University of Tabriz

Journal of Civil and Environmental Engineering
Volume 54 (2024), Issue 2, 35-51

EXTENDED ABSTRACT

Robust Analysis of the Designed Controller Based on the Critically Damped Condition

Hossein Ghaffarzadeh*, Alireza Aran, Javad Katebi

Faculty of Civil Engineering, University of Tabriz

Received: 14 January 2023; **Reviewed:** 01 May 2023; **Accepted:** 17 May 2023

Keywords:
Robust control, H_∞ Control, Critically damped condition, Parametric uncertainty, Time delay, Sensor faults, Actuator failure.

1. Introduction

In this research, the robustness of the controller designed based on the critically damped condition (CD) is evaluated against parametric uncertainty, time delay, sensor/actuator faults, and the failure of the actuators. Then, H_∞ robust controllers are designed in different conditions and the results are compared with the CD method. Linear matrix inequalities and Lyapunov theory are used to design the H_∞ controllers, and due to the fact that sparse and large matrices arise in the process of solving, the problem is suboptimally solved. Therefore, Yalmip toolbox and Mosek® solver are used for this purpose.

2. Methodology

The design of the controller based on the critically damped condition and its comparison with the H_∞ method is the aim of this paper. Therefore, first the formulation of the H-infinity problem is performed using linear matrix inequalities and Lyapunov stability, then the obtained inequalities are generalized to the robust analysis of the CD controller. The H_∞ robust controller is designed with the assumption of state feedback and is compared with the CD controller which is based on full velocity feedback. Considering the 3- and 8-story shear structures which are excited with a synthetic earthquake, the effect of each uncertainty such as parametric uncertainty, time delay, sensor/actuator faults, and the failure of the actuator are evaluated. The synthetic earthquake record, which is scaled to 0.35g, is illustrated in Fig. 1.

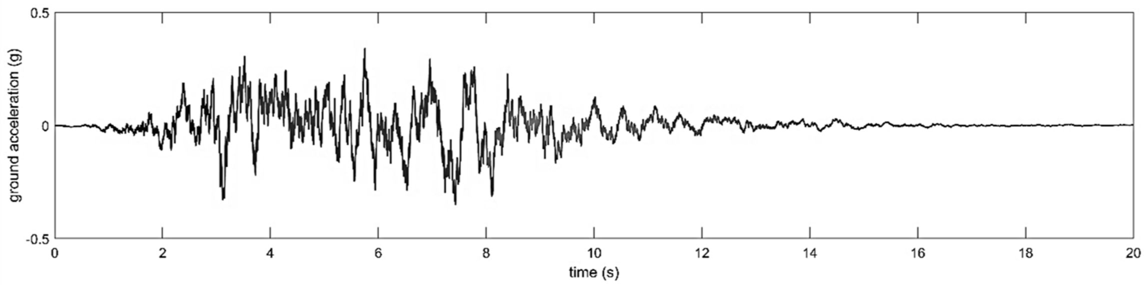


Fig. 1. Synthetic earthquake acceleration time history

Publisher: Vice Chancellery for Research & Technology, University of Tabriz
https://doi.org/10.22034/CEEJ.2023.54903.2215
Online ISSN: 2717-4077
* Orcid Cod Corresponding Author: 0000-0003-0607-0694
E-mail addresses: a.araan.ac@gmail.com (Alireza Aran), ghaffar@tabrizu.ac.ir (Hossein Ghaffarzadeh), jkatebi@tabrizu.ac.ir (Javad Katebi).

3. Results and discussion

To evaluate the robustness of the CD controller and compare it with the H_∞ controller, two 3- and 8-story shear structures are considered under the vibration of a synthetic earthquake. By examining the presence of parametric uncertainty and time delay in the structures controlled by CD and H_∞ methods, it was shown that the H_∞ controller guarantees a greater allowable time delay. Also, with the increase of the uncertainty of mass, stiffness, and damping parameters, the allowable time delay values of the H_∞ controller have a downward trend. But the allowable time delay values of the CD controller remain constant with the parametric uncertainty increasing the up to 15%. Also, by investigating the simultaneous presence of parametric uncertainties, time delay, and sensor/actuator faults, it was demonstrated that the increase in sensor/actuator faults does not have a negative effect on the allowable time delay values (Fig. 2 & 3).

The investigation of the structural responses represented that the CD controller is more suitable than the H_∞ controller in terms of controlling the acceleration of the structure. It also gives better results when actuators fail in the simultaneous presence of other uncertainties.

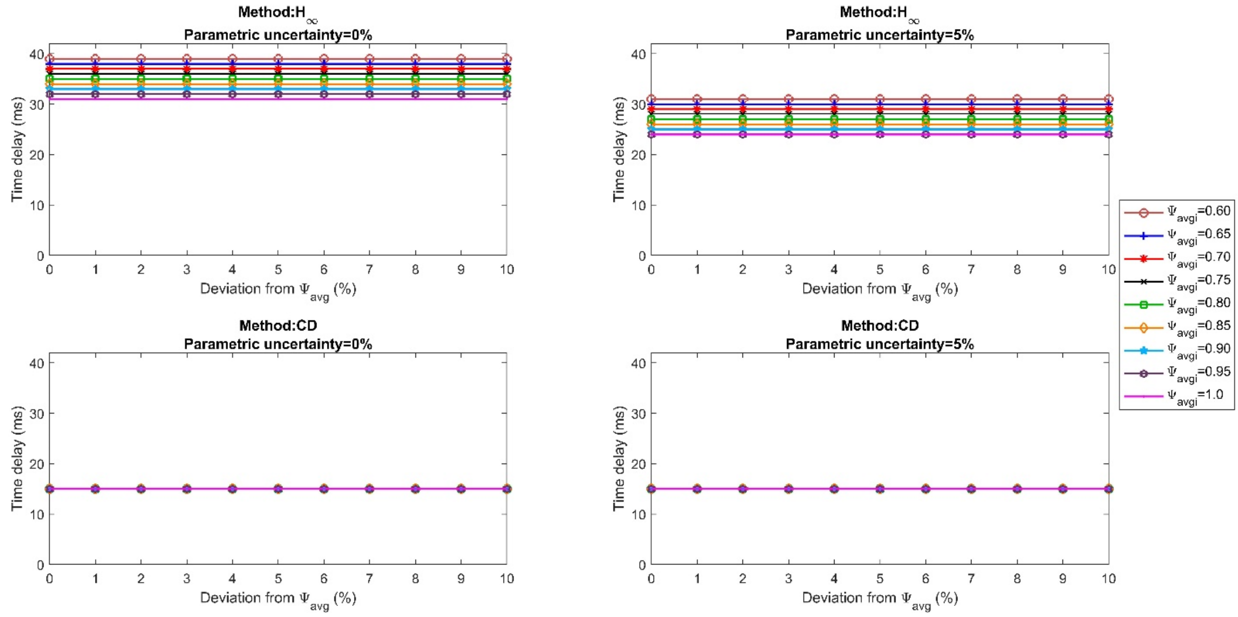


Fig. 2. Allowable time delay in the presence of parametric uncertainty and sensor/actuator error for 3-story shear structure

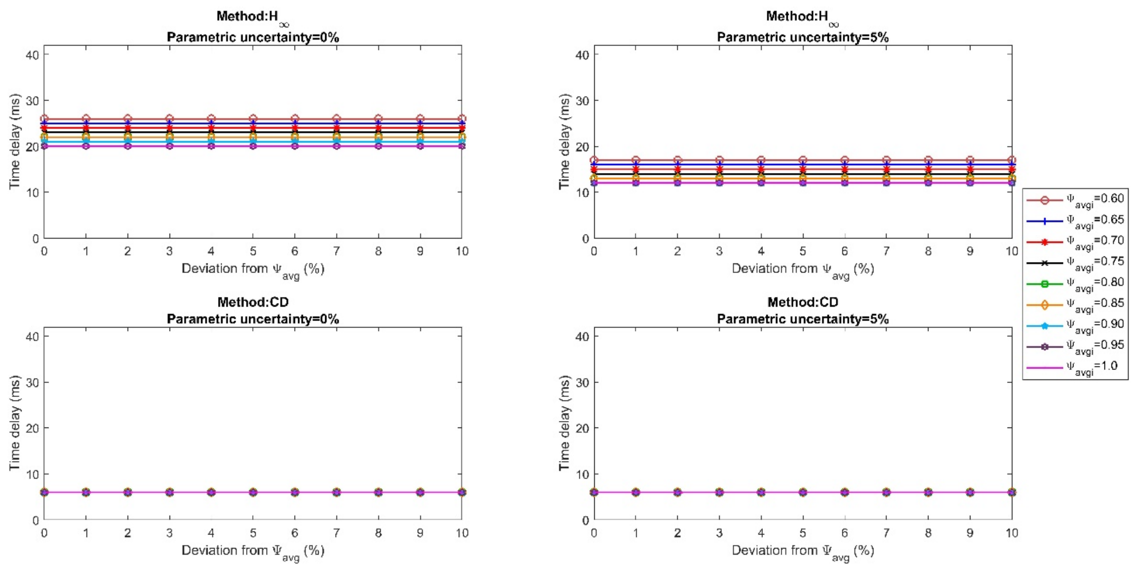


Fig. 3. Allowable time delay in the presence of parametric uncertainty and sensor/actuator error for 8-story shear structure

4. Conclusions

This paper has evaluated the robustness of the controller designed based on the critically damped condition (CD) in the presence of parametric uncertainties, time delay, sensor/actuator faults, and actuator failure. Also, results have compared with the H_∞ controller. Two 3- and 8-story structures excited by a synthetic earthquake were considered as numerical examples to assess the aforementioned controllers. The results showed that the CD controller ensures the stability of the system for a lower time delay compared to the H_∞ controller. On the other hand, it was represented that the allowable time delay of the system is not sensitive to increasing the sensors/actuators faults for the both H_∞ and CD controller in the presence of parametric uncertainty. By investigating the responses of the structure, the performance of the CD controller in acceleration control is evaluated more appropriately.

آنالیز قوام کنترل‌کننده طراحی شده براساس شرایط میرایی بحرانی

حسین غفارزاده*[1]، علیرضا آران[2]، جواد کاتبی[3]

[1] استاد دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تبریز
[2] دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تبریز
[2] دانشیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تبریز

دریافت: 1401/10/24، بازنگری: 1402/2/11، پذیرش: 1402/2/27، نشر آنلاین: 1402/2/27

چکیده

با رشد و توسعه سیستم‌های کنترل فعال برپایه نظریه کنترل کلاسیک و مدرن، لزوم تضمین قوام سیستم‌ها در برابر عدم‌قطعیت‌ها مطرح شده است. برای اطمینان از عملکرد مناسب سیستم‌های کنترلی در برابر عدم‌قطعیت‌ها، نظریه کنترل جدید به نام نظریه کنترل مقاوم بنا نهاده شده است و سیستم‌های طراحی شده براساس این نظریه دارای دو ویژگی «عملکرد مقاوم» و «پایداری مقاوم» هستند. روش کنترل H_∞ یکی از پرکاربردترین روش‌های این نظریه است که در این روش، تضمین پایداری سیستم می‌تواند به‌کمک نامساوی‌های ماتریسی خطی و تئوری لیاپانوف (Lyapunov) انجام شود. در این پژوهش، قوام سیستم کنترل فعال براساس شرایط میرایی بحرانی که یکی از جدیدترین الگوریتم‌های کنترل برپایه نظریه کنترل مدرن است، مورد بررسی قرار می‌گیرد و با کنترل‌کننده طراحی شده با روش H_∞ مقایسه می‌شود. باتوجه به حضور انواع عدم‌قطعیت‌ها در سیستم‌های کنترلی، آنالیز قوام سیستم کنترل فعال براساس شرایط میرایی بحرانی و طراحی کنترل‌کننده H_∞ با در نظر گرفتن عدم‌قطعیت‌های پارامتری، تأخیر زمانی، خطای سنسورها/ محرک‌ها و خرابی محرک‌ها انجام می‌شود. به‌منظور مقایسه دو روش مذکور، دو سازه برشی 3 و 8 طبقه جهت ارزیابی پاسخ‌های سیستم در نظر گرفته می‌شوند. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که کارایی روش کنترل بر اساس شرایط میرایی بحرانی در کنترل شتاب سازه بهتر از روش کنترل H_∞ است. اما در مقایسه تأخیر زمانی مجاز سیستم‌های کنترلی، روش کنترل H_∞ نتایج بهتری را به‌دست می‌دهد.

کلیدواژه‌ها: کنترل مقاوم، کنترل H_∞، شرایط میرایی بحرانی، نامعینی پارامتری، تأخیر زمانی، خطای سنسورها، خرابی محرک‌ها.

1- مقدمه

در سیستم‌های مدرن سازه‌ای که سازه‌های هوشمند نیز نامیده می‌شوند، انرژی ورودی ناشی از زلزله توسط سیستم‌های کنترلی اضافه شده به سازه مستهلک می‌شود. یکی از سیستم‌های کنترلی، سیستم کنترل فعال است که در آن از نیروی خارجی جهت کنترل سازه استفاده می‌شود. جهت محاسبه نیروی خارجی لازم برای کنترل سازه، الگوریتم‌های کنترلی مختلفی پیشنهاد شده است (Miyamoto و همکاران، 2018؛ Katebi و همکاران، 2022). سیستم‌های کنترل فعال سازه قابلیت سازگاری بالایی با ارتعاش خارجی دارند، اما حساسیت آن‌ها نسبت به عدم قطعیت‌های موجود در سیستم می‌تواند عملکرد آن‌ها را مختل کند. پس قوام سیستم‌های کنترلی در برابر عدم قطعیت‌های موجود یک ویژگی ضروری تلقی می‌شود.

قوام یکی از مهم‌ترین مباحث طراحی سیستم‌های کنترل فعال است. درواقع سیستم‌های کنترلی علاوه‌بر این‌که در معرض اغتشاش‌های خارجی هستند، به‌دلیل وجود اختلاف در مدل ریاضی نسبت به واقعیت که با نام عدم‌قطعیت شناخته می‌شوند، دچار تضعیف عملکرد می‌شوند. در طراحی کنترل‌کننده باید ضمن پایدارسازی سیستم، سطحی از عملکرد مناسب در حضور اغتشاش خارجی، دینامیک‌های مدل نشده و تغییر پارامترهای سیستم فراهم شود. اهمیت قوام سیستم‌های کنترلی در دهه‌های گذشته بیشتر احساس شده است. در گذشته، قوام سیستم‌های تک- ورودی- تک‌خروجی (SISO) از طریق حاشیه فاز و بهره تأمین می‌شد، اما با توسعه سیستم‌ها به چند ورودی- چند خروجی (MIMO)، این روش مناسب ارزیابی نشد. در دهه 1960، قوام سیستم با استفاده از روش‌هایی که عموماً LQG نامیده می‌شدند،

ناشر: معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه تبریز شاپا الکترونیکی: 2717-4077

https://doi.org/10.22034/CEEJ.2023.54903.2215
* نویسنده مسئول؛ شماره تماس: 041-33395869
* Orcid Cod Corresponding Author: 0000-0003-0607-0694
آدرس ایمیل: ghaffar@tabrizu.ac.ir (ح. غفارزاده)، a.araan.ac@gmail.com (ع. آران)، jkatebi@tabrizu.ac.ir (ج. کاتبی).

تأمین می‌شد. این روش که اساس کار آن بر پایه مدل ریاضی و اغتشاشات نویز سفید بود، در برخی موارد نتوانست پاسخ‌های مناسبی را برای قوام سیستم ارائه کند (AthansT، 1971).

درنتیجه در اواخر دهه 1970 و اوایل دهه 1980، شالوده نظریه جدید به‌نام کنترل مقاوم بنا نهاده شد. این نظریه باتوجه به در نظر گرفتن عدم‌قطعیت‌های موجود سیستم در طراحی کنترل‌کننده، معایب دو نظریه کنترل کلاسیک و کنترل مدرن را پوشش داده است. یکی از روش‌های نظریه کنترل مقاوم، روش کنترل بهینه H_∞ می‌باشد. حل مسئله H_∞ به‌کمک تئوری پایداری لیاپانوف و ناتساوی‌های ماتریسی خطی از دهه 1980 تا به حال گسترش یافته است (Skelton و همکاران، 2017؛ Khalil، 2002).

حل مسئله H_∞ به طراحی کنترل‌کننده‌های مقاوم در برابر انواع عدم‌قطعیت‌ها و اغتشاش خارجی ختم می‌شود. کنترل‌کننده‌هایی که برپایه نظریه کنترل مدرن و کلاسیک طراحی می‌شوند، عموماً بدون در نظر گرفتن عدم‌قطعیت‌های موجود در سیستم هستند. به‌عنوان یک روش، می‌توان قوام این سیستم‌های کنترلی را بر اساس نظریه کنترل مقاوم و حل مسئله H_∞ بررسی کرد و پایداری سیستم را تضمین کرد. یکی از الگوریتم‌های کنترل فعال جدید معرفی شده براساس نظریه کنترل مدرن، کنترل فعال براساس شرایط میرایی بحرانی است (Rashidi و همکاران، 2021). باتوجه به حساسیت شرایط میرایی بحرانی نسبت به عدم‌قطعیت‌ها، در این پژوهش قوام سیستم کنترلی طراحی شده در این شرایط مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. ازجمله عدم‌قطعیت‌های موجود در سیستم کنترل فعال سازه می‌توان به نامعینی پارامترهای سازه (جرم، سختی و میرایی)، تأخیر زمانی و خطا یا خرابی سنسورها/ محرک‌ها اشاره کرد.

نامعینی پارامترهای سیستم در پژوهش‌های مختلف دارای دسته‌بندی‌های مختلفی هستند. به‌عنوان مثال، (Mao و همکاران، 1998) 4 نوع نامعینی را شرح داده است و به بررسی رفتار سیستم در حضور تأخیر زمانی پرداخته است. این نامعینی‌ها عبارتند از: نامعینی نُرم محدود[1]، نامعینی ساختار محدود[2]، ترکیب خطی از نامعینی پارامتر محدود[3] و نامعینی مقدار محدود[4]. مدل‌سازی تأخیر زمانی در سیستم‌های کنترلی و پایداری سیستم در برابر این نوع عدم‌قطعیت، یکی از مهم‌ترین بخش‌های نظریه کنترل مقاوم است. در پژوهش‌های مختلف، تأخیر زمانی از نوع ثابت و متغیر بررسی شده‌اند (Fridman، 2014؛ Wu و همکاران، 2010).

علاوه‌بر عدم‌قطعیت‌های مذکور، وجود خطا در سنسورها و محرک‌ها نیز محتمل است. طراحی کنترل‌کننده مقاوم در برابر گسیختگی سنسورها و محرک‌ها، به‌عنوان کنترل تحمل‌پذیر خطا (FTC)[5] شناخته می‌شود. رویکرد طراحی کنترل‌کننده تحمل‌پذیر خطا به دو دسته غیرفعال (PFTC)[6] و فعال (AFTC)[7] طبقه‌بندی می‌شوند (Hasan و Amin، 2019). در کنترل تحمل‌پذیر خطای غیرفعال، خطاها به‌صورت آنلاین تشخیص داده نمی‌شوند و فقط تخمینی از خطاها در نظر گرفته می‌شوند. اما در کنترل تحمل‌پذیر خطای فعال، شناسایی و جداسازی خطاها با استفاده از روش FDI انجام می‌شود.

Lin و همکاران، (2007) با استفاده از الگوریتم کنترل H_∞، کنترل‌کننده مناسبی با در نظر گرفتن تأخیر زمانی طراحی کردند و وزن‌دهی مناسبی برای تِرم مربوط به نیروی کنترلی و متغیر حالت در خروجی سیستم پیشنهاد دادند.

Lezgy-Nazargah و همکاران، (2020) با در نظر گرفتن تأخیر زمانی از نوع ثابت و حل مسئله H_∞، کنترل‌کننده‌هایی با فرض فیدبک حالت و فیدبک خروجی دینامیکی طراحی شده است. همچنین با مقایسه این دو کنترل‌کننده نشان داده شده است که کنترل‌کننده با فرض فیدبک حالت به مراتب نتایج بهتری نسبت به فیدبک خروجی دینامیکی به‌دست می‌دهد.

در پژوهش Raji و همکاران، (2021) سازه برشی بلند در برابر گسیختگی سنسورها و عدم‌قطعیت رکورد زلزله مورد بررسی قرار گرفته است و کنترل‌کننده مقاوم در برابر این عدم‌قطعیت‌ها با حل مسئله H_∞ به کمک ناتساوی‌های ماتریسی خطی طراحی شده است.

در (Ding و همکاران، 2013) با در نظر گرفتن نامعینی برای یک پارامتر از فضای حالت به‌همراه خطای موجود در سنسورها، کنترل‌کننده مقاوم برای سازه ساختمانی طراحی شده است.

در پژوهش Du و Zhang، (2008) برای حل مسئله H_∞، علاوه‌بر ناتساوی‌های ماتریسی خطی، از الگوریتم فراتکاملی ژنتیک نیز استفاده شده است؛ به‌طوری‌که تأخیر زمانی به‌عنوان تنها عدم‌قطعیت موجود در سیستم در نظر گرفته شده و با استفاده از الگوریتم ژنتیک، کنترل‌کننده‌ای جهت دستیابی به حداکثر تأخیر زمانی ممکن طراحی شده است. سپس برقراری ناتساوی‌های ماتریسی خطی با این کنترل‌کننده بررسی شده است. درواقع برای طراحی کنترل‌کننده مناسب در برابر تأخیر زمانی، از آنالیز قوام کنترل‌کننده‌های طراحی شده به‌کمک الگوریتم ژنتیک استفاده شده است. عدم‌قطعیت تأخیر زمانی معمولاً در کنترل تحمل‌پذیر خطا در نظر گرفته نمی‌شود و پژوهش‌های محدودی در این زمینه وجود دارد؛ زیرا تأخیر زمانی پیچیدگی زیادی به مسئله اضافه

1. Norm bounded uncertainty
2. Structure bounded uncertainty
3. Parameter bounded uncertainty of linear combination
4. Value bounded uncertainty
5. Fault-tolerant control
6. Passive Fault-tolerant control
7. Active Fault-tolerant control

می‌کند (Cheng و Zhao، 2004). در این پژوهش، قوام کنترل‌کننده طراحی شده براساس شرایط میرایی بحرانی (CD)[1] برای سازه‌های 3 و 8 طبقه با در نظر گرفتن تأخیر زمانی مورد بررسی قرار می‌گیرد. علاوه‌بر عدم‌قطعیت تأخیر زمانی، سایر عدم‌قطعیت‌ها نظیر نامعینی پارامتری، خطای سنسور/ محرک و خرابی محرک‌ها نیز در آنالیز قوام کنترل‌کننده طراحی شده بر اساس شرایط میرایی بحرانی در نظر گرفته می‌شوند.

2- طراحی کنترل‌کننده مقاوم و آنالیز قوام کنترل‌کننده

2-1- معادلات حرکت و عدم‌قطعیت

معادله حرکت سیستم n- درجه آزاد با در نظر گرفتن انواع عدم‌قطعیت‌ها به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$M(t)\ddot{x}(t) + C(t)\dot{x}(t) + K(t)x(t) = \Gamma L(t)u(t-\tau) + \delta\ddot{x}_g \tag{1}$$

که در آن $\ddot{x}(t)$، $\dot{x}(t)$ و $x(t)$ به‌ترتیب بردار ستونی شتاب، سرعت و جابه‌جایی هستند؛ $M(t)$، $K(t)$ و $C(t)$ به‌ترتیب ماتریس‌های n×n جرم، سختی و میرایی هستند که دارای نامعینی با حد بالا و پایین مشخص هستند؛ $u(t-\tau)$ بردار r×1 نیروی کنترلی تأخیردار است که τ و r به‌ترتیب بیانگر مقدار تأخیر زمانی ثابت سیستم کنترلی و تعداد محرک‌ها می‌باشند. Γ ماتریس n×r موقعیت محرک‌ها را نشان می‌دهد؛ δ بیانگر بردار ضریب تأثیر نیروی زلزله، $\ddot{x}_g$ با ابعاد n×1 می‌باشد؛ $L(t) = \mathrm{diag}(l_1(t) \quad l_2(t) \quad \dots \quad l_r(t))$ ماتریس قطری است که خرابی ($l_i(t) = 0$) یا عدم خرابی ($l_i(t) = 1$) محرک‌ها را نشان می‌دهد.

پاسخ‌های سازه با حل معادله دیفرانسیل حاکم بر آن به‌دست می‌آیند. برای حل سیستم‌های پیچیده، از روش‌های مدرن نظیر فضای حالت استفاده می‌شود. با در نظر گرفتن متغیر حالت به‌صورت $q(t) = [x(t) \quad \dot{x}(t)]^T$، معادله (1) می‌تواند به‌صورت معادله (2) در فضای حالت نوشته شود.

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) + B_u(t)L(t)u(t-\tau) + B_w(t)\ddot{x}_g \tag{2}$$

که در آن ضرایب ماتریس‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}(t)K(t) & -M^{-1}(t)C(t) \end{bmatrix}_{2n\times 2n}$$

$$B_u(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(t)\Gamma \end{bmatrix}_{2n\times r}$$

$$B_w(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(t)\delta \end{bmatrix}_{2n\times 1}$$

انحراف از مقادیر میانگین پارامترهای معادله دینامیکی (1) و معادله حالت (2) به‌صورت Δ_M، Δ_K، Δ_C، Δ_A، Δ_{B_u} و Δ_{B_w} در نظر گرفته می‌شوند. جهت طراحی کنترل‌کننده تأخیردار تحمل‌پذیر خطای سنسور/ محرک، نیروی کنترلی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$u(t-\tau) = k\Psi(t)y(t-\tau) \tag{3}$$

که در آن k بهره فیدبک کنترل‌کننده تأخیردار تحمل‌پذیر خطای سنسور/ محرک که بعداً طراحی خواهد شد، می‌باشد. $y(t-\tau)$ خروجی اندازه‌گیری شده تأخیردار است. ماتریس خطای سنسورها/ محرک‌ها در کنترل تحمل‌پذیر خطای غیرفعال، $\Psi(t)$، به‌صورت $\Psi(t) = diag(\psi_1(t) \quad \psi_2(t) \quad \dots)$ که $\underline{\psi_i} \le \psi_i(t) \le \overline{\psi_i}$ می‌باشد، تعریف می‌شود. $\overline{\psi_i}$ و $\underline{\psi_i}$ به‌ترتیب حد بالا و پایین $\psi_i(t)$ را نشان می‌دهند. با فرض خطای تجمعی سنسورها و محرک‌ها به‌عنوان خطای سنسورها، ماتریس $\Psi(t)$ بیانگر ماتریس خطای سنسورها می‌باشد. اگر در سنسور iام، هیچ‌گونه خطایی وجود نداشته باشد، آن‌گاه $\underline{\psi_i} = \overline{\psi_i} = 1$، اما اگر i امین سنسور کاملاً خراب شود، $\underline{\psi_i} = \overline{\psi_i} = 0$ قرار داده می‌شود. ماتریس $\Psi(t)$ به‌صورت زیر محاسبه شود:

$$\Psi(t) = \Psi_{avg}(I + \Theta(t)) \tag{4}$$

که در آن $\Psi_{avg} = diag(\psi_{avg1}(t) \quad \psi_{avg2}(t) \quad \dots)$ و $\Theta(t) = diag(\theta_1(t) \quad \theta_2(t) \quad \dots)$ می‌باشد. مقادیر نامشخص $\psi_{avgi}(t)$ و $\theta_i(t)$ به‌صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\psi_{avgi} = \frac{\underline{\psi}_i + \overline{\psi}_i}{2}, \qquad \theta_i(t) = \frac{\psi_i(t) - \psi_{avgi}}{\psi_{avgi}} \tag{5}$$

2-2- کنترل مقاوم H_∞ برای سازه‌های ساختمانی

روش H_∞ که یکی از روش‌های تئوری کنترل مقاوم است، در طراحی کنترل‌کننده مقاوم در برابر عدم‌قطعیت‌ها نتایج مناسبی از خود نشان داده است. جهت طراحی کنترل‌کننده مقاوم در برابر ارتعاش زلزله، خروجی‌هایی که قرار است کنترل شوند، بایستی مشخص باشند. در معادله (6)، خروجی‌های کنترل برای سیستم کنترلی معرفی شده‌اند.

$$z(t) = C_1q(t) + D_1w(t) + D_2u(t-\tau) \tag{6}$$

در معادله فوق، $w(t)$ بیانگر اغتشاش است و ضرایب C_1، D_1 و D_2 ماتریس‌های ثابت هستند که مقادیر آن‌ها وابسته به مسئله

1. Critically Damped

است. برای مثال، در ساختمانی که جابه‌جایی مطلق طبقه اول قرار است کنترل شود، ضرایب به‌صورت $C_1 = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$، $D_1 = 0$ و $D_2 = 0$ انتخاب می‌شوند. همچنین درصورتی‌که هدف کنترل، صرفاً کنترل نیروی کنترلی (دامنه یا انرژی مصرفی جهت کنترل سازه) باشد، ضرایب به‌صورت $C_1 = 0$ $D_1 = 0$ و $D_2 = I$ در نظر گرفته می‌شوند. به‌طور کلی، سیستم کنترل سازه‌های ساختمانی به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= A(t)q(t) + B_u(t)L(t)u(t-\tau) + B_w(t)w(t) \\ z(t) &= C_1 q(t) + D_1 w(t) + D_2 u(t-\tau) \\ y(t) &= C_2 q(t) \end{aligned} \tag{7}$$

که C_2 ضریب خروجی اندازه‌گیری شده را نشان می‌دهد و متناسب با مسئله انتخاب می‌شود. در سازه‌های تحت ارتعاش زلزله، $w(t) = \ddot{x}_g$ می‌باشد. در این پژوهش، نتایج حاصل از آنالیز قوام کنترل‌کننده طراحی شده براساس شرایط میرایی بحرانی با کنترل‌کننده مقاوم H_∞ مقایسه خواهد شد، پس ضرایب خروجی سیستم به‌صورت $C_1 = I$، $D_1 = D_2 = 0$ و $C_2 = I$ در نظر گرفته می‌شوند؛ زیرا اولاً در شرایط میرایی بحرانی، جابه‌جایی و سرعت بطور طبیعی کمینه می‌شوند و کنترل‌کننده مقاوم H_∞ باید خروجی حالت را کنترل کند، پس $C_1 = I$، ثانیاً در شرایط میرایی بحرانی اثبات می‌شود بهره فیدبک جابه‌جایی صفر است و جهت محاسبه نیروی کنترلی، صرفاً به سنسورهای سرعت نیاز است، پس با فرض $C_2 = I$، کنترل‌کننده مقاوم H_∞ با فرض فیدبک حالت طراحی شده و با کنترل‌کننده در شرایط میرایی بحرانی که با فرض فیدبک کامل سرعت طراحی شده است، مقایسه می‌شود. در نتیجه سیستم کنترلی (7) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= A(t)q(t) + B_u(t)L(t)u(t-\tau) + B_w(t)w(t) \\ z(t) &= q(t) \\ y(t) &= q(t) \end{aligned} \tag{8}$$

در سازه‌های عمرانی تحت ارتعاش زلزله، سیگنال اغتشاش دارای انرژی محدودی است که می‌توان این موضوع را با مقیاس اندازه‌گیری ریشتر توجیه کرد؛ لذا برای بیان انرژی محدود سیگنال اغتشاش می‌توان نوشت:

$$\|w(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty w^T(t)w(t)dt} < \infty \tag{9}$$

که $w(t)$ در فضای $L_2[0,\infty]$ تعریف می‌شود. با محدودسازی انرژی خروجی به انرژی ورودی، تأثیر اغتشاش بر سیستم کنترلی کم می‌شود. بنابراین، نسبت انرژی خروجی به انرژی ورودی، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|T_{zw}\|_\infty = \sup \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \le \gamma \tag{10}$$

که در آن، $\|T_{zw}\|_\infty$ بیانگر نرم H_∞ سیستم کنترلی می‌باشد که به $\gamma > 0$ محدود می‌شود. $\|\cdot\|_2$ به نرم H_2 دلالت دارد و منظور از *sup*، کمترین کران بالا در سرتاسر $w(t)$ می‌باشد. در نهایت شاخص عملکرد H_∞ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_\infty = \int_0^\infty [z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)]dt \tag{11}$$

برای تعیین بهره کنترل تحمل‌پذیر خطا با استفاده از روش H_∞ برای سیستم‌های تأخیردار و نامعین، دو شرط زیر باید برآورده شوند:

1) سیستم حلقه بسته بدون اغتشاش خارجی باید پایدار مجانبی باشد.
2) با وجود اغتشاش خارجی $w(t) \epsilon L_2[0,\infty]$، در سیستم با شرایط اولیه صفر، $\|z(t)\|_2 < \gamma\|w(t)\|_2$ برقرار باشد.

3-2- حل مسئله H_∞ به‌کمک ناتساوی‌های ماتریسی خطی (LMIs)[1]

در این بخش فرمول‌بندی طراحی و آنالیز کنترل‌کننده تحمل‌پذیر خطای سنسور/ محرک برای سیستم تأخیردار و نامعین انجام خواهد شد. قبل از شروع فرمول‌بندی مسئله H_∞، لِم‌های مورد نیاز در حل مسئله معرفی می‌شوند.

لِم1: برای ماتریس‌های $X \epsilon \mathbb{R}^{n_a \times n_b}$، $Y \epsilon \mathbb{R}^{n_a \times n_b}$، $P_2 \epsilon \mathbb{R}^{n_a \times n_b}$، $\chi \epsilon \mathbb{R}^{n_a \times n_b}$ و بردارهای $a(\cdot) \epsilon \mathbb{R}^{n_a}$ و $b(\cdot) \epsilon \mathbb{R}^{n_b}$ که در بازه Ω تعریف شده‌اند، ناتساوی زیر برقرار است:

$$-2\int_\Omega a^T(\alpha)\chi b(\alpha)d\alpha \le \int_\Omega \begin{bmatrix} a(\alpha) \\ b(\alpha) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y-\chi \\ Y^T-\chi^T & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(\alpha) \\ b(\alpha) \end{bmatrix} d\alpha$$

به‌طوری‌که:

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & P_2 \end{bmatrix} > 0$$

لِم2 (متمم شِر): با فرض ماتریس‌های متقارن Ω_1 و Ω_2 درناتساوی ماتریسی غیرخطی $\Omega_1 + \Omega_2\Omega_3^{-1}\Omega_2^T < 0$ بطوری‌که $\Omega_3 > 0$ باشد، ناتساوی ماتریسی خطی معادل به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ \Omega_2^T & -\Omega_3 \end{bmatrix} < 0$$

1. Linear Matrix Inequalities

لم3: برای ماتریس‌های حقیقی با ابعاد مناسب D، S و F به‌طوری‌که $F^T F \leq I$، ناتساوی زیر برای هر $\varepsilon > 0$ برقرار است:

$$(DFS) + (DFS)^T \leq \varepsilon^{-1} D D^T + \varepsilon S^T S$$

با فرض فیدبک کنترلی $u(t-\tau) = k\Psi(t)C_2 q(t-\tau)$، سیستم (8) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} &\dot{q}(t) = A(t)q(t) + B_u(t)\bar{L}k\bar{\Psi}C_2 q(t-\tau) + B_w(t)w(t) \\ &z(t) = q(t) \\ &q(t) = \phi(t) \end{aligned} \tag{12}$$

که در آن $\Phi(t)$ به ازای $t\epsilon[-\tau, 0]$ بیانگر شرایط اولیه سیستم است. $\bar{L}$ و $\bar{\Psi}$ به وضعیت سنسورها و محرک‌ها که قرار است طراحی برای آن انجام شود، دلالت دارد. با استفاده از فرمول نیوتن- لیبنیز، معادله حالت سیستم (12) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} &\dot{q}(t) = (A(t) + B_u(t)\bar{L}k\bar{\Psi}C_2)q(t) - \\ &B_u(t)\bar{L}k\bar{\Psi}C_2 \int_{t-\tau}^{t} \dot{q}(\theta)d\theta + B_w(t)w(t) \end{aligned} \tag{13}$$

برای تضمین پایداری سیستم و بررسی برقراری دو شرط بیان شده در بخش قبل، تابع لیاپانوف به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$V(q,t) = V_1(q,t) + V_2(q,t) + V_3(q,t) \tag{11}$$

که در آن $V_{1-3}(q,t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} &V_1(q,t) \triangleq q^T(t)P_1 q(t) \\ &V_2(q,t) \triangleq \int_{-\tau}^{0}\int_{t+\alpha}^{t} \dot{q}^T(\beta)P_2\dot{q}(\beta)d\alpha d\beta \\ &V_3(q,t) \triangleq \int_{t-\tau}^{t} q^T(\beta)P_3 q(\beta)d\beta \end{aligned}$$

ماتریس‌های P_1، P_2 و P_3 در توابع لیاپانوف، ماتریس‌های مثبت معین هستند که در حل ناتساوی‌های ماتریسی باید به‌طور مناسب انتخاب شوند. با معادل‌سازی $a(\cdot)$ با $q(t)$ و $b(\cdot)$ با $\dot{q}(t)$ و استفاده از لم 1، حد بالای مشتق تابع $V_1(q,t)$ با فرض $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ و $\chi \triangleq P_1 B_u(t)\bar{L}\, k\bar{\Psi}C_2$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\dot{V}_1(q,t) \leq q^T(t)[A^T(t)P_1 + P_1A(t) + \tau X + Y^T + Y]q(t) + \\ &2q^T(t)[P_1B_u(t)\bar{L}k\bar{\Psi}C_2 - Y]q(t-\tau) + w^T(t)B_w^T P_1 q(t) + \\ &q^T(t)P_1B_w(t)w(t) + \int_{t-\tau}^{t}\dot{q}^T(\alpha)P_2\dot{q}(\alpha)d\alpha \end{aligned} \tag{15}$$

توجه شود که در استفاده از لم 1، شرط برقراری ناتساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & P_2 \end{bmatrix} > 0$ الزامی است. همچنین حد بالای مشتق تابع $V_2(q,t)$ و مشتق تابع $V_3(q,t)$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} &\dot{V}_2(q,t) \leq \bar{\tau}[A(t)q(t) + B_u(t)\bar{L}k\bar{\Psi}C_2 q(t-\tau) \\ &+B_w(t)w(t)]^T P_2[A(t)q(t) + B_u(t)\bar{L}k\bar{\Psi}C_2 q(t-\tau) \\ &+B_w(t)w(t)] - \int_{t-\tau}^{t}\dot{q}^T(\alpha)P_2\dot{q}(\alpha)d\alpha \end{aligned} \tag{16}$$

$$\dot{V}_3(q,t) = q^T(t)P_3q(t) - q^T(t-\tau)P_3q(t-\tau) \tag{17}$$

در نتیجه حد بالای مشتق تابع لیاپانوف محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} &\dot{V}(q,t) = \dot{V}_1(q,t) + \dot{V}_2(q,t) + \dot{V}_3(q,t) \leq \\ &q^T(t)[A^T(t)P_1 + P_1A(t) + \tau X + Y^T + Y]q(t) + \\ &2q^T(t)[P_1B_u(t)\bar{L}k\bar{\Psi}C_2 - Y]q(t-\tau) + \\ &w^T(t)B_w^T P_1 q(t) + q^T(t)P_1B_w(t)w(t) + \\ &\bar{\tau}[A(t)q(t) + B_u(t)\bar{L}k\bar{\Psi}C_2 q(t-\tau) + \\ &B_w(t)w(t)]^T P_2[A(t)q(t) + B_u(t)\bar{L}k\bar{\Psi}C_2 q(t-\tau) \\ &+B_w(t)w(t)] + q^T(t)P_3q(t) - q^T(t-\tau)P_3q(t-\tau) \end{aligned} \tag{18}$$

با در نظر گرفتن شرایط اولیه صفر، $V(q(t))|_{t=0} = 0$، و مثبت معین بودن تابع لیاپانوف، شاخص عملکرد H_∞ به‌صورت معادله (19) نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} &J_\infty \leq \int_0^\infty [z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)]dt + V(q(t))\big|_{t=\infty} - \\ &V(q(t))\big|_{t=0} = \int_0^\infty [z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)]dt + \\ &\dot{V}(q(t)) = \int_0^\infty \Sigma^T(t)\Pi\Sigma(t)dt \end{aligned} \tag{19}$$

که در آن $\Sigma(t) = [q(t) \quad q(t-\tau) \quad w(t)]^T$ و Π به‌صورت معادله (20) می‌شود. با فرض حالت بدون اغتشاش (شرط 1)، اگر $\Pi(t) < 0$ باشد، باتوجه به $\dot{V}(q,t) < 0$، پایداری مجانبی سیستم تضمین می‌شود. همچنین با فرض $w(t)\epsilon L_2[0,\infty]$ و $\Pi(t) < 0$، $J_\infty < 0$ برقرار است و $[\![z(t)]\!]_2 < \gamma[\![w(t)]\!]_2$ نتیجه می‌شود. ناتساوی ماتریسی غیرخطی $\Pi(t) < 0$، با استفاده از لم 2، به ناتساوی خطی به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\Pi(t) = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & P_1B_u(t)\bar{L}k\bar{\Psi}C_2 - Y + \bar{\tau}A^T(t)P_2B_u(t)\bar{L}k\bar{\Psi}C_2 & P_1B_w(t) + \bar{\tau}A^T(t)P_2B_w(t) \\ * & \bar{\tau}C_2^T\bar{\Psi}^T k^T\bar{L}^T B_u^T(t)P_2B_u(t)\bar{L}k\bar{\Psi}C_2 - P_3 & \bar{\tau}C_2^T\bar{\Psi}^T k^T\bar{L}^T B_u^T(t)P_2B_w(t) \\ * & * & -\gamma^2 I + \bar{\tau}B_w^T(t)P_2B_w(t) \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$\Lambda_1 = A^T(t)P_1 + P_1A(t) + \bar{\tau}X + Y^T + Y + \bar{\tau}A^T(t)P_2A(t) + I + P_3$$

$$\Pi_1(t)=\begin{bmatrix}\Lambda_2 & P_1B_u(t)\bar{L}k\bar{\Psi}C_2-Y & P_1B_w(t) & \bar{\tau}A^T(t)P_2 & I\\ * & -P_3 & 0 & \bar{\tau}C_2^T\bar{\Psi}^Tk^T\bar{L}^TB_u^T(t)P_2 & 0\\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{\tau}B_w^T(t)P_2 & 0\\ * & * & * & -\bar{\tau}P_2 & 0\\ * & * & * & * & -I\end{bmatrix}<0 \tag{21}$$

$$\Lambda_2=A^T(t)P_1+P_1A(t)+\bar{\tau}X+Y^T+Y+P_3$$

به‌ترتیب با ضرب از سمت چپ و راست ماتریس قطری $diag(P_1^{-1}\quad P_1^{-1}\quad I\quad P_2^{-1}\quad I)^T$ و ترانهاده آن در $\Pi_1(t)$، ماتریس $\Pi_2(t)$ به‌دست می‌آید که در آن ماتریس T برابر با معکوس ماتریس P_1 می‌باشد. با جایگذاری و تغییر متغیر به‌صورت $Q\triangleq TXT$، $N\triangleq TYT$، $W\triangleq TP_3T$، $V=\bar{L}k\bar{\Psi}C_2T$ و $R=-P_2^{-1}$ در $\Pi_2(t)$، ناتساوی ماتریسی $\Pi_3(t)<0$ به‌دست می‌آید.

$$\Pi_2(t)=\begin{bmatrix}\Lambda_3 & B_u(t)\bar{L}k\bar{\Psi}C_2T-TYT & B_w(t) & \bar{\tau}TA^T(t) & T\\ * & -TP_3T & 0 & \bar{\tau}TC_2^T\bar{\Psi}^Tk^T\bar{L}^TB_u^T(t) & 0\\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{\tau}B_w^T(t) & 0\\ * & * & * & -\bar{\tau}P_2^{-1} & 0\\ * & * & * & * & -I\end{bmatrix}<0 \tag{22}$$

$$\Lambda_3=TA^T(t)+A(t)T+\bar{\tau}TXT+TY^TT+TYT+TP_3T$$

$$\Pi_3(t)=\begin{bmatrix}TA^T(t)+A(t)T+\bar{\tau}Q+N^T+N+W & B_u(t)V-N & B_w(t) & \bar{\tau}TA^T(t) & T\\ * & -W & 0 & \bar{\tau}V^TB_u^T(t) & 0\\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{\tau}B_w^T(t) & 0\\ * & * & * & -\bar{\tau}R & 0\\ * & * & * & * & -I\end{bmatrix}<0 \tag{23}$$

همچنین با پیش‌ضرب و پس‌ضرب ماتریس قطری $diag(T\quad T)^T$ در ناتساوی $\begin{bmatrix}X & Y\\ Y^T & P_2\end{bmatrix}>0$، ناتساوی ماتریسی (24) به‌دست می‌آید. ناتساوی ماتریسی به‌دست آمده به‌دلیل وجود عبارت $TR^{-1}T$ خطی نیست. با فرض $T=R^{-1}$ جهت سادگی مسئله، می‌توان به حل نسبتاً بهینه به‌جای بهینه دست یافت (Moon و همکاران، 2001). پس ناتساوی ماتریسی خطی (25) به‌جای ناتساوی ماتریسی غیرخطی (24) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{bmatrix}Q & N\\ N^T & TR^{-1}T\end{bmatrix}>0 \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix}Q & N\\ N^T & T\end{bmatrix}>0 \tag{25}$$

ماتریس $\Pi_3(t)$ از دو بخش معین و نامعین به‌صورت زیر تشکیل شده است. در بخش معین ماتریس، Π_3، مقادیر اسمی پارامترها و در بخش نامعین ماتریس، $\Delta\Pi_3$، مقادیر انحراف پارامترها از مقادیر اسمی در نظر گرفته شده‌اند.

$$\Pi_3(t)=\Pi_3+\Delta\Pi_3(t) \tag{26}$$

$$\Pi_3=\begin{bmatrix}TA^T+AT+\bar{\tau}Q+N^T+N+W & B_uV-N & B_w & \bar{\tau}TA^T & T\\ * & -W & 0 & \bar{\tau}V^TB_u^T & 0\\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{\tau}B_w^T & 0\\ * & * & * & -\bar{\tau}R & 0\\ * & * & * & * & -I\end{bmatrix}<0 \tag{27}$$

$$\Delta\Pi_3(t) = \begin{bmatrix} T\Delta A^T + \Delta A T & \Delta B_u V & \Delta B_w & \bar{\tau} T \Delta A^T & 0 \\ * & 0 & 0 & \bar{\tau} V^T \Delta B_u{}^T & 0 \\ * & * & 0 & \bar{\tau} \Delta B_w^T & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 \end{bmatrix} < 0 \tag{28}$$

در این پژوهش، نامعینی پارامترها از نوع ساختار محدود فرض می‌شوند. لذا ماتریس نامعینی پارامترها به‌صورت رابطه (29) نوشته می‌شود که در آن $F_A \epsilon \mathbb{R}^{2\,n\times n}$، $F_u \epsilon \mathbb{R}^{2\,n\times r}$، $F_w \epsilon \mathbb{R}^{2\,n\times 1}$، $O_A \epsilon \mathbb{R}^{n\times 2\,n}$، $O_u \epsilon \mathbb{R}^{r\times r}$ و $O_w \epsilon \mathbb{R}^{1\times 1}$ می‌باشد. $\delta_1(t)$ ماتریس نامعین قطری $diag([\delta_A]_{n\times n} \quad [\delta_u]_{r\times r} \quad [\delta_w]_{1\times 1})$ می‌باشد که شرایط $\delta_1^T(t)\delta_1(t) \le I$ را برآورده می‌سازد.

$$\begin{bmatrix} \Delta A(t) \\ \Delta B_u(t) \\ \Delta B_w(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} F_A & F_u & F_w \end{bmatrix} \delta_1(t) \begin{bmatrix} O_A & 0 & 0 \\ 0 & O_u & 0 \\ 0 & 0 & O_w \end{bmatrix} \tag{29}$$

با استفاده از لم 3، حد بالای بخش نامعین ماتریس $\Pi_3(t)$ به‌دست می‌آید. بدیل تولید ناتساوی‌های ماتریسی غیرخطی در استفاده از این لِم، از لِم 2 جهت تبدیل ناتساوی‌های ماتریسی غیرخطی به خطی استفاده می‌شود. بدین‌ترتیب، ناتساوی ماتریسی خطی (30) به‌دست می‌آید که درصورت برقراری آن به‌همراه سایر ناتساوی‌های به‌دست آمده، پایداری سیستم تضمین می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & B_u V - N & B_w & \bar{\tau} T A^T & T & T O_A^T & 0 & 0 & \bar{\tau} T O_A^T & 0 & 0 \\ * & -W & 0 & \bar{\tau} V^T B_u{}^T & 0 & 0 & V^T O_u^T & 0 & 0 & \bar{\tau} V^T O_u^T & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{\tau} B_w^T & 0 & 0 & 0 & O_w^T & 0 & 0 & \bar{\tau} O_w^T \\ * & * & * & \Xi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_3 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\bar{\tau}\varepsilon_4 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\bar{\tau}\varepsilon_5 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\bar{\tau}\varepsilon_6 I \end{bmatrix} < 0 \tag{30}$$

$$\Xi_1 = TA^T + AT + \bar{\tau} Q + N^T + N + W + \varepsilon_1 F_A F_A^T + \varepsilon_2 F_u F_u^T + \varepsilon_3 F_w F_w^T$$

$$\Xi_2 = -\bar{\tau} T + \bar{\tau}\varepsilon_4 F_A F_A^T + \bar{\tau}\varepsilon_5 F_u F_u^T + \bar{\tau}\varepsilon_6 F_w F_w^T$$

ناتساوی ماتریسی خطی (30) جهت طراحی کنترل‌کننده مقاوم استفاده می‌شود. با حل ناتساوی و به‌دست آوردن ماتریس V، ماتریس بهره کنترل تحمل‌پذیر خطا برای سیستم تأخیردار و دارای نامعینی پارامتری به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$k = \bar{L}^{-1} V T^{-1} C_2^{-1} \bar{\Psi}^{-1} \tag{31}$$

با معلـوم بودن ماتریس بهره، k، نیازی به تغییـر متغیر $V = \bar{L} k \bar{\Psi} C_2 T$ جهت حل مسئله وجود ندارد. در این حالت آنالیز قوام سیستم با کنترل‌کننده معین انجام می‌شود و تأخیر ممکن برای سیستم کنترلی با حل مسئله تضمین پایداری سیستم، به‌دست می‌آید. در نتیجه، ناتساوی ماتریسی خطی (31) جهت آنالیز قوام به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & B_u\bar{L}k\bar{\Psi}C_2T-N & B_w & \bar{\tau}TA^T & T & TO_A^T & 0 & 0 & \bar{\tau}TO_A^T & 0 & 0 \\ * & -W & 0 & \bar{\tau}TC_2{}^T\bar{\Psi}^Tk^T\bar{L}^TB_u{}^T & 0 & 0 & TC_2{}^T\bar{\Psi}^Tk^T\bar{L}^TO_u^T & 0 & 0 & \bar{\tau}TC_2{}^T\bar{\Psi}^Tk^T\bar{L}^TO_u^T & 0 \\ * & * & -\gamma^2I & \bar{\tau}B_w^T & 0 & 0 & 0 & O_w^T & 0 & 0 & \bar{\tau}O_w^T \\ * & * & * & \Xi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_1I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_3I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\bar{\tau}\varepsilon_4I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\bar{\tau}\varepsilon_5I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\bar{\tau}\varepsilon_6I \end{bmatrix} < 0 \qquad (32)$$

الگوریتم‌های بهینه‌سازی به‌کار رفته برای حل ناتساوی‌های ماتریسی در نرم‌افزار MATLAB، نسبت به تعداد ورودی‌ها، متغیرهای حالت و مجهولات حساس هستند؛ به‌طوری‌که نرخ رشد پیچیدگی زمان از مرتبه $O^{6.5}$ و نرخ رشد پیچیدگی حافظه از مرتبه O^4 می‌باشد و قادر به حل حداکثر چند صد متغیر می‌باشد (Zhang و Lavaei، 2018). لذا باتوجه به ناتساوی‌های به‌دست آمده در این پژوهش، محدودیت‌هایی در استفاده از برخی حل‌کننده‌ها وجود دارد و حل ناتساوی‌های ماتریسی Large و Sparse که در این پژوهش به‌دست آمد، با مشکل مواجه می‌شود. جهت حل این مشکل، از جعبه ابزار Yalmip و حل‌کننده ®Mosek جهت به‌دست آوردن نتایج نسبتاً بهینه در حل ناتساوی‌های ماتریسی خطی استفاده می‌شود (Lofberg، 2004). این جعبه ابزار برای نرم‌افزار MATLAB تهیه شده است. اگرچه این جعبه ابزار نیز حساس به نرخ رشد پیچیدگی است، اما قادر به حل مسئله به‌صورت نسبتاً بهینه می‌باشد. در بخش‌های بعدی نشان داده خواهد شد که علی‌رغم حل نسبتاً بهینه ناتساوی‌های ماتریسی خطی، نتایج به‌دست آمده منطقی و مناسب هستند.

3- مثال‌های عددی

در این بخش دو سازه 3 و 8 طبقه جهت بررسی و مقایسه کنترل‌کننده H_∞ و کنترل‌کننده طراحی شده براساس شرایط میرایی بحرانی در نظر گرفته می‌شوند. پارامترهای جرم، سختی و میرایی سازه 3 طبقه مجهز به تاندون‌های فعال در تمامی طبقات به‌ترتیب 100 ton، 125/66 KN.s/m و 15791 KN/m فرض می‌شوند. همچنین این پارامترها برای سازه 8 طبقه مجهز به تاندون‌ها فعال در تمامی طبقات به‌ترتیب 155/6 ton، 1097/7 KN.s/m و 153333 KN/m درنظر گرفته می‌شوند. در این سازه‌ها، مشخصات تمامی طبقات یکسان می‌باشند. در این پژوهش، جهت بررسی عملکرد سازه‌ها با سیستم کنترلی فعال تحت ارتعاش زلزله، از زلزله ساختگی استفاده می‌شود. یکی از دلایل استفاده از زلزله ساختگی، قابلیت به‌دست آوردن رکورد زلزله با گام‌های زمانی کوچک است. این موضوع زمانی اهمیت پیدا می‌کند که هدف، رصد پاسخ‌های سیستم در حضور عدم‌قطعیت تأخیر زمانی است. شبیه‌سازی حرکت زمین یا به‌عبارتی زلزله ساختگی با استفاده از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\ddot{X}_{ns} = e(t)\ddot{X}_s \qquad (33)$$

در رابطه فوق، $\ddot{X}_{ns}$، $\ddot{X}_s$ و $e(t)$ به‌ترتیب فرایند تصادفی غیرثابت، فرایند تصادفی ثابت و تابع پوش غیر منفی هستند. فرایند تصادفی ثابت، $\ddot{X}_s$، فرایندی با میانگین صفر و تابع چگالی طیف توان $S(\omega)$ می‌باشد. تابع چگالی طیف توان می‌تواند توصیف کننده محتوای فرکانسی حرکت زمین باشد. با میانگین‌گیری از توابع منفرد چگالی طیف توان، می‌توان به تابع چگالی طیف توان با خصوصیات هموار دست پیدا کرد. کانای[1] و تاجیمی[2] یک مدل سه پارامتری برای چگالی طیف توان با استفاده از میانگین تعداد محدودی رکورد حرکات زمین ارائه دادند. تابع چگالی طیف توان کانای-تاجیمی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$S(\omega) = S_0 \frac{1+4\zeta_g^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_g}\right)^2}{\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_g}\right)^2\right)^2 + 4\zeta_g^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_g}\right)^2} \qquad (34)$$

پارامترهای S_0، ζ_g و ω_g به‌ترتیب شدت طیف حرکت زمین، نسبت میرایی و فرکانس غالب حرکت زمین هستند. با در نظر گرفتن پارامترهای مختلف تأثیرگذار در حرکت زمین، روش‌ها و مقادیر مختلفی برای محاسبه شدت طیف حرکت زمین پیشنهاد شده است. برای سازه‌های کنترل شده با استفاده از میز لرزان، مقایر زیر برای محاسبه S_0 پیشنهاد شده است (Cheng، 2008).

1. Kanai

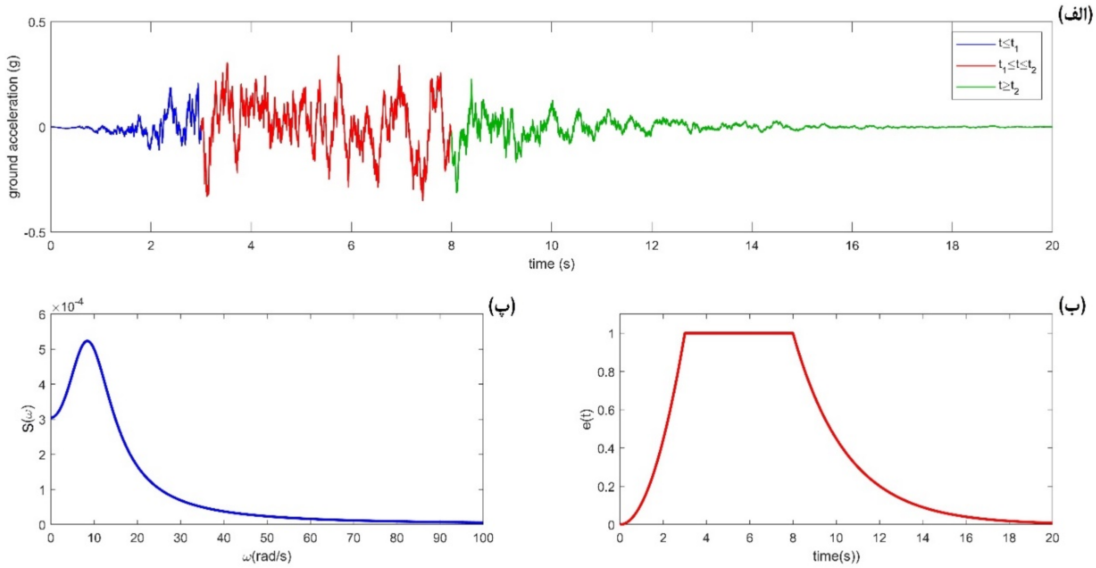
2. Tajimi

$$\begin{cases} S_0 = \dfrac{0.03\zeta_g}{\pi\omega_g(4\zeta_g^2+1)}g^2.s \\ 0.3 \le \zeta_g \le 0.75 \\ 20 \le \omega_g \le 120\ {}^{rad}\!/_{s} \end{cases} \tag{35}$$

برای استفاده از رابطه (34) جهت محاسبه شدت طیف حرکت زمین، مقادیر نسبت میرایی و فرکانس غالب حرکت زمین با فرض خاک نرم به‌ترتیب 0/65 و 10/5 rad/s در نظر گرفته می‌شوند (Palazzo و Petti، 1997). تابع پوش جهت مدل‌سازی حرکت زمین فرض می‌شود از سه بخش تشکیل شده است که بخش اول به‌صورت درجه دوم و صعودی، بخش دوم به‌صورت ثابت و بخش سوم به‌صورت نمایی و نزولی می‌باشد (Aldemir و همکاران، 2012). زمان‌های t_1 و t_2 به‌صورت دلخواه و مناسب باید انتخاب شوند که در این پژوهش به‌ترتیب 3 و 8 ثانیه فرض شده‌اند. همچنین ضریب c_g که بیانگر شدت کاهش میرایی است، برابر با 0/4 $\frac{1}{s}$ در نظر گرفته می‌شود.

$$e(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{t}{t_1}\right)^2 & 0 \le t \le t_1 \\ 1 & t_1 < t < t_2 \\ e^{-c_g(t-t_2)} & t_2 < t \end{cases} \tag{36}$$

در شکل (1)، تاریخچه زمانی شتاب زلزله ساختگی مقیاس شده به 0/35g، تابع پوش و تابع چگالی طیف توان نشان داده شده است. در این پژوهش، نسبت انرژی خروجی به ورودی (γ) ثابت و برابر با 20 در نظر گرفته شده است. همچنین فرض شده است که پارامترهای نامعین و خطای سنسور/محرک توزیع یکنواخت دارند.



شکل 1- مشخصات رکورد زلزله ساختگی: الف) تاریخچه زمانی شتاب زلزله، ب) تابع پوش (e(t، پ) تابع چگالی طیف توان

3-1- کارایی الگوریتم کنترل فعال براساس شرایط میرایی بحرانی

روش کنترل فعال براساس شرایط میرایی بحرانی به‌عنوان یک روش سودمند و ساده در محاسبه نیروی کنترلی مورد نیاز سازه محسوب می‌شود. در این روش نیازی به انتخاب ماتریس‌های وزنی با هدف کمینه‌سازی شاخص عملکرد نیست. از طرفی بدون نیاز به حل معادلات ماتریسی غیرخطی ریکاتی، ماتریس بهره سیستم کنترلی محاسبه می‌شود. در جدول (1) و (2) مقایسه مقادیر ماکزیمم جابه‌جایی و سرعت طبقات و نیروی کنترلی محرک‌ها برای روش مذکور و روش کنترل فعال بهینه ریکاتی (ROAC)[1] با فرض عدم حضور نامعینی‌ها نمایش داده شده است. ماتریس وزنی متغیر حالت (Q) و ماتریس وزنی نیروی کنترلی (R) برای سازه‌های 3 و 8 طبقه به‌صورت زیر انتخاب شده‌اند:

$$Q_{3-story} = Q_{8-story} = I_{2n\times 2n}$$
$$R_{3-story} = 10R_{8-story} = 10^{-7} \times I_{r\times r}$$

3-2- بررسی تأثیر عدم‌قطعیت پارامتری بر تأخیر زمانی ممکن و مجاز

وجود تأخیر زمانی در سیستم‌های کنترلی، کارایی آن‌ها را کاهش می‌دهد. افزایش تأخیر زمانی می‌تواند موجب ناپایداری سیستم شود؛ لذا بررسی عملکرد سیستم‌های کنترلی طراحی شده در حضور تأخیر زمانی یک امر ضروری است. تأخیر زمانی در

1. Ricatti Optimal Active Control

سیستم به دو صورت مورد بررسی قرار می‌گیرد: تأخیر زمانی ممکن و تأخیر زمانی مجاز. تأخیر زمانی ممکن (τ_f)، حداکثر تأخیر زمانی است که حل ناتساوی‌های ماتریسی خطی با در نظر گرفتن آن تأخیر، میسر شده است. دقت سنجش این تأخیر در دست طراح یا پژوهشگر است که در این پژوهش، دقت تأخیر زمانی ممکن 0/1 میلی‌ثانیه در نظر گرفته شده است. تأخیر زمانی مجاز (τ_a)، حداکثر تأخیر زمانی است که در تحلیل سازه، ناپایداری سازه رخ نداده است. دقت سنجش این تأخیر برخلاف تأخیر زمانی ممکن، در دست طراح یا پژوهشگر نیست و گام‌های زمانی رکورد مورد نظر، تعیین کننده است که در نظر گرفتن رکورد زلزله ساختگی، رصد دقیق‌تر تأثیر تأخیر زمانی با دقت 1 میلی‌ثانیه را ممکن ساخته است. لازم به‌ذکر است درون‌یابی شتاب حرکت زمین توصیه نمی‌شود. کارایی طراحی کنترل‌کننده H_∞ با استفاده از ناتساوی‌های ماتریسی خطی با برقراری $\tau_a \geq \tau_f$ اثبات می‌شود. در واقع کنترل‌کننده H_∞، پایداری سیستم را برای تأخیر زمانی ممکن تضمین می‌کند و تا تأخیر زمانی مجاز، پایداری سیستم حفظ می‌شود.

شکل (2)، تأثیر نامعینی پارامتری بر تأخیر زمانی را برای کنترل‌کننده طراحی شده با روش H_∞ و کنترل‌کننده طراحی شده براساس شرایط میرایی بحرانی نشان می‌دهد. در این پژوهش، منظور از عبارت (H_∞)، روش H_∞ و منظور از عبارت (CD)، روش میرایی بحرانی است. مطابق این شکل مشاهده می‌شود که در طراحی کنترل‌کننده H_∞، مقادیر تأخیر زمانی مجاز بیشتر از تأخیر زمانی ممکن به‌دست آمده است و این روش به‌خوبی پایداری سیستم را تضمین می‌کند. برای سیستم طراحی شده براساس روش H_∞، مقادیر تأخیر زمانی مجاز و ممکن با افزایش درصد انحراف پارامترهای جرم، سختی و میرایی از مقادیر میانگین پارامترها، روند کلی نزولی دارند. درواقع افزایش درصد نامعینی پارامتری موجب کاهش مقادیر تأخیر زمانی می‌شود، اما لزوماً روند آن نزولی اکید نیست. همچنین در حالت کلی، تأخیر زمانی مجاز برای کنترل‌کننده H_∞ بیشتر از تأخیر زمانی مجاز برای کنترل‌کننده طراحی شده براساس شرایط میرایی بحرانی به‌دست آمده است. دلیل این موضوع در نظر گرفتن تأخیر زمانی در طراحی کنترل‌کننده مقاوم H_∞ است. البته در درصدهای بالاتر نامعینی پارامتری، این موضوع می‌تواند معکوس باشد. مطابق این شکل مشاهده می‌شود که تا 15% انحراف پارامترها از مقادیر میانگین، مقادیر تأخیر زمانی مجاز در سیستم کنترلی براساس شرایط میرایی بحرانی تغییر نکرده است و در برابر عدم‌قطعیت پارامترهای سیستم مقاومت خوبی نشان داده است.

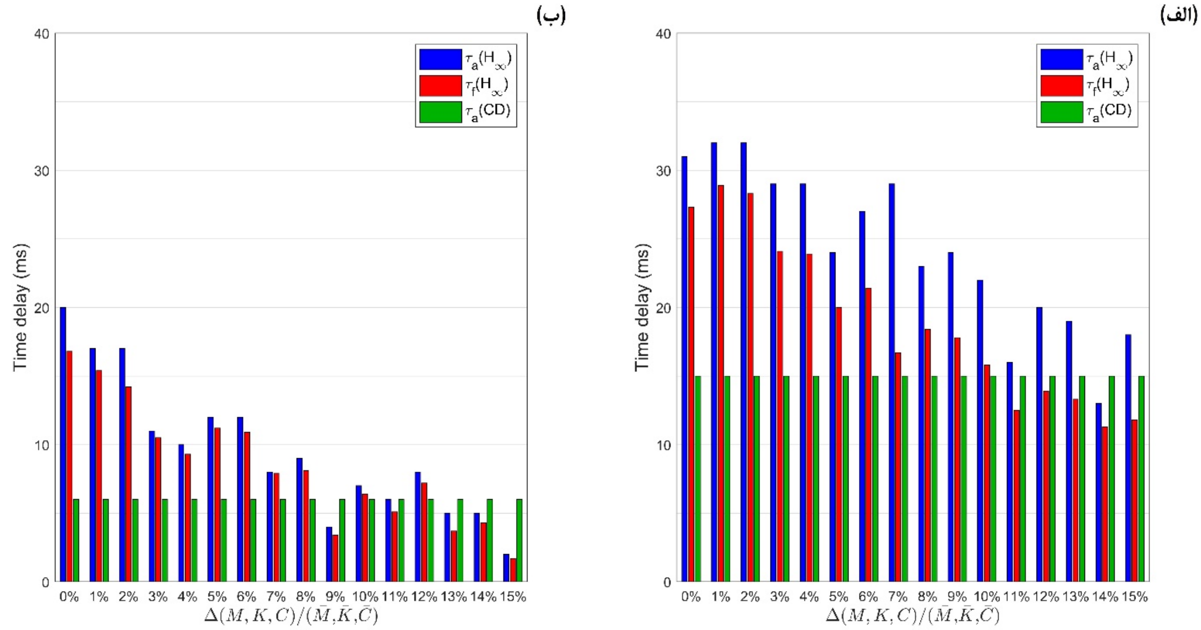
یکی از مشکلات سیستم‌های کنترل متمرکز در حضور عدم‌قطعیت‌ها، حساسیت کنترل‌کننده طراحی شده نسبت به افزایش تعداد طبقات است. در این شکل واضح است که با افزایش تعداد طبقات از 3 به 8، مقادیر تأخیر زمانی ممکن و مجاز کاهش یافته‌اند. همچنین مطابق این شکل، اگرچه کنترل‌کننده H_∞ به‌صورت نسبتاً بهینه طراحی شده است، اما نتایج مناسبی در مقایسه با کنترل‌کننده فعال براساس شرایط میرایی بحرانی دارد.

جدول 1- مقایسه پاسخ‌های سازه 3 طبقه در روش CD و ROAC

طبقه	روش CD			روش ROAC		
	حداکثر جابه‌جایی طبقه (cm)	حداکثر سرعت طبقه (cm/s)	حداکثر نیروی کنترلی (KN)	حداکثر جابه‌جایی طبقه (cm)	حداکثر سرعت طبقه (cm/s)	حداکثر نیروی کنترلی (KN)
1	3/52	14/77	717/15	2/64	12/20	740/33
2	5/81	22/7	527/99	4/64	18/41	514/26
3	6/94	26/65	274/81	5/87	21/26	260/81

جدول 2- مقایسه پاسخ‌های سازه 8 طبقه در روش CD و ROAC

طبقه	روش CD			روش ROAC		
	حداکثر جابه‌جایی طبقه (cm)	حداکثر سرعت طبقه (cm/s)	حداکثر نیروی کنترلی (KN)	حداکثر جابه‌جایی طبقه (cm)	حداکثر سرعت طبقه (cm/s)	حداکثر نیروی کنترلی (KN)
1	1/54	6/98	2904/2	1/47	6/88	2896/9
2	2/87	12/64	2710/0	2/74	12/44	2701/0
3	4/00	17/02	2422/6	3/82	16/75	2397/0
4	4/94	20/33	2089/0	4/70	20/01	2066/9
5	5/68	22/82	1713/6	5/40	22/40	1691/3
6	6/24	24/83	1305/8	5/92	24/17	1289/1
7	6/60	26/13	879/04	6/26	25/43	867/67
8	6/79	26/78	441/75	6/44	26/05	436/1



شکل 2 - تأثیر نامعینی پارامتری بر تأخیر زمانی ممکن و مجاز: الف) سازه برشی 3 طبقه، ب) سازه برشی 8 طبقه

3-3- بررسی حضور هم‌زمان عدم‌قطعیت‌های پارامتری، تأخیر زمانی و خطای سنسور/ محرک

نتایج به‌دست آمده در بخش قبل، با فرض عدم گسیختگی سنسورها می‌باشد. در این بخش، مقادیر تأخیر زمانی مجاز در حضور گسیختگی سنسورها و نامعینی پارامتری بررسی می‌شوند. در شکل (3) و (4)، مقدار تأخیر مجاز با فرض گسیختگی میانگین سنسورها/ محرک‌ها به‌میزان 0 تا 40 درصد و انحراف از گسیختگی میانگین به‌میزان 0 تا 10 درصد برای نامعینی پارامتری 0 و 5 درصد مشخص شده است. مطابق نتایج روش H_∞، با افزایش میزان گسیختگی میانگین سنسورها/ محرک‌ها مقدار تأخیر زمانی مجاز افزایش یافته است. درواقع افزایش گسیختگی میانگین سنسورها/ محرک‌ها، تأثیر نامطلوب بر تأخیر زمانی ندارد و کنترل‌کننده‌های طراحی شده مناسب ارزیابی می‌شوند. مطابق نتایج روش CD، مقدار تأخیر زمانی مجاز با وجود تغییر میزان گسیختگی میانگین سنسورها/ محرک‌ها، ثابت باقی‌می‌ماند و کنترل‌کننده طراحی شده در حضور عدم‌قطعیت‌ها، مقاومت خوبی از خود نشان می‌دهد. از طرفی مطابق نتایج کنترل‌کننده‌های H_∞ و CD، با افزایش میزان انحراف از گسیختگی سنسورها/ محرک‌ها، مقادیر تأخیر زمانی مجاز تغییر نمی‌کنند و کنترل‌کننده‌ها حساسیت چندانی نسبت به افزایش انحراف از میانگین گسیختگی سنسورها/ محرک‌ها ندارند. همچنین در این دو شکل، کاهش تأخیر زمانی مجاز با افزایش درصد نامعینی پارامتری در حضور خطای سنسورها/ محرک‌ها نتیجه می‌شود که با نتایج بخش (3-2) مطابقت دارد.

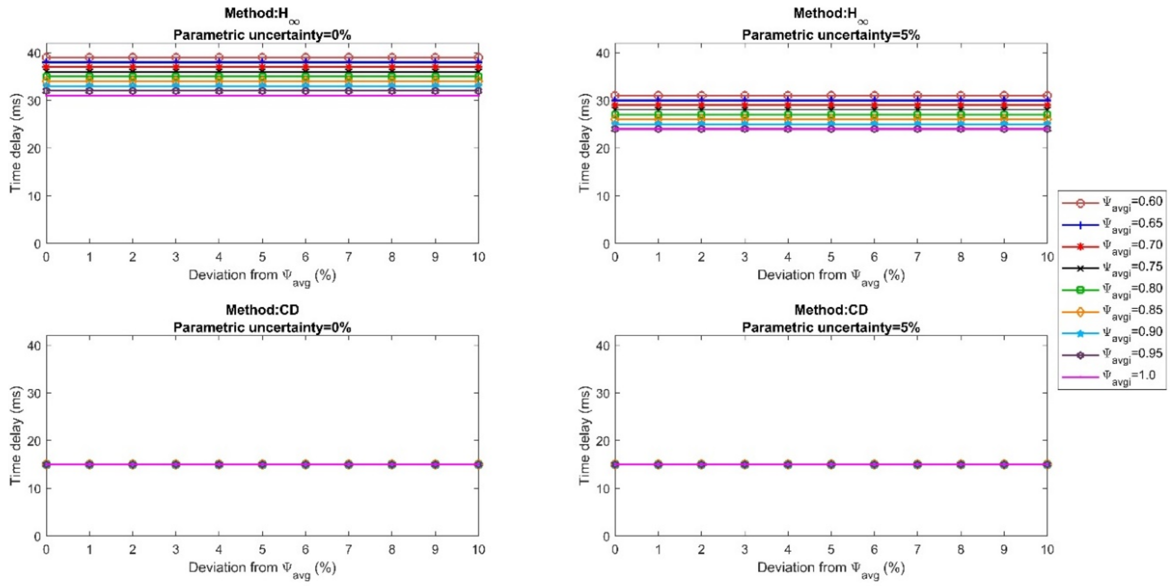
3-4- بررسی پاسخ‌های سازه کنترل شده به‌روش H_∞ و CD

مسئله طراحی کنترلر در این پژوهش، ارزیابی و مقایسه کنترل‌کننده طراحی شده به‌روش H_∞ و روش میرایی بحرانی است. به‌عبارت بهتر، قوام کنترل‌کننده CD در مقایسه با H_∞ بررسی می‌شود. بدین منظور، مقادیر برش‌پایه و نسبت برش‌پایه در تأخیرهای زمانی مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرند. برش‌پایه سازه و نسبت برش‌پایه از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

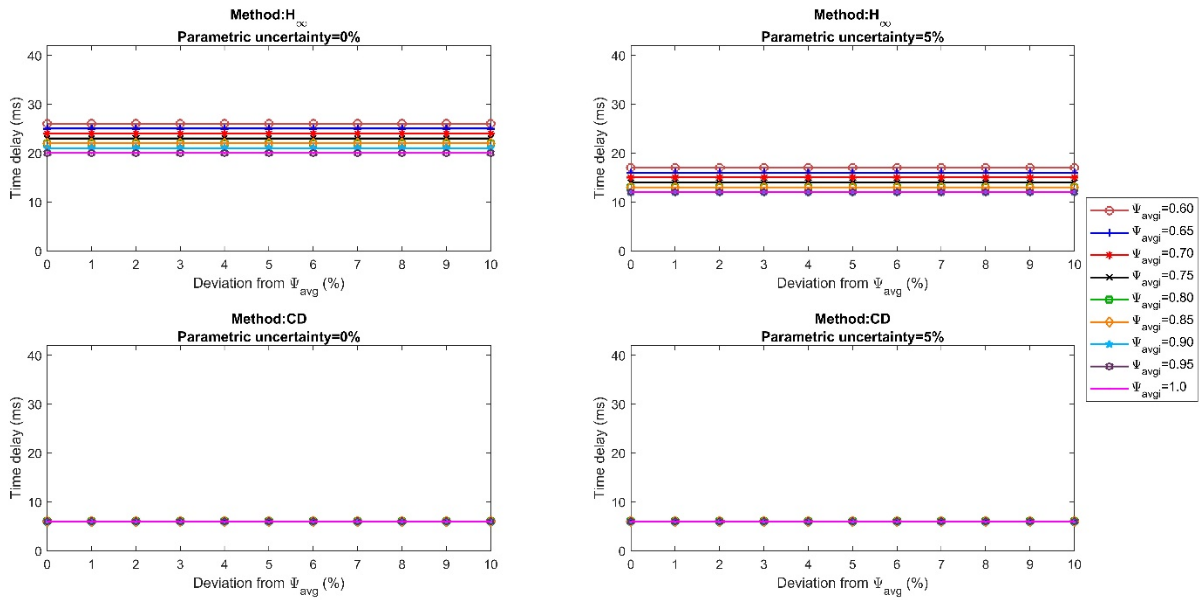
$$V_{bs} = \sum_{i=1}^{n} k_i D r_i \qquad (37)$$

$$Base\_Shear\_Ratio = \frac{(V_{bs})_{controlled}}{(V_{bs})_{uncontrolled}} \qquad (38)$$

در رابطه (37)، k_i و Dr_i به‌ترتیب سختی و دریفت طبقه i و V_{bs} برش‌پایه سازه را نشان می‌دهند.



شکل 3- **تأخیر زمانی مجاز در حضور نامعینی پارامتری و خطای سنسور/ محرک برای سازه برشی 3 طبقه**



شکل 4- **تأخیر زمانی مجاز در حضور نامعینی پارامتری و خطای سنسور/ محرک برای سازه برشی 8 طبقه**

شکل (5) و (6)، مقادیر نسبت برش‌پایه سازه کنترل‌شده با کنترل‌کننده 1 تا 4 در تأخیرهای زمانی مختلف با فرض 5% نامعینی پارامتری را نشان می‌دهند. کنترل‌کننده 1 و 2 و کنترل‌کننده 3 و 4 در مقایسه با یکدیگر دارای گسیختگی میانگین یکسانی هستند. اما گسیختگی سنسورها/ محرک‌ها در کنترل‌کننده 2 و 4 در مقایسه با کنترل‌کننده 1 و 3 محدوده بیشتری را شامل می‌شوند.

کنترلر 1) گسیختگی سنسورها/ محرک‌ها← 5 تا 15%

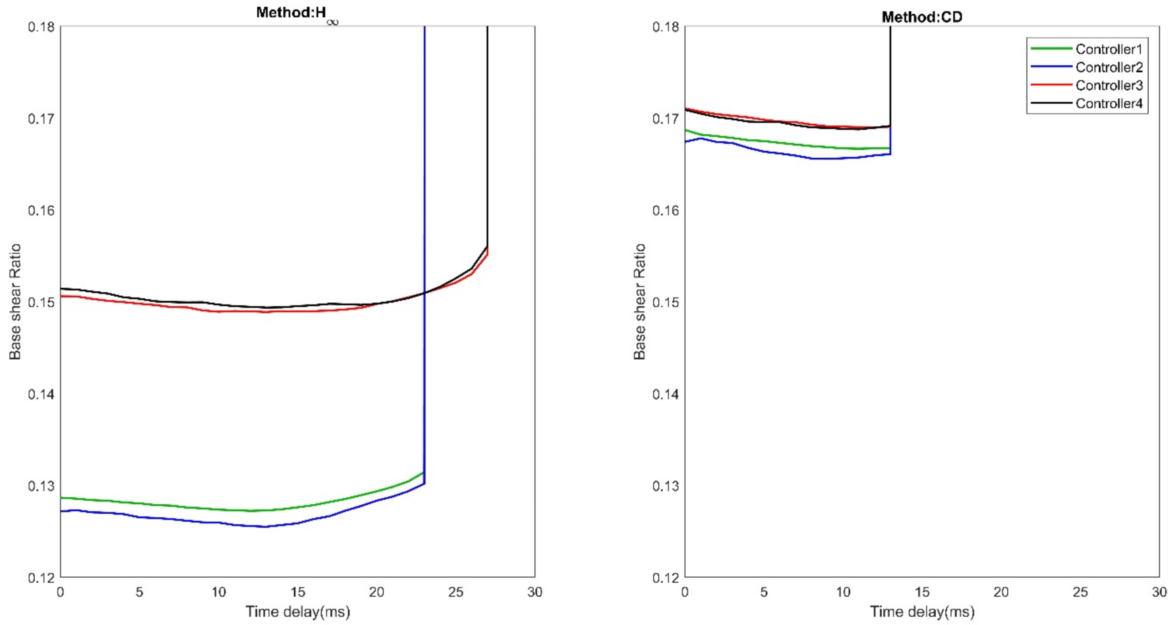
کنترلر 2) گسیختگی سنسورها/ محرک‌ها← 0 تا 20%

کنترلر 3) گسیختگی سنسورها/ محرک‌ها← 25 تا 35%

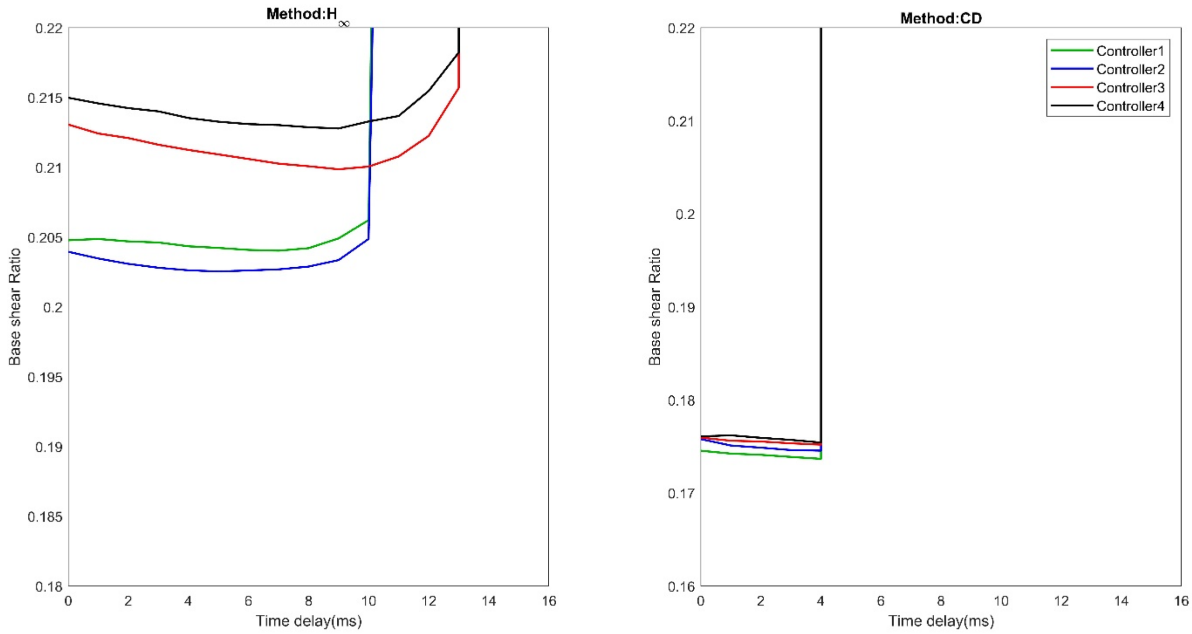
کنترلر 4) گسیختگی سنسورها/ محرک‌ها← 20 تا 40%

مطابق شکل (5) و (6)، در مقایسه کنترل‌کننده‌های طراحی شده با روش H_∞ و CD، با افزایش گسیختگی میانگین سنسورها/ محرک‌ها مقدار نسبت برش پایه افزایش یافته است. اما افزایش محدوده گسیختگی سنسورها/ محرک‌ها، تأثیر چندانی بر نسبت برش‌پایه ندارد. همچنین افزایش میانگین گسیختگی سنسورها/ محرک‌ها و محدوده گسیختگی آن‌ها در سازه کنترل‌شده با روش میرایی بحرانی تأثیر کمتری نسبت به سازه کنترل‌شده با روش H_∞ دارد. مطابق شکل (5)، در سازه سه طبقه کنترل‌شده با روش H_∞، مقادیر کمتری برای برش‌پایه در مقایسه با روش CD به‌دست آمده است. اما در سازه هشت طبقه، برش‌پایه سازه کنترل‌شده با روش CD مقادیر کمتری را نسبت به روش H_∞ دارد. بنابراین،

کنترل‌کننده متمرکز طراحی شده با روش H_∞ نسبت به افزایش تعداد طبقات حساس بوده و حل ناتساوی‌های ماتریسی خطی با روش نسبتاً بهینه امکان‌پذیر است. باید توجه داشت که مطابق نتایج به‌دست آمده در این بخش و بخش‌های قبلی، کنترل‌کننده H_∞ برای مقادیر بیشتر تأخیر زمانی پایداری سازه را تضمین می‌کند و در هر دو سازه سه و هشت طبقه، از نظر تأخیر زمانی کارایی بهتری نسبت به کنترل‌کننده CD دارد.



شکل 5- مقادیر برش‌پایه سازه 3 طبقه به‌ازای تأخیرهای زمانی مختلف



شکل 6- مقادیر برش‌پایه سازه 8 طبقه به‌ازای تأخیرهای زمانی مختلف

به منظور ارزیابی عملکرد سیستم‌های کنترلی طراحی شده به روش H_∞ و CD، شاخص‌های عملکردی زیر برای مقایسه پاسخ‌های کنترل‌شده و کنترل‌نشده تعریف می‌شوند. شاخص اول تا چهارم به‌ترتیب معیاری برای سنجش کاهش دریفت، کاهش جابه‌جایی، کاهش شتاب و حداکثر نیروی کنترلی هستند.

$$J_1=\frac{\max\limits_{i,t}\frac{\left|Dr_i^{c}(t)\right|}{h_i}}{\max\limits_{i,t}\frac{\left|Dr_i^{uc}(t)\right|}{h_i}}\qquad J_2=\frac{\max\limits_{i,t}\left|x_i^{c}(t)\right|}{\max\limits_{i,t}\left|x_i^{uc}(t)\right|}$$

$$J_3=\frac{\max\limits_{i,t}\left|\ddot{x}_i^{c}(t)\right|}{\max\limits_{i,t}\left|\ddot{x}_i^{uc}(t)\right|}\qquad J_4=\frac{\max\limits_{i,t}\left|u_j(t)\right|}{W}\qquad (39)$$

در روابط فوق، اندیس c برای سازه‌های کنترل‌شده و اندیس uc برای سازه‌های کنترل‌نشده به‌کار رفته‌اند. Dr_i و h_i به‌ترتیب دریفت و ارتفاع طبقه i ام را نشان می‌دهند. همچنین، x_i، $\ddot{x}_i$، W و u_j به‌ترتیب نشان‌دهنده جابه‌جایی طبقه i ام، شتاب طبقه i ام، وزن کل سازه و نیروی محرک طبقه j ام هستند.

جدول 3- مقادیر شاخص‌های عملکرد سازه برشی 3 طبقه (با فرض نامعینی پارامتری=5%)

تأخیر زمانی (ms)	میزان گسیختگی سنسورها/ محرک‌ها	J_1		J_2		J_3		J_4	
		H_∞	CD	H_∞	CD	H_∞	CD	H_∞	CD
0	5 تا 15%	0/152	0/191	0/123	0/167	0/269	0/240	0/242	0/256
	0 تا 20%	0/151	0/193	0/122	0/169	0/260	0/242	0/228	0/270
	25 تا 35%	0/176	0/192	0/142	0/168	0/285	0/235	0/214	0/260
	20 تا 40%	0/177	0/190	0/141	0/167	0/292	0/242	0/224	0/274
15	5 تا 15%	0/151	0/188	0/122	0/164	0/344	0/291	0/261	0/289
	0 تا 20%	0/152	0/190	0/122	0/166	0/323	0/281	0/246	0/297
	25 تا 35%	0/174	0/191	0/139	0/165	0/355	0/285	0/229	0/286
	20 تا 40%	0/173	0/188	0/138	0/164	0/354	0/308	0/243	0/311

جدول 4- مقادیر شاخص‌های عملکرد سازه برشی 8 طبقه (با فرض نامعینی پارامتری=5%)

تأخیر زمانی (ms)	میزان گسیختگی سنسورها/ محرک‌ها	J_1		J_2		J_3		J_4	
		H_∞	CD	H_∞	CD	H_∞	CD	H_∞	CD
0	5 تا 15%	0/208	0/212	0/161	0/174	0/313	0/197	0/281	0/250
	0 تا 20%	0/206	0/211	0/161	0/173	0/332	0/193	0/297	0/259
	25 تا 35%	0/229	0/210	0/174	0/172	0/340	0/189	0/266	0/251
	20 تا 40%	0/226	0/212	0/176	0/174	0/360	0/195	0/285	0/267
6	5 تا 15%	0/207	0/210	0/167	0/172	0/362	0/203	0/290	0/274
	0 تا 20%	0/206	0/209	0/160	0/171	0/389	0/210	0/299	0/260
	25 تا 35%	0/226	0/209	0/178	0/171	0/391	0/197	0/278	0/257
	20 تا 40%	0/223	0/210	0/175	0/172	0/395	0/208	0/298	0/271

مقادیر شاخص عملکرد سیستم‌های کنترلی طراحی شده برای سازه‌های برشی 3 و 8 طبقه در حضور عدم‌قطعیت‌های پارامتری، تأخیر زمانی و خطای سنسور/ محرک به‌ترتیب در جدول (3) و (4) نشان داده شده است. مطابق این جداول، عملکرد کنترل‌کننده طراحی شده به روش CD نتایج بهتری در کنترل شتاب طبقات دارد و عملکرد سازه برای اجزای غیرسازه‌ای مناسب‌تر است. از طرفی کنترل‌کننده طراحی شده برای سازه برشی سه طبقه با روش H_∞ توانسته است با نیروی کنترلی کمتر، جابه‌جایی و

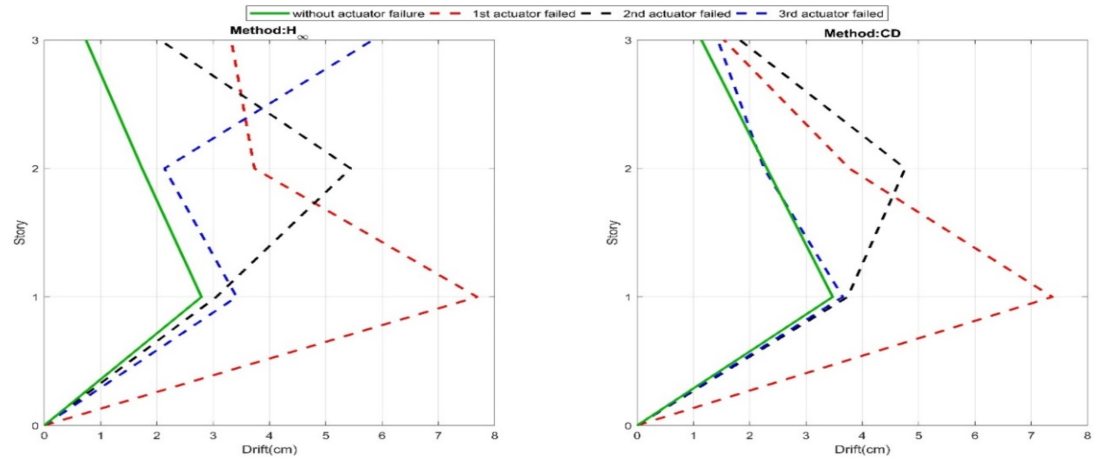
دریفت طبقات را بیشتر کاهش دهد. اما در سازه برشی 8 طبقه، این کنترل‌کننده با نیروی کنترلی بیشتر در مقایسه با کنترل‌کننده CD، لزوماً از منظر کنترل جابه‌جایی و دریفت طبقات عملکرد مناسبی ندارد؛ لذا با افزایش تعداد طبقات، کنترل‌کننده متمرکز H_∞ نتایج نسبتاً بهینه به‌دست می‌دهد.

3-5- بررسی تأثیر خرابی محرک‌ها بر پاسخ سازه در حضور توأم عدم‌قطعیت‌ها

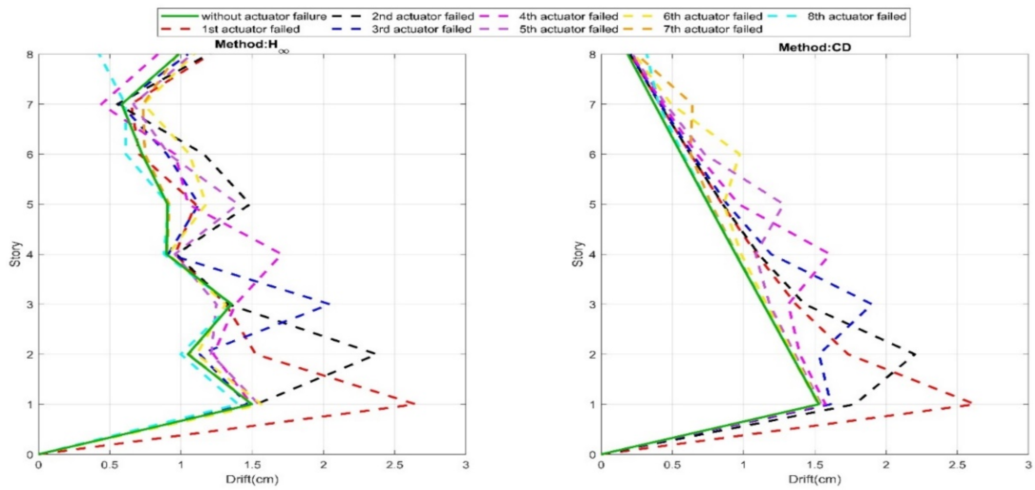
در سیستم‌های کنترلی، به‌دلیل عدم نگهداری صحیح از محرک‌ها یا اعمال بار بیش از حد توان آن‌ها، احتمال خرابی محرک‌ها وجود دارد. در این بخش، پاسخ دریفت سازه با در نظر گرفتن عدم‌قطعیت‌ها مطابق جدول (5) مورد بررسی قرار می‌گیرد. پاسخ دریفت سازه برشی 3 و 8 طبقه به‌ترتیب در شکل (7) و (8) نمایش داده شده است. با فرض خرابی محرک‌ها در ابتدای بارگذاری، خرابی محرک طبقه اول در سازه 3 و 8 طبقه کنترل‌شده به‌روش H_∞ و CD بحرانی‌تر ارزیابی می‌شود؛ زیرا در مقایسه با خرابی سایر محرک‌ها، دریفت را بیشتر افزایش داده است. در حالت بدون خرابی محرک‌ها، مقدار حداکثر دریفت سازه‌های کنترل شده با روش H_∞ در مقایسه با روش CD کمتر است. اما با در نظر گرفتن خرابی محرک‌ها، پاسخ دریفت سازه‌های کنترل‌شده با روش CD نتایج بهتری را به‌دست می‌دهند. بنابراین، عدم‌قطعیت خرابی محرک‌ها می‌تواند ارزیابی عملکرد کنترلی را تحت تأثیر قرار دهد.

جدول 5- عدم‌قطعیت‌های در نظر گرفته شده جهت بررسی تأثیر خرابی محرک بر پاسخ دریفت سازه

عدم قطعیت	مقدار
پارامتری	5%
خطای سنسورها/ محرک‌ها	5 تا 15%
تأخیر زمانی سیستم کنترلی سازه برشی 3 طبقه	15 میلی‌ثانیه
تأخیر زمانی سیستم کنترلی سازه برشی 8 طبقه	6 میلی‌ثانیه



شکل 7- نتایج دریفت سازه برشی 3 طبقه با در نظر گرفتن حالات مختلف خرابی محرک‌ها



شکل 8- نتایج دریفت سازه برشی 8 طبقه با در نظر گرفتن حالات مختلف خرابی محرک‌ها

4- بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش، قوام سیستم کنترلی طراحی شده بر اساس شرایط میرایی بحرانی (CD) در حضور عدم‌قطعیت‌های پارامتری، تأخیر زمانی، خطای سنسور/ محرک و خرابی محرک‌ها مورد ارزیابی قرار گرفت و با کنترل‌کننده H_∞ مقایسه شد. دو سازه 3 و 8 طبقه تحریک شده با زلزله ساختگی به‌عنوان مثال عددی جهت ارزیابی کنترل‌کننده‌های مذکور به‌کار گرفته شدند. نتایج به‌دست آمده نشان داد که کنترل‌کننده CD، پایداری سیستم را برای تأخیر زمانی کمتری در مقایسه با کنترل‌کننده H_∞ تضمین می‌کند. اما در حضور 0 تا 15 درصد نامعینی پارامتری، مقاومت خوبی از خود نشان می‌دهد و پایداری سیستم حفظ می‌شود. از طرفی برای کنترل‌کننده H_∞ و CD در حضور نامعینی پارامتری نشان داده شد که افزایش گسیختگی میانگین سنسورها/ محرک‌ها تأثیر منفی بر تأخیر زمانی مجاز سیستم ندارند. همچنین تأخیر مجاز سیستم نسبت به تغییر محدوده گسیختگی سنسورها/ محرک‌ها حساس نیست. با بررسی پاسخ‌های سازه، عملکرد کنترل‌کننده CD در کنترل شتاب سازه بهتر از کنترل‌کننده H_∞ ارزیابی شد. از طرفی با مقایسه سایر پاسخ‌های سازه، کنترل‌کننده متمرکز H_∞ برای سازه برشی با طبقات کمتر، نتایج بهتری را به‌دست می‌دهد، اما با افزایش تعداد طبقات و باتوجه به دشوار شدن حل بهینه ناتساوی‌های ماتریسی خطی، کنترل‌کننده H_∞ به‌صورت نسبتاً بهینه طراحی شده و لزوماً نتایج بهتری در مقایسه با سازه کنترل شده با روش CD ارائه نمی‌کند. با بررسی عدم‌قطعیت خرابی محرک‌ها به‌همراه سایر عدم‌قطعیت‌ها، سازه‌های کنترل شده با روش CD مناسب ارزیابی می‌شوند؛ زیرا تأثیر کمتری بر افزایش پاسخ سازه در اثر خرابی محرک‌ها دارند.

5- مراجع

Amin AA, Hasan KM, "A review of fault tolerant control systems: advancements and applications", Measurement. 2019, 143 (1), 58-68. https://doi.org/10.1016/j.measurement.2019.04.083

Athans M, "On the LQG problem", IEEE Transactions on Automatic Control, 1971,16 (6), 528-528. https://doi.org/10.1109/TAC.1971.1099845

Cheng C, Zhao Q, "Reliable control of uncertain delayed systems with integral quadratic constraints", IEE Proceedings-Control Theory and Applications. 2004, 1, 151 (6), 790-796. https://doi.org/10.1049/ip-cta:20041052

Cheng FY, "Smart structures: innovative systems for seismic response control", CRC press, 2008, 25. https://doi.org/10.1201/9781420008173

Ding Y, Weng F, Liang L, "Active vibration attenuation for uncertain buildings structural systems with sensor faults", Journal of Computers, 2013, 1, 8 (12), 3072-3078. https://doi.org/10.4304/jcp.8.12.3072-3078

Du H, Zhang N, "H_∞ control for buildings with time delay in control via linear matrix inequalities and genetic algorithms", Engineering Structures, 2008, 1, 30 (1), 81-92. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2007.03.005

Fridman E, "Introduction to time-delay systems", Analysis and control Springer, 2014, 2. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-09393-2

Katebi J, Rad AB, Zand JP, "A novel multi-feature model predictive control framework for seismically excited high-rise buildings", Structural Engineering and Mechanics, 2022, 25, 83 (4), 537-549. https://doi.org/10.12989/sem.2022.83.4.537

Khalil HK, "Nonlinear systems third edition", Patience Hall, 2002, 115. https://doi.org/10.11509/isciesci.47.4_208

Lezgy-Nazargah M, Elahi A, Pakizeh Tali M, "H_∞ control method for seismically excited building structures with time-delay", Journal of Vibration and Control, 2020, 26 (11-12), 865-884. https://doi.org/10.1177/1077546319890010

Lin CC, Wei JY, Chang CC, "Time delay H_∞ control of structures under earthquake loading", Journal of the Chinese Institute of Engineers, 2007, 1, 30 (6), 951-960. https://doi.org/10.1080/02533839.2007.9671323

Lofberg J, "YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB", In2004 IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508), 2004, 2, 284-289. IEEE. https://doi.org/10.1109/CACSD.2004.1393890

Mao X, Koroleva N, Rodkina A, "Robust stability of uncertain stochastic differential delay equations", Systems and Control Letters, 1998, 14, 35 (5), 325-336. https://doi.org/10.1016/S0167-6911(98)00080-2

Miyamoto K, Sato D, She J, "A new performance index of LQR for combination of passive base isolation and active structural control", Engineering Structures, 2018, 157 (15), 280-299. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.11.070

Moon YS, Park P, Kwon WH, Lee YS, "Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems. International Journal of control", 2001, 1, 74 (14), 1447-1455. https://doi.org/10.1080/00207170110067116

Palazzo B, Petti L, "Stochastic response comparison between base isolated and fixed-base structures", Earthquake spectra, 1997,13 (1), 77-96. https://doi.org/10.1193/1.1585933

Raji R, Ghaffarzadeh H, Hadidi A, "Decentralized control of tall shear structures against sensor failures and uncertainty in earthquake excitations", Amirkabir Journal of Civil Engineering, 2021, 19, 52 (12), 3073-3090. https://doi.org/10.22060/ceej.2019.16541.6266

Rashidi H, Khanlari K, Zarfam P, Ghafory-Ashtiany M, "A novel approach of active control of structures based on the critically damped condition", Journal of Vibration and Control, 2021, 27 (13-14), 1511-23.

https://doi.org/10.1177/1077546320944300

Robert ES, Iwasaki T, Karolos MG, "A unified algebraic approach to linear control design", Routledge, 2017, 22. https://doi.org/10.1201/9781315136523

Wu M, He Y, She JH, "Stability analysis and robust control of time-delay systems", Berlin: Springer, 2010, 4. https://doi.org/10.1007/978-3-642-03037-6

Zhang RY, Lavaei J, "Efficient algorithm for large-and-sparse LMI feasibility problems", In2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC), 2018, 17, 6868-6875, IEEE. https://doi.org/10.1109/CDC.2018.8619019