می‌شود:

$$x_{i+1} = x_i + v_i h + \frac{1}{2}a_i h^2 \qquad (۲۲)$$

$$v_{i+1} = v_i + a_i h \qquad (۲۳)$$

فرمول‌های ارائه‌شده، مبانی روش نیوتن-کاتس-تتای چهار نقطه‌ای را تشکیل می‌دهند. این الگوریتم می‌تواند سیستم‌های خطی و غیرخطی را که دارای هر نوع رفتار غیرخطی در مؤلفه های سیستمی می‌باشند، کامل و دقیق تحلیل کند. با ساده‌سازی الگوریتم غیرخطی، به نسخه خطی این روش دست می‌یابیم. الگوریتم نظام‌مند این روش‌ها برای سیستم‌های خطی و غیرخطی در جدول (۲) آورده شده است. بااین‌حال، الگوریتم خطی تنها قادر به تحلیل سیستم‌های خطی می‌باشد.

۴- مثال‌ها

در این بخش، سه مثال عددی برای مقایسه روش جدید با سایر روش‌های موجود ارائه شده است. مدل‌سازی مثال‌ها در نرم‌افزار متلب انجام شده است. بارگذاری‌ها نیز با رکورد زلزله ال‌سنترو[4] که در شکل (۷) نشان‌داده‌شده است، انجام می‌شود. در مثال اول یک سیستم خطی پایستار، در مثال دوم یک سیستم غیرخطی میرا و در مثال سوم یک سیستم خطی میرا مورد بررسی قرار گرفته است. مشخصات سیستم‌های خطی و غیرخطی مثال‌ها

3. Adams–Moulton

4. El-Centro

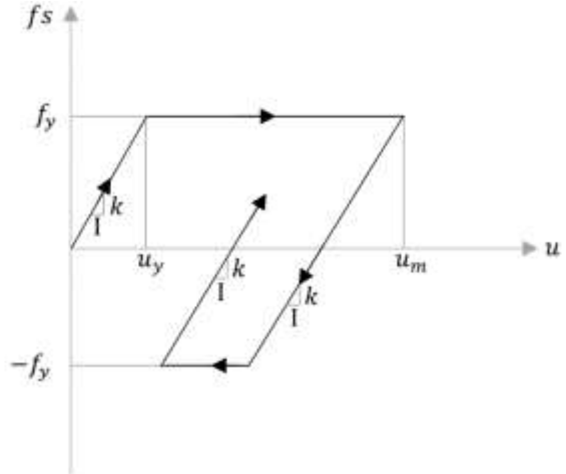
در جدول (۱) آورده شده است. لازم به‌ذکر است که در مثال دوم رفتار فنر غیرخطی بوده و عامل غیرخطی‌بودن سیستم نیز از رفتار فنر نشئت می‌گیرد. باتوجه‌به اینکه گام تحلیلی در مثال‌ها ۰/۰۱، و گام تحلیلی زلزله ال‌سنترو ۰/۰۲ می‌باشد؛ بدین جهت، در نقاط میانی از درون‌یابی خطی برای مشخص‌کردن مقادیر شتاب‌نگاشت زمین استفاده کرده‌ایم.

جدول ۱- مشخصات سیستم‌های خطی و غیرخطی تحت اثر زلزله ال- سنترو در مثال‌های (۱)، (۲) و (۳)

مشخصات سیستم	مقادیر		
	مثال (۱)	مثال (۲)	مثال (۳)
جرم (کیلوگرم)	۴۵/۵۹۴	۴۵/۵۹۴	۴۵/۵۹۴
دورهٔ تناوب (پریود) طبیعی (ثانیه)	۰/۱	۰/۱	۰/۱
نسبت میرایی	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۵
ثابت فنر (کیلونیوتن بر سانتی‌متر)	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰
گام زمانی رکورد زلزله (ثانیه)	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۲
گام زمانی تحلیل (ثانیه)	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱

۴-۱- مثال (۱): سیستم خطی تحت اثر زلزله ال- سنترو

در این مثال یک سیستم یک درجه آزاد خطی تحت تحریک زلزله ال- سنترو تحلیل و ارزیابی شده است. این سیستم در لحظه آغازین، از مبدأ مختصات و از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند. نتایج ارزیابی و پاسخ ریزگام روش ارائه‌شده به ترتیب در شکل‌های (۸) و (۹) نشان‌داده‌شده است. همان‌طور که در شکل (۸) نشان‌داده‌شده، پاسخ سیستم با استفاده از روش انتگرال دوهامل، روش جدید نیوتن- کاتس- تتای چهار نقطه‌ای و روش نیوماک- بتا محاسبه می‌شود. بدیهی است که روش جدید قادر به محاسبه دقیق‌تر منحنی پاسخ با گام زمانی تحلیل $h = 0.01\ sec$ می‌باشد. اما همان‌طور که انتظار می‌رفت روش انتگرال دوهامل بسیار دقیق عمل می‌کند؛ اما این روش در مقایسه با روش جدید بسیار زمان‌بر است. لازم به‌ذکر است که روش ارائه‌شده و روش انتگرال دوهامل همگی پاسخ‌های تقریباً یکسان با اختلاف ناچیز ارائه می‌دهند، درحالی‌که روش نیومارک- بتا دارای خطا قابل‌ملاحظه‌ای می‌باشد. این خطای زیاد در روش‌های رایج به‌دلیل انحراف مقدار زمان تناوب سیستم از زمان تناوب واقعی آن در حین اجرای الگوریتم روش‌های مذکور بوده و غالباً در زمان تناوب‌های کمتر از ۰/۱ ثانیه عارض می‌شود. خطای حاضر در مراجع (Clough و Penzien، ۱۹۷۵؛ PAZ M و Leigh W، ۱۹۹۷) به خطای شیفت فاز معروف است. ازآنجایی‌که سیستم‌های سازه‌ای اغلب دارای زمان تناوب‌های بزرگ‌تر از ۰/۱ ثانیه هستند، این خطا کمتر موردتوجه و بحث قرار می‌گیرد؛ اما برای محک‌زدن فرمول‌بندی‌ها بسیار حائز اهمیت می‌باشد. برای روشن‌شدن این مطلب، طیف پاسخ الاستیک تمامی روش‌ها در شکل (۱۰) ارائه شده‌است. در این شکل خطای تغییر فاز سیستم در روش‌های نیومارک- بتا و ویلسون- تتا در دورهٔ تناوب‌های کوچک به‌وضوح قابل‌مشاهده می‌باشد. لازم به ذکر است این خطا با کوچک‌ترکردن گام تحلیل‌ها قابل‌رفع می‌باشد؛ ولی زمان و هزینه آن‌ها را می‌افزاید.



شکل ۶- مدل رفتاری الاستوپلاستیک نیرو بر حسب تغییرشکل در مثال (۲)

۴-۲- مثال (۲): سیستم غیرخطی تحت اثر زلزله ال‌سنترو

در مثال حاضر، یک سیستم غیرخطی تحت تحریک زلزله ال‌سنترو تحلیل شده و نتایج آن در شکل (۱۱) نشان‌داده‌شده است. برای شناسایی رفتار غیرخطی مؤلفه فنر، ابتدا باید حداکثر جابه‌جایی خصوصیات خطی سیستم را محاسبه کنیم. اگرچه، این سیستم در مثال قبل تحلیل شده است، اما در این مثال با گام‌های ریزتر $h = 0.0001$ sec، سیستم مجدداً مورد تحلیل و ارزیابی قرار می‌گیرد تا تخمین دقیق‌تری از حداکثر تغییر شکل الاستیک $x_{max,elastic}$ به‌دست آید. همان‌طورکه در شکل (۹) نشان داده‌شده است، تغییرشکل ماکزیمم برابر با $x_{max,elastic} = 0.402878$ cm که در زمان $t = 10.165$ sec رخ می‌دهد.

حال رفتار غیرخطی سیستم را به‌صورت شکل (۶) تعریف می‌کنیم. مقدار نیروی تسلیم به‌صورت μf_0 می‌باشد که در آن μ ضریب شکل‌پذیری و f_0 نیروی مقاوم بیشینه بوده و در سیستم‌های الاستیک به‌صورت زیر می‌باشد:

$$f_0 = kx_{Max,Elastic} = 1800 \times 0.4028782\ cm = 725.1723\ \text{kN} \qquad (۲۲)$$

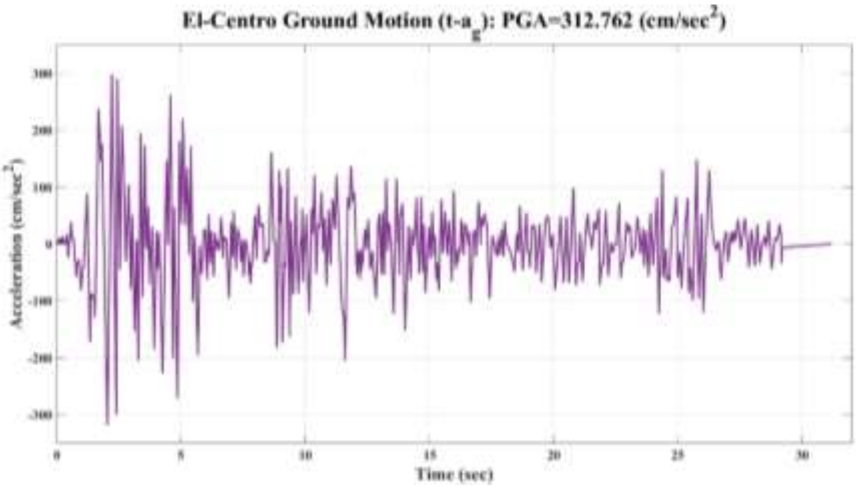
با فرض $\mu = 0.25$، می‌توان نوشت:

$$f_y = \mu f_0 = 0.25 \times 725.1723 = 181.29\ \text{kN} \qquad (۲۳)$$

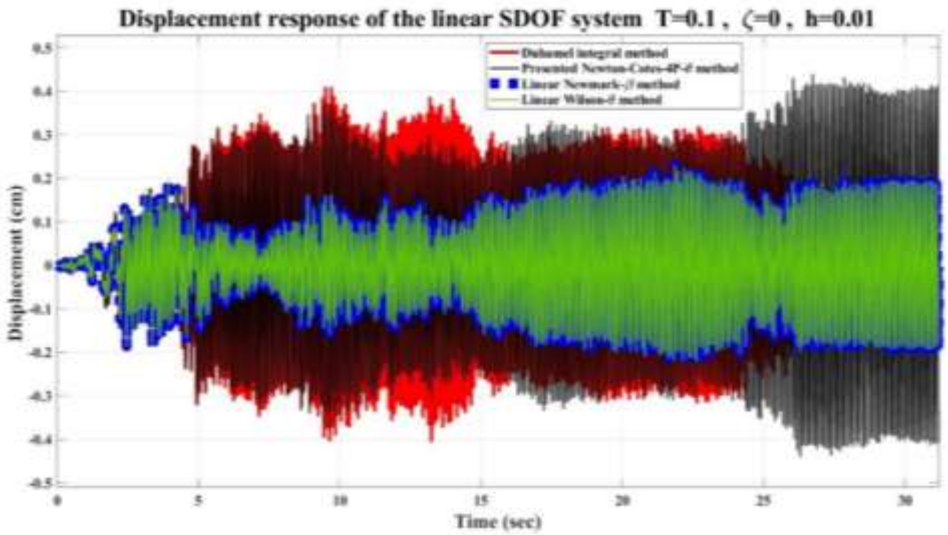
جدول ۲- الگوریتم روش نیوتن- کاتس- تتای چهار نقطه‌ای برای تحلیل خطی و غیرخطی سیستم‌های سازه‌ای یک درجه آزادی

۱	مقداردهی اولیه با $i = 1$: $t_1 = 0. \quad x_1 = x(0). \quad v_1 = v(0).$ در سیستم خطی: $a_1 = -(a_{g.1} + \omega_n^2 x_1 + 2\omega_n \zeta v_1).$ در سیستم غیرخطی: $F_{s,1} = F_s(x_1). \qquad F_{d,1} = F_{d,1}(v_1)$ $a_1 = -\left(ma_{g,1} + F_{s,1} + F_{d,1}\right)/m.$
۲	محاسبه مقدار پارامتر θ: در سیستم خطی: $\theta = min\left\{\frac{3}{8} + \frac{25}{4}\zeta\ , 0.5\right\}$ انتخاب کرده یا به‌صورت دلخواه عددی از بازه $\theta = \frac{3}{8} = 0.375$ تا $\theta = \frac{1}{2} = 0.5$ انتخاب کنید. در سیستم غیرخطی: $\theta = min\left\{\frac{3}{8} + \frac{25}{2}\zeta\ , 0.5\right\}$ انتخاب کرده یا به‌صورت دلخواه عددی از بازه $\theta = \frac{3}{8} = 0.375$ تا $\theta = \frac{1}{2} = 0.5$ انتخاب کنید.
۳	مقدار $i = i + 1$ قرار داده و پاسخ را در t_{i+1} تخمین بزنید. (یا همه مقادیر را صفر در نظر بگیرید): $x_{i+1} = x_i + v_i h + \frac{1}{2}\ a_i h^2$ $v_{i+1} = v_i + a_i h$
۴	روابط زیر را تا زمانی که x_{i+1} تا ارقام موردنظر ثابت شوند، تکرار کنید: به‌روزرسانی مقادیر شتاب در سیستم خطی: $a_{i+1} = -\left(a_{g,i+1} + \omega_n^2 x_{i+1} + 2\omega_n \zeta v_{i+1}\right)$ به‌روزرسانی مقادیر شتاب در سیستم غیرخطی: $F_{s,i+1} = F_s(x_{i+1}) \quad , \quad F_{d,i+1} = F_d(v_{i+1})$ $a_{i+1} = -\left(\ ma_{g,i+1} + F_{s,i+1} + F_{d,i+1}\right)/m$ محاسبه مقادیر جابجایی و سرعت در t_{i+1} با استفاده از فرمول‌های آدامز- مولتون: $v_{i+1} = v_i + h\left(\frac{1}{2}a_i + \frac{1}{2}a_{i+1}\right)$ $x_{i+1} = x_i + h\left(\frac{1}{2}v_i + \frac{1}{2}v_{i+1}\right) + h^2\left(\frac{1}{12}a_i - \frac{1}{12}a_{i+1}\right)$
۵	اگر $i < 3$ باشد، $i = i + 1$ قرار داده و مراحل ۳ تا ۵ را تکرار کنید؛ در غیر این صورت، به مرحله بعدی بروید.
۶	پاسخ سیستم را در t_{i+1} تخمین بزنید (یا همه آن‌ها را صفر قرار دهید): $x_{i+1} = x_i + v_i h + \frac{1}{2}a_i h^2$ $v_{i+1} = v_i + a_i h$
۷	روابط زیر را تا زمانی که x_{i+1} تا ارقام موردنظر تثبیت شود، تکرار کنید. به‌روزرسانی مقادیر شتاب در سیستم خطی: $a_{i+1} = -\left(a_{g,i+1} + \omega_n^2 x_{i+1} + 2\omega_n \zeta v_{i+1}\right)$ به‌روزرسانی مقادیر شتاب در سیستم غیرخطی: $F_{s,i+1} = F_s(x_{i+1}) \quad , \quad F_{d,i+1} = F_d(v_{i+1})$ $a_{i+1} = -\left(\ ma_{g,i+1} + F_{s,i+1} + F_{d,i+1}\right)/m$ به‌روزرسانی مقادیر جابجایی و سرعت در t_{i+1} با استفاده از فرمول‌های نیوتن- کاتس- چهار نقطه‌ای: $v_{i+1} = v_{i-2} + h\left[\theta a_{i-2} + \frac{(3-2\theta)}{2}a_{i-1} + \frac{(3-2\theta)}{2}a_i + \theta a_{i+1}\right]$ $x_{i+1} = x_{i-2} + h\left(\frac{3}{8}v_{i-2} + \frac{9}{8}v_{i-1} + \frac{9}{8}v_i + \frac{3}{8}v_{i+1}\right)$
۸	مقدار $i = i + 1$ قرار داده و مرحله ۶ تا ۸ را برای نمونه بعدی تکرار کنید.

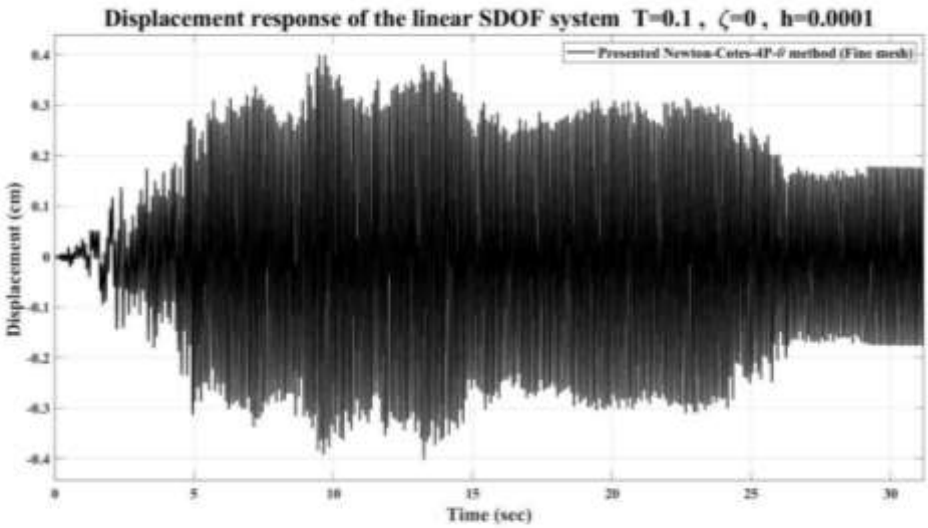
نکته مهم: جرم سیستم در طول ارتعاش بدون تغییر فرض می‌شود، یعنی $m(t) = m = cte$ می‌باشد. علاوه بر این، فرض می‌شود که $F_s = F_s(x)$ و $F_d = F_d(v)$ می‌باشد.



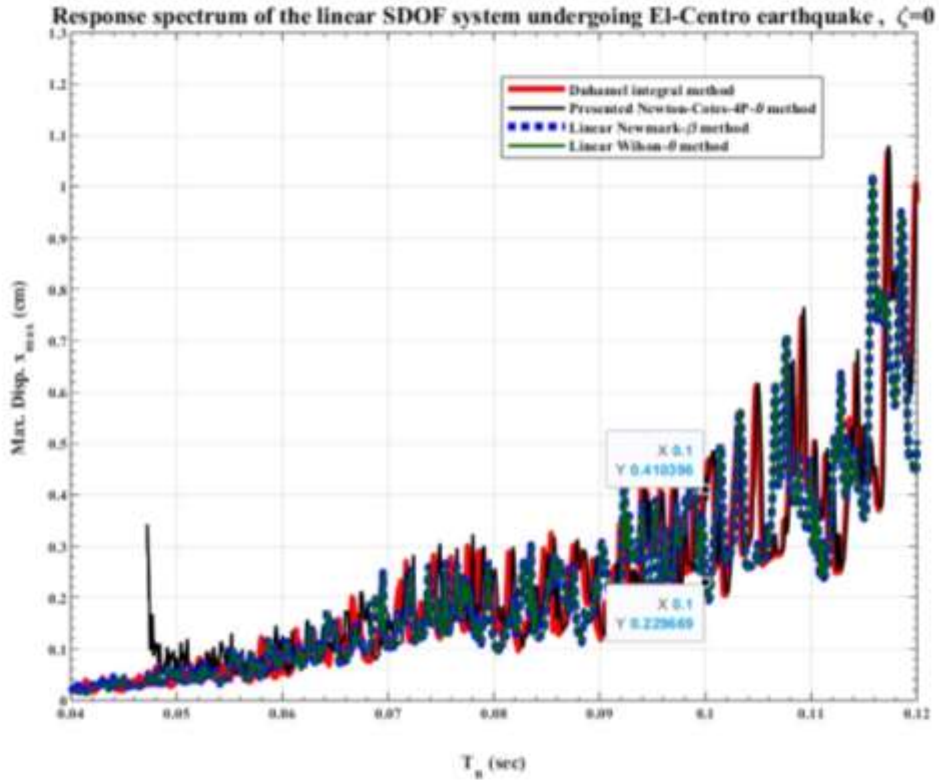
شکل ۷- رکورد زمین‌لرزه ال- سنترو



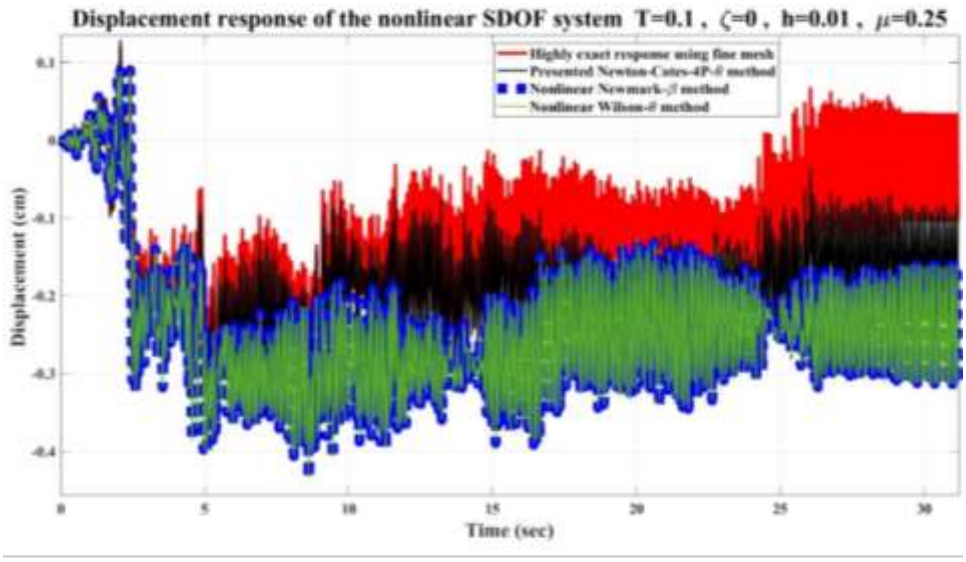
شکل ۸- پاسخ لرزه‌ای تغییر مکان- زمان سیستم خطی یک درجه آزادی برای مثال (۱)



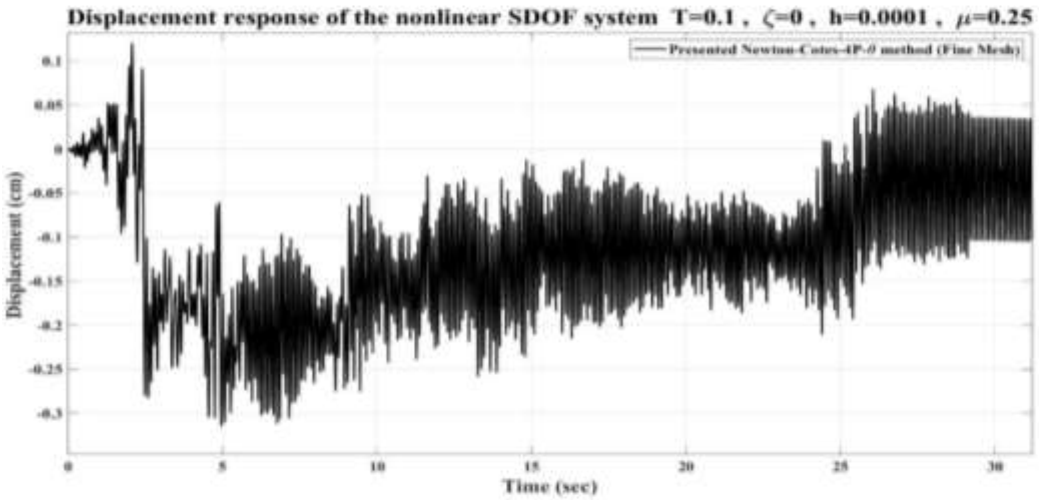
شکل ۹- پاسخ لرزه‌ای ریزگام تغییر مکان- زمان سیستم خطی یک درجه آزادی برای مثال (۱)



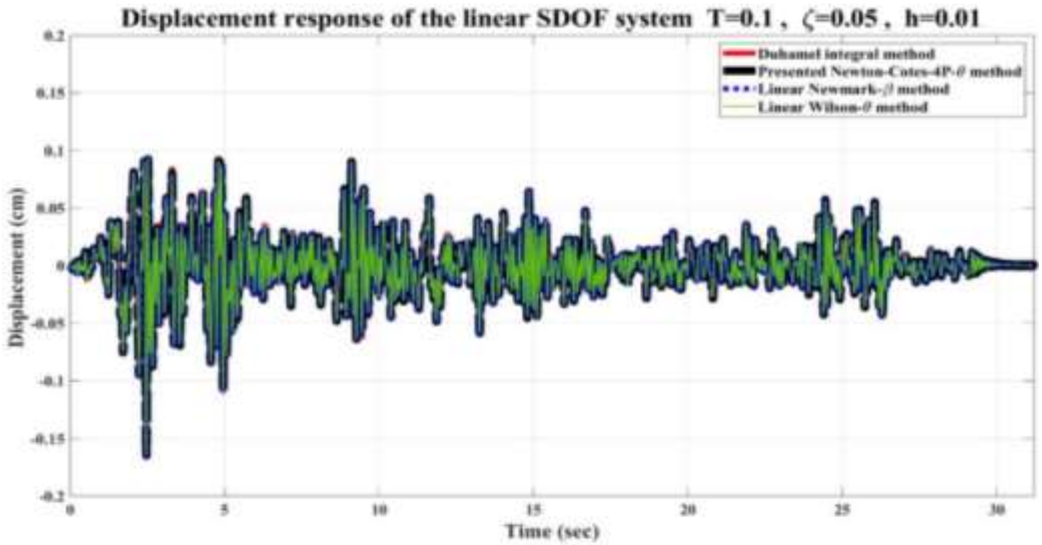
شکل ۱۰- طیف پاسخ الاستیک سیستم برای سیستم خطی یک درجه آزادی در مثال (۱)



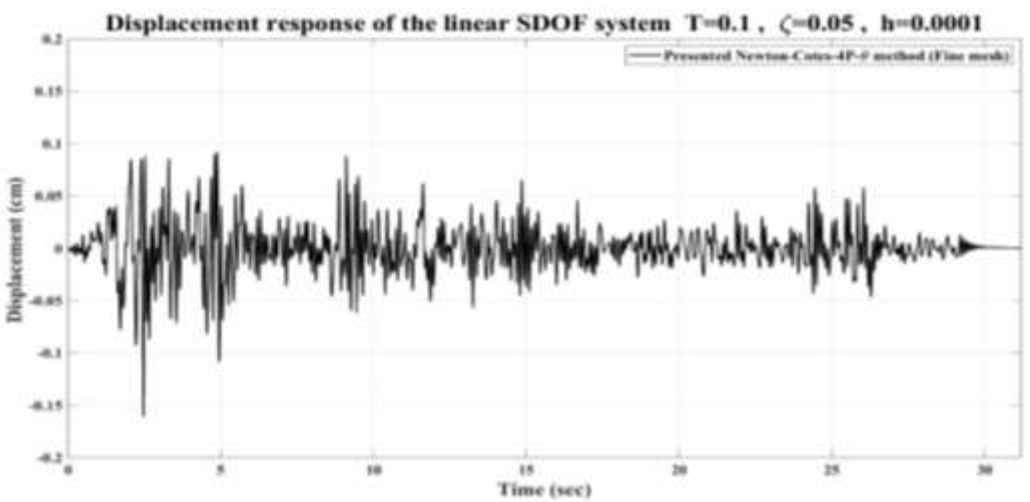
شکل ۱۱- پاسخ لرزه‌ای تغییرمکان- زمان سیستم غیرخطی یک درجه آزادی برای مثال (۲)



شکل ۱۲- پاسخ لرزه‌ای ریزگام تغییرمکان-زمان سیستم غیرخطی یک درجه آزادی برای مثال (۲)



شکل ۱۳- پاسخ لرزه‌ای تغییرمکان-زمان سیستم میرای خطی یک درجه آزادی برای مثال (۳)



شکل ۱۴- پاسخ لرزه‌ای ریزگام تغییرمکان-زمان سیستم میرای خطی یک درجه آزادی برای مثال (۳)

شکل (۱۱)، پاسخ‌های به‌دست‌آمده از روش جدید را با روش غیرخطی نیومارک-بتا و ویلسون-تتا مقایسه می‌کند. نتایج نشان می‌دهدکه تطابق بهتری بین پاسخ به‌دست‌آمده از روش ارائه‌شده و پاسخ حاصل از روش نیومارک- بتا وجود دارد. مقادیر اوج تغییر مکان نیز مشابه هستند. پاسخ لرزه‌ای ریزگام سیستم غیرخطی روش ارائه‌شده نیز در شکل (۱۲) نشان‌داده‌شده است.

۵- نتایج و بحث

مقادیر حداکثر پاسخ و زمان تحلیل روش‌های مثال‌های (۱) تا (۳) به‌ترتیب در جداول (۳) تا (۵) خلاصه شده‌اند. باتوجه‌به جداول (۳) تا (۵)، انتگرال دوهامل دارای پایین‌ترین سرعت و روش

۴-۳- مثال (۳): سیستم میرای خطی تحت اثر زلزله ال‌سنترو

سیستم‌های میرای خطی فرضی تحت اثر زلزله ال- سنترو تحلیل و مورد ارزیابی قرار می‌گیرد؛ سیستم در لحظه ابتدایی، از مبدأ مختصات (سکون) شروع به حرکت می‌کند. در این مثال برخلاف دو مثال قبلی نسبت میرایی پنج درصد در نظر گرفته شده است. نتایج ارزیابی و مقایسه روش ارائه‌شده در شکل (۱۳) و منحنی ریزگام روش مذکور در شکل (۱۴) نمایش‌داده‌شده است. نیومارک-بتا سریع‌ترین روش می‌باشد. لازم به‌ذکر است، روش ارائه‌شده از نظر سرعت هم‌پای روش‌های نیومارک-بتا و ویلسون-تتا نمی‌باشد و نسخه کنونی فرمول‌بندی حاضر، صرفاً از نظر دقت بر روش‌های فوق‌الذکر برتری دارد.

جدول ۳- مدت‌زمان تحلیل و مقادیر حداکثر پاسخ لرزه‌ای سیستم خطی یک درجه آزادی در مثال (۱)

مؤلفه	دقت بالا روش انتگرال دوهامل	ارائه شده روش نیوتن- کاتس- تتای چهار نقطه‌ای	خطی روش نیومارک- بتا	دقت پایین روش ویلسون- تتا
جابه‌جایی بیشینه (سانتی‌متر)	۰/۴۱۰۴	۰/۴۳۹۶	۰/۲۲۹۷	۰/۲۲۹۷
سرعت بیشینه (سانتی‌متر بر ثانیه)	-	۲۶/۷۴۳۶	۱۳/۶۸۷۸	۱۳/۶۸۷۸
شتاب بیشینه (سانتی‌متر بر مجذور ثانیه)	-	۱۶۹۰/۳۷۴۵	۸۴۷/۵۵۸۸	۸۴۷/۵۵۸۸
تعداد گام تکرارشونده	۱	۲	۱	۲
جذر میانگین مربعات (RMS)	۰/۲۵۸۹	۰/۲۹۵۳	۰/۱۴۴۱	۰/۱۴۴۱
اختلاف جذر میانگین مربعات از پاسخ دقیق (٪)	۰/۰۰	۱۴/۰۴۰۸	۴۴/۳۵۲۷	۴۴/۳۵۲۷
زمان تحلیل (ثانیه)	۰/۰۸۴۶	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۳۴

جدول ۴- مدت‌زمان تحلیل و مقادیر حداکثر پاسخ لرزه‌ای سیستم غیرخطی یک درجه آزادی در مثال (۲)

مؤلفه	دقت بالا روش انتگرال دوهامل	ارائه شده روش نیوتن-کاتس- تتای چهار نقطه‌ای	خطی روش نیومارک- بتا	دقت پایین روش ویلسون- تتا
جابه‌جایی بیشینه (سانتی‌متر)	۰/۳۱۴۹	۰/۳۴۷۵	۰/۴۳۴۷	۰/۴۳۴۷
سرعت بیشینه (سانتی‌متر بر ثانیه)	۸/۰۱۸۲	۸/۲۶۰۷	۸/۲۱۶۶	۸/۲۱۶۶
شتاب بیشینه (سانتی‌متر بر مجذور ثانیه)	۴۰۴/۴۱۰۶	۴۱۲/۶۰۲۶	۴۰۲/۳۶۶۸	۴۰۲/۳۶۶۸
تعداد گام تکرارشونده	۵	۳	۵	۳
جذر میانگین مربعات (RMS)	۰/۱۴۵۵	۰/۱۹۱۱	۰/۲۶۰۵	۰/۲۶۰۵۲
اختلاف جذر میانگین مربعات از پاسخ دقیق (٪)	۰/۰۰	۳۱/۳۷۸۶۳	۷۹/۰۷۰۹	۷۹/۰۷۰۹
زمان تحلیل (ثانیه)	۰/۲۷۵۰	۰/۰۰۲۹	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۱۳

جدول ۵- مدت‌زمان تحلیل و مقادیر حداکثر پاسخ لرزه‌ای سیستم میرای خطی یک درجه آزادی در مثال (۳)

مؤلفه	دقت پاسخ بالا منحنی ریزگام	ارائه شده روش نیوتن- کاتس- تتای چهار نقطه‌ای	غیرخطی روش نیومارک- بتا	دقت پایین روش ویلسون- تتا
جابه‌جایی بیشینه (سانتی‌متر)	۰/۱۵۹۷	۰/۱۶۷۱	۰/۱۶۷۰	۰/۱۶۷۰
سرعت بیشینه (سانتی‌متر بر ثانیه)	-	۷۲/۸۸۰۳	۷۸/۵۲۷۱	۷۸/۵۲۷۱
شتاب بیشینه (سانتی‌متر بر مجذور ثانیه)	-	۴۳۹۷/۴۸۰۶	۴۶۵/۵۵۱۸	۴۶۵/۵۵۱۸
تعداد گام تکرارشونده	۱	۲	۱	۲
جذر میانگین مربعات (RMS)	۰/۰۲۷۱	۰/۰۲۷۵	۰/۰۲۷۶	۰/۰۲۷۶
اختلاف جذر میانگین مربعات از پاسخ دقیق (٪)	۰/۰۰	۱/۴۶۰۷	۱/۸۷۴۲	۱/۸۷۴۲
زمان تحلیل (ثانیه)	۰/۱۵۷۵	۰/۰۰۲۰	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۱۸

باتوجه‌به شکل‌های (۷) تا (۱۴)، روش جدید پاسخ دقیق‌تری را در مقایسه با روش نیومارک ارائه می‌دهد. همان‌طور که مشاهده شد، در مثال اول، پاسخ روش نیوتن-کاتس-تتای چهار نقطه‌ای کاملاً با پاسخ دقیق به‌دست‌آمده از انتگرال دوهامل مطابقت دارد؛ درحالی‌که روش نیومارک پاسخ صحیح را از دست می‌دهد. علاوه‌برآن، خطای قابل‌توجه، در حدود ۴۰ درصد، توسط پاسخ جابه‌جایی داده‌شده توسط روش نیومارک در جدول (۴) شناسایی شده است. مثال (۲) یک مثال چالشی می‌باشد که در آن هر دو روش دارای خطاهای قابل‌توجهی هستند؛ اما، پاسخ روش جدید قابل‌اعتمادتر از پاسخ روش نیومارک-بتا می‌باشد. به‌طور خلاصه، روش نیوتن-کاتس-تتای پیشنهادی را می‌توان به‌عنوان یک روش کارآمد، پایدار، دقیق و سریع معرفی کرد که دقیق‌تر از روش نیومارک- بتا عمل می‌کند. علاوه‌برآن، الگوریتم جدید در مقادیر $\theta = 0.5$، مشابه روش نیومارک کار می‌کند که این امر در مثال‌های مقاله حاضر به‌صورت عددی بررسی نشد.

۶- نتیجه‌گیری

در این مطالعه، فرمول‌بندی عددی بسیار ساده و کارآمد و روش جدید برای به‌دست‌آوردن پاسخ دینامیکی سیستم‌های یک درجه آزادی میراشده خطی تحت بارگذاری لرزه‌ای ارائه‌شده است. این روش‌ها بر اساس مفاهیم ساده از دینامیک سازه و ریاضیات کاربردی بوده و برای سیستم‌های یک درجه آزادی خطی و غیرخطی قابل‌استفاده می‌باشد. از طرفی روش ارائه‌شده، فرمول‌بندی خود را برای تحلیل‌های خطی و غیرخطی تغییر نمی‌دهد. نتایج تحلیلی به‌وضوح نشان داد که روش پیشنهادی به طور مطلوبی می‌تواند جابه‌جایی، سرعت و پاسخ شتاب سیستم‌های دینامیکی را در گام‌های محاسباتی بادقت مناسبی محاسبه کند. قرابت زیادی بین نتایج حاصله از روش فوق‌الذکر و تاریخچه زمانی سیستم‌های یک درجه آزادی از انتگرال دوهامل و روش‌های نیومارک- بتا وجود داشت. براین‌اساس، روش پیشنهادی می‌تواند به‌عنوان یک ابزار تحلیلی قابل‌اعتماد در محاسبه اثرات لرزه‌ای برای سیستم‌های یک درجه آزادی میرا شده خطی محسوب شود. نتایج گویای آن است که استفاده از این روش بادقت بالایی همراه است و سادگی و سرعت بالا نیز از دیگر ویژگی‌های این روش می‌باشد؛ ازطرفی، روش ارائه‌شده به‌طور رضایت‌بخشی پاسخ لرزه‌ای سیستم‌های یک درجه آزادی میرایی خطی و غیرخطی را محاسبه می‌کند. مهم‌ترین ویژگی روش ارائه‌شده را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:

۱) برنامه‌نویسی کامپیوتری آن بسیار ساده می‌باشد.

۲) مدل فعلی یک سری محاسبه تکرارشونده ساده می‌باشد.

۳) هر نوع تحریک دل‌خواه مانند هارمونیک و تحریک زلزله نامنظم را پوشش می‌دهد.

۴) از محاسبات پیشرفته ریاضی اجتناب می‌شود و عملیات محاسباتی آن صرفاً متشکل از عملیات اصلی هستند.

۵) تحلیل یک سیستم یک درجه آزادی خطی و غیرخطی حتی توسط مبتدیان نیز قابل‌انجام است.

۶) هرگونه خطای ظاهرشده، بدون درنظرگرفتن منابع آن‌ها، به گام‌های بعدی تسری پیدا نمی‌کند.

۷) با درنظرگرفتن تمامی ویژگی‌های روش ارائه‌شده، مدت‌زمان تحلیلی نسخه حاضر در مقایسه با روش‌های نیومارک- بتا و ویلسون تتا قابل‌رقابت نمی‌باشد.

مطالعات بیشتر جهت توسعه و ارتقاء روش پیشنهادی برای تخمین پاسخ لرزه‌ای انواع دیگر سیستم‌های سازه‌ای مانند مدل‌های غیرخطی و غیرارتجاعی چند درجه آزادی هنوز در حال انجام بوده و پایداری، هم‌گرایی و دقت روش‌های مورد مطالعه نیز در دستور کار قرار دارد.

۷- مراجع

Al-Subari L, Hanafi M, Ekinci A, “Effect of geosynthetic reinforcement on the bearing capacity of strip footing on sandy soil”, SN Applied Sciences, 2020, 2 (9), 1484. https://doi.org/10.1007/s42452-020-03261-5.

Babaei M, Jalilkhani M, Ghasemi SH, Mollaei S, “New methods for dynamic analysis of structural systems under earthquake loads”, Journal of Rehabilitation in Civil Engineering, 2022, 10 (3), 81-99. https://doi.org/10.22075/jrce.2021.23323.1506.

Babaei M, Jalilkhani M, Mollaei S, “A numerical method for estimating the dynamic response of structures”, Journal of Civil and Environmental Engineering, 2021, 29 (1), 1-19. https://doi.org/10.22034/jcee.2021.41770.1963.

Babaei M, Hanafi MR, “A novel method for nonlinear time-history analysis of structural systems: improved newton-cotes-hermite-5p method”, Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering, 2022. https://doi.org/10.1007/s40996-024-01345-5.

Babaei M, Alidoost M R & Hanafi M R, "A Novel Numerical Method for Nonlinear Time History Analysis of MDOF Structures: Newton-Cotes-Hermite-4Point", Journal of Structural and Construction Engineering, 2023, 1 (1), 1-20. https://doi.org/10.22065/jsce.2023.400538.3134.

Bathe K-J, “Finite element procedures Prentice-Hall”, New Jersey, 1996, 1037, 1.

Bathe K, Finite Element Procedures, Watertown, MA: KJ Bathe, Beijing, China: Higher Education Press, 2016.

Chang SY, “Studies of newmark method for solving nonlinear systems:(ii) verification and guideline”, Journal of the Chinese institute of engineers, 2004, 27 (5), 663-675. http://doi.org/10.1080/02533839.2004.9670914

Chopra AK, “Dynamics of structures: theory and stabilized with portland cement and coal bottom ash for sustainable future", KSCE Journal of Civil Engineering, 2022, 26 (12), 5049-5066. https://doi.org/10.1007/s12205-022-2388-z.

Izadifard RA, Mollaei S, Omran MEN, "Preparing pressure-impulse diagrams for reinforced concrete columns with constant axial load using single degree of freedom approach", International Journal of Advancements o ISSN: 0976-4860 Research Article Research Article e i in Technology, 2016, 7 (173), 2-6. https://doi.org/10.4172/0976-4860.1000173.

Kazakov KS, "Dynamic response of a single degree of freedom (SDOF) system in some special load cases, based on the Duhamel integral", International Conference on Engineering Optimization (EngOpt 2008), Rio de Janeiro, Brazil, 1-5 June 2008.

Kurt N, Cevik M, "Polynomial solution of the single degree of freedom system by Taylor matrix method", Mechanics Research Communications, 2008, 35 (8), 530-536. https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2008.05.001.

Li P, Wu B, "An iteration approach to nonlinear oscillations of conservative single-degree-of-freedom systems", Acta Mechanica, 2004, 170 (1), 69-75. https://doi.org/10.1007/s00707-004-0112-3.

Mollaei S, Fahmi A, Jahani D, Babaei Golsefidi Z, Babaei R, Hanafi MR, "A predictive model for the strength of a novel geopolymer construction material produced by autoclaved aerated concrete waste", International Journal of Sustainable Construction Engineering and Technology, 2022, 14 (1), 148-167. https://doi.org/10.30880/ijscet.2023.14.01.015.

Malakiyeh MM, Shojaee S, Bathe K-J, "The bathe time integration method revisited for prescribing desired numerical dissipation", Computers and Structures, 2019, 212, 289-298. https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2018.10.008.

Meirovitch L, "Elements of vibration analysis((Book))", New York, McGraw-Hill Book Co., 1986, 574, 1986.

Nguyen QH, Hanafi M, Merkl J-P, d'Espinose de Lacaillerie J-B, "Evolution of the microstructure of unconsolidated geopolymers by thermoporometry", Journal of the American Ceramic Society, 2021, 104 (3), 1581-1591. https://doi.org/10.1111/jace.17543.

Newmark N, "A method of computation for structural dynamics", Journal of the Engineering Mechanics Division, 1959, 85 (3), 67-94.

Noh G, Bathe K-J, "The Bathe time integration method with controllable spectral radius: The ρ∞-Bathe method", Computers and Structures, 2019, 212, 299-310. https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2018.11.001.

Paz M, Leigh W, "Structural dynamics: theory and computation", Springer, US, 1997, 220-264.

Paz M, Leigh W, "Damped single degree-of-freedom system", Structural dynamics: theory and computation, 2004, 1, 31-48.

applications to earthquake engineering", Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2012, 134-143.

Chopra AK, Goel RK, Chintanapakdee C, "Statistics of single-degree-of-freedom estimate of displacement for pushover analysis of buildings", Journal of Structural Engineering, 2003, 129 (4), 459. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2003)129:4(459).

Clough R, Penzien J, "Dynamics of structures, 3rd Ed", McGraw-Hill, US, 1975, 186-190.

Ekinci A, Hanafi M, Aydin E, "Strength, stiffness, and microstructure of wood-ash stabilized marine clay", Minerals, 2020, 10 (9), 796. https://doi.org/10.3390/min10090796.

Ekinci A, Hanafi M, Ferreira PMV, "Influence of initial void ratio on critical state behaviour of poorly graded fine sands", Indian Geotechnical Journal, 2020, 50 (5), 689-699. https://doi.org/10.1007/s40098-020-00416-4.

Fahmi A, Zavaragh SR, Hanafi MR, Rahimpour H, Zinatloo-Ajabshir S, Asghari A, "Facile preparation, characterization, and investigation of mechanical strength of Starchy NaCl-binder as a lightweight construction material", Scientific Reports, 2022, 13 (1), 19042. https://doi.org/10.1038/s41598-023-46536-8.

Ebeling RM, Green RA, French SE, "Technical report ITL-97-7: accuracy of response of single-degree-of-freedom systems to ground motion", Prepared by Army Engineer Waterways Experiment Station Vicksburg Ms Information …, Washington, D.C, 1997. https://www.researchgate.net/publication/272682432_Accuracy_of_Response_of_Single-Degree-of-Freedom_Systems_to_Ground_Motion.

Evtushenko YG, Stoer J, "Numerical optimization techniques", Springer, US, 1985, 436-437.

Fombrun CJ, "Structural dynamics within and between organizations", Administrative Science Quarterly, 1986, 31 (3), 403-421. https://doi.org/10.2307/2392830.

Ge X, Gong J, Zhao C, Azim I, Yang X, Li C, "Structural dynamic responses of building structures with non-viscous dampers under Kanai-Tajimi spectrum excitation", Journal of Sound and Vibration, 2022, 517, 116556. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116556

Hanafi M, Abki A, Ekinci A, Baldovino JDJA, "Mechanical properties of alluvium clay treated with cement and carbon fiber: relationships among strength, stiffness, and durability", International Journal of Pavement Engineering, 2022, 24 (1), 2094928. https://doi.org/10.1080/10298436.2022.2094928.

Hanafi M, Aydin E, Ekinci A, "Engineering properties of basalt fiber-reinforced bottom ash cement paste composites", Materials, 2020, 13 (8), 1952. https://doi.org/10.3390/ma13081952.

Hanafi M, Ekinci A, Aydin E, "Triple-Binder-Stabilized marine deposit clay for better sustainability", Sustainability, 2020, 12 (11), 4633. https://doi.org/10.3390/su12114633.

Hanafi M, Ekinci A, Aydin E, "Engineering and microstructural properties of alluvium clay

Veletsos A, Newmark N, Chelapati C, "Deformation spectra for elastic and elastoplastic systems subjected to ground shock and earthquake motions", Proceedings of the 3rd World Conference On Earthquake Engineering, Wellington, New Zealand, 10 January 1965.

Wen W, Wei K, Lei H, Duan S, Fang D, "A novel sub-step composite implicit time integration scheme for structural dynamics", Computers and Structures, 2017, 182, 176-186. https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.11.018.

Wu J-S, "Analytical and numerical methods for vibration analyses", John Wiley and Sons, US, 2013, 350-356.

Zhang J, Liu D, Liu Y, "Degenerated shell element with composite implicit time integration scheme for geometric nonlinear analysis", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2016, 105 (7), 483-513. https://doi.org/10.1002/nme.4975.

Zhang J, Liu Y, Liu D, "Accuracy of a composite implicit time integration scheme for structural dynamics", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2017, 109 (3), 368-406. https://doi.org/10.1002/nme.5291.

University of Tabriz

Journal of Civil and Environmental Engineering
Volume 54 (2024), Issue 1 (Spring), 22-35

EXTENDED ABSTRACT

New Formulation for Dynamic Analysis of Nonlinear Time-History of Vibrations of Structures under Earthquake Loading

Mohammad Reza Hanafi [a], Mehdi Babaei [b,*], Peyman Narjabadifam [b]

[a] *Bachelor of Civil Engineering, Department of Civil Engineering, University of Bonab, Bonab, Iran*

[b] *Assistant professor, Department of Civil Engineering, University of Bonab, Bonab, Iran*

Received: 12 December 2022; **Review:** 19 May 2023; **Accepted:** 11 June 2023

Keywords:
Structural dynamics, Seismic response, Nonlinear analysis, Time-history analysis, Newton-Cotes-4P-θ method.

1. Introduction

A fast and efficient numerical scheme is presented for time-history analysis of single-degree-of-freedom (SDOF) structural systems undergoing seismic excitation (Chopra, 2003). The new method is called Newton-Cotes-4P-θ Method. It uses the most known 4-point Newton-Cotes quadrature in its body to solve the vibration equation. Nonlinear analysis is covered as well as linear analysis. Any arbitrary external loadings of type force or seismic signals are welcome. The significant advantages of the new formulation are its great simplicity, running speed, and appropriate precision level compared with its counterparts such as Duhamel integral and Newmark-β methods. The accuracy level of the Newton-Cotes-4P-θ is close to the semi-analytical method of Duhamel integration and its speed is similar to the Newmark-β algorithm. Notably, against the nonlinear Newmark-β method, the new method does not require a standalone procedure to handle nonlinear analysis; instead, it simply triggers iteration of the same computation used in its first processing round. Moreover, the Newmark-β method loses its performance dealing with stiff (T_n>1.5 sec) and near-conservative (ζ<0. 02) systems; however, the Newton-Cotes-4P-θ method does not loos its accuracy and keeps its well-performed analysis in this case. Numerical results reveal the superiority of the Newton-Cotes- 4P-θ method against its counterparts such as the Duhamel integral, Newmark-β, and Wilson-θ methods (Babaei et al., 2021; Babaei et al., 2022; Babaei et al., 2023).

2. Methodology: Proposed Newton-Cotes-4P-θ method

To formulate the Newton-Cotes-4P-θ method, we first recall the basics from the kinematics of particles in Dynamics. Then, we use the multistep numerical integration formula of the Newton-Cotes rule to estimate the velocity and displacement in their basic relations. Careful assessment of the Newton-Cotes integration showed that they lose their efficiency when analyzing high-frequency systems. So, a series of modifications are made in the body of Newton-Cotes to improve its performance when dealing with these systems. This modification lies effective and noticeably increases the accuracy of the numerical method in a way that it can robustly analyze linear and nonlinear systems possessing any type of nonlinearity in its component. Finally, simplifying the nonlinear algorithm of Newton-Cotes-4P-θ, we achieve the linear version of this technique. The Linear Newton-Cotes-4P-θ method is merely able to analyze linear systems and it cannot properly handle nonlinear problems.

Publisher: Vice Chancellery for Research & Technology, University of Tabriz
DOI: 10.22034/CEEJ.2023.54564.2209 Online ISSN: 2717-4077
* Corresponding Author:
E-mail addresses: mr.hanafi@ubonab.ac.ir (Mohammad Reza Hanafi), m.babaei@ubonab.ac.ir (Mehdi Babaei), narjabadifam.peyman@ubonab.ac.ir (Peyman Narjabadifam).

3. Results and discussion

According to Figs 1 to 3 the presented Newton-Cotes-4P method provides a more accurate response compared to the Newmark-β method.

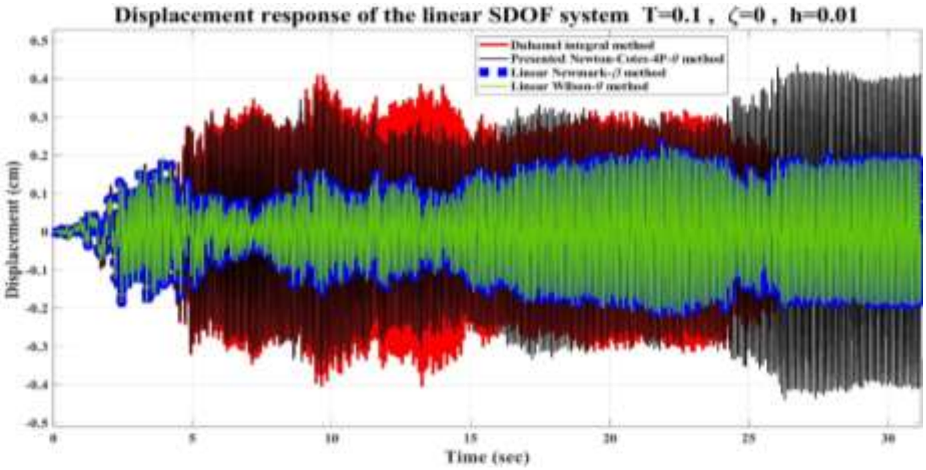


Fig. 1. Displacement time-history response of the linear SDOF system

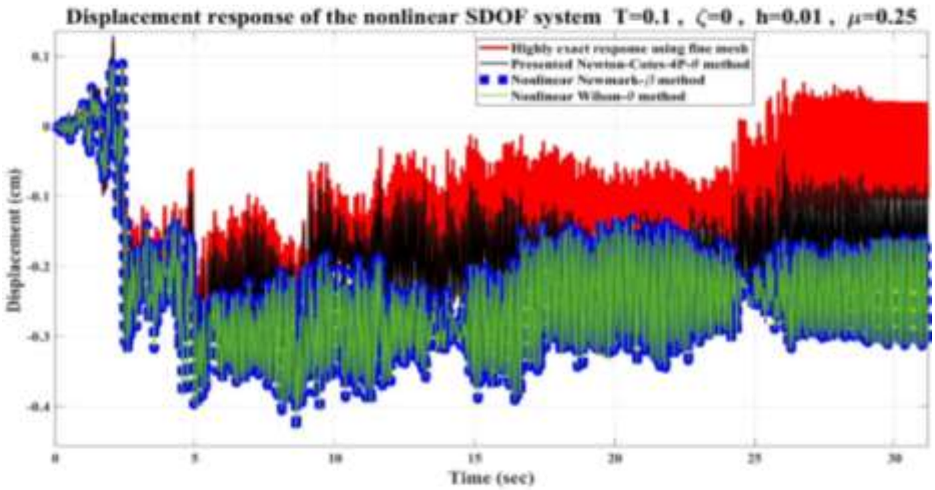


Fig. 2. Displacement time-history response of the nonlinear SDOF system

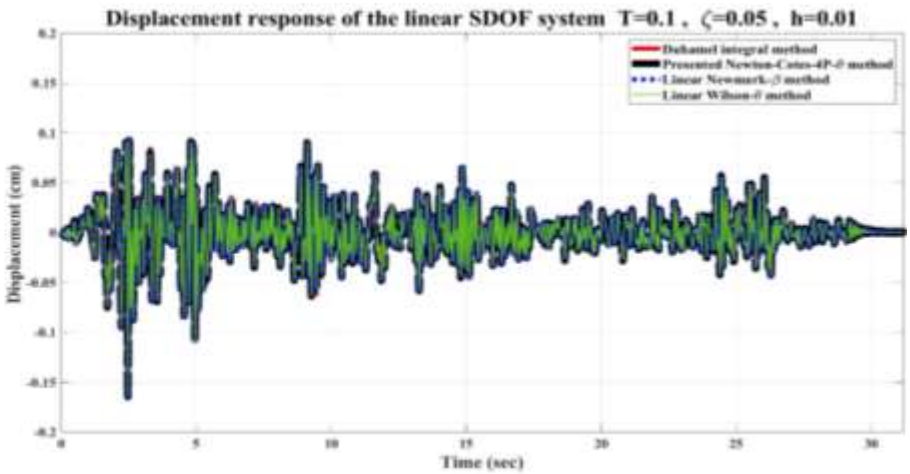


Fig. 3. Displacement time-history response of the linear damping SDOF system

In the first example, the response from the Newton-Cotes-4P-θ method completely matches the exact response obtained from the Duhamel integral while Newmark loses the correct response. Moreover, a significant error, about 40 percent, is detected by the displacement response given by the Newmark-β method in Table 3. Example II is a challenging one for which both of the methods have significant errors; but, the response of the new method is again more reliable than Newmark's response.

Table 1. Peak responses and run-times of linear and nonlinear analyses in the examples

Item	Highly exact response Duhamel integral method or using fine mesh		Presented Newton-Cotes-4P-θ method		Linear Newmark-*β* method or Nonlinear Newmark-β method		Low exact response Linear Wilson-θ method or Nonlinear Wilson-θ method	
Max Displacement (cm)	Linear	Nonlinear	Linear	Nonlinear	Linear	Nonlinear	Linear	Nonlinear
	0.4104	0.3149	0.4140	0.347500470	0.2301	0.4347	0.2297	0.4347
Max Velocity (cm/sec)	Linear	Nonlinear	Linear	Nonlinear	Linear	Nonlinear	Linear	Nonlinear
	NC*	8.0184	27.5466	8.260706207	13.7125	8.2166	13.6879	8.2166
Max Acceleration (cm/sec^2)	Linear	Nonlinear	Linear	Nonlinear	Linear	Nonlinear	Linear	Nonlinear
	NC*	404.4226	1560.8602	412.6025804	849.3479	402.3668	847.5628	402.3668
Number of iteration	Linear	Nonlinear	Linear	Nonlinear	Linear	Nonlinear	Linear	Nonlinear
	1	5	2	3	1	5	2	3
Run time (sec)	Linear	Nonlinear	Linear	Nonlinear	Linear	Nonlinear	Linear	Nonlinear
	0.3856	0.1359	0.0008	0.0013	0.0005	0.0014	0.0010	0.0010

NC*: Not computed

4. Conclusions

In this study, a greatly simple and efficient numerical formulation so-called Newton-Cotes-4P-θ method was developed for computing the dynamic response analysis of the structures. Both linear and nonlinear versions of the method were proposed in this study. The great advantage of the new formulation is that it does not change its formulation for linear and nonlinear analyses. Against the Newmark-β method, it has no standalone mechanism to deal with the nonlinearity; instead, it just repeats the same formulas used for the linear analysis. Results reveal that the proposed method satisfactorily estimates the seismic response of linear and nonlinear damped SDOF systems. It was also shown that the proposed Newton-Cotes-4P-θ method can reliably estimate the displacement time-history response of the SDOF systems. So, the proposed method can be identified as an efficient analysis tool for estimating the seismic demands of linear damped systems. Further studies in the development of the proposed procedure for more accuracy and simplicity are still underway.

5. References

Babaei M, Jalilkhani M, Ghasemi SH, Mollaei S, "New methods for dynamic analysis of structural systems under earthquake loads", Journal of Rehabilitation in Civil Engineering, 2022, 10 (3), 81-99. https://doi.org/10.22075/jrce.2021.23323.1506

Babaei M, Alidoost MR, Hanafi MR, "A novel numerical method for nonlinear time history analysis of mdof structures: Newton-Cotes-Hermite-4Point", Journal of Structural and Construction Engineering, 2023, 1 (1), 1-20. https://doi.org/10.22065/jsce.2023.400538.3134

Babaei M, Jalilkhani M, Mollaei S, "A Numerical method for estimating the dynamic response of structures", Journal of Civil and Environmental Engineering, 2021, 29 (1), 1-19.
https://doi.org/10.22034/jcee.2021.41770.1963

Chopra AK, Goel RK, Chintanapakdee C, "Statistics of single-degree-of-freedom estimate of displacement for pushover analysis of buildings", Journal of Structural Engineering, 2003, 129 (4), 459.