

استفاده از معادلات دیفرانسیل استوکاستیک در بررسی عدم قطعیت‌های مرتبط با بهره‌برداری از تصفیه‌خانه فاضلاب لجن فعال

وحید نورانی^{1*}، رضا شهیدی‌زنوز²، مهدی دینی³

¹ استاد گروه آب، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تبریز

² دانشجوی دکتری آب و سازه‌های هیدرولیکی، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تبریز

³ دانشیار گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

دریافت: 1401/10/9، بازنگری: 1402/1/31، پذیرش: 1402/2/4، نشر آنلاین: 1402/2/4

چکیده

امروزه مدیریت هرزآب‌های سطحی توسط تصفیه‌خانه‌های فاضلاب (WWTP)، جزو یکی از ملزومات مهندسی محیط زیست شمرده می‌شود. یکی از مکانیسم‌های WWTP، لجن فعال مربوط به پارامتر اکسیژن مورد نیاز بیولوژیکی (BOD) است. در طراحی‌های معمول از معادلات دیفرانسیل خطی حاکم بر سیستم استفاده می‌گردد، لیکن در این معادلات از ماهیت نوسانی مقدار میکروارگانیسم‌های مصرفی برای کنترل BOD و عدم قطعیت پارامترهای دخیل در معادلات صرف‌نظر می‌شوند. این نوسانات و عدم قطعیت‌ها در نتایج مدل‌سازی می‌تواند کمک شایانی به طراحان از دو منظر مدیریت ریسک و هزینه و سهولت نظارت بر قسمت‌های لجن فعال نماید. در این تحقیق سعی بر ارائه یک مدل تصادفی با استفاده از معادلات استوکاستیک (SDE) (Stochastic) به جای معادلات خطی عادی (ODE) جهت طراحی و شبیه‌سازی فرآیند لجن فعال تصفیه‌خانه با اعمال عدم قطعیت‌ها در محاسبات ارائه شود. مدل‌سازی و آنالیز برای دو پارامتر BOD و دبی فاضلاب (Q) صورت گرفت. برای این منظور، معادلات حاکم بر واحد تصفیه بیولوژیکی بررسی و معادلات خطی ODE حاکم بر سیستم لجن فعال به SDE تبدیل و عدم قطعیت‌ها بر پارامترهای خروجی از بخش ته‌نشینی ثانویه اعمال شد. محاسبات با استفاده از SDE و حل انتگرال Ito به روش اویلر-مارویاما (Euler-Maruyama) برای 15 روزه متوالی از بازه زمانی (2019-2020) برای WWTP شهر تبریز انجام یافت. ضرایب بهینه برای SDE برای دو متغیر Q_{eff} و BOD_{eff} تعیین و مقایسه نتایج نشان‌دهنده قابلیت مناسب حل عددی برای متغیرهای محاسباتی مذکور بودند. اختلاف دو روش SDE با ODE در محاسبه BOD_{eff} معادل 11/47 درصد و برای محاسبه Q_{eff} معادل 10/11 درصد به‌دست آمد.

کلیدواژه‌ها: واحد لجن فعال، عدم قطعیت، حرکت براونی، فرآیند وینر، تصفیه‌خانه فاضلاب تبریز.

1- مقدمه

مدل‌سازی فرآیند لجن فعال در بخش بیولوژیکی WWTP، اغلب به صورت مدل‌های مفهومی همراه با روابط ریاضی بیان می‌شوند. در مدل‌سازی ریاضی سیستم‌های محیط زیستی مبتنی بر فیزیک مسئله، مواجهه با دو مشکل عمده، کار مدل‌سازی را دشوار می‌کند. اولاً تکثر متغیرها باعث ازدیاد گزینه‌های مورد بررسی و فزونی تعداد متغیرها شده، ثانیاً روابط بسیار پیچیده بین اجزا باعث دشواری تحلیل و ایجاد خطا و کاهش دقت مدل می‌شود. معادلات ODE به صورت یک جانبه، فیزیک واقعی پدیده را نمی‌توانند به صورت علمی تفسیر کرده و از عدم قطعیت‌ها صرف‌نظر می‌کنند. بنابراین مشکل دیگر، در اثر این رویکرد عدم لحاظ عدم

مدیریت مناسب بهره‌برداری از ذخایر محدود منابع آب که در اثر آلودگی‌های محیطی در اثر شرایط اقلیمی و وضعیت معاشی جمعیت، زنگ خطر بحران آب برای سال‌های آتی را به‌صدا در آورده، از اولویت‌های اساسی جوامع و کشورها است. در این راستا، کنترل عملکرد WWTP اهمیت ویژه‌ای را شامل می‌شود، چرا که عموماً پساب تصفیه شده در آن‌ها، مورد استفاده مجدد قرار می‌گیرد. لذا مدل‌سازی، تجزیه و تحلیل عدم قطعیت داده‌ها، می‌تواند یکی از راه‌کارهای مناسب برای آنالیز، پیش‌بینی و طراحی مناسب عملکرد تصفیه‌خانه‌ها باشد. مدل‌های مورد استفاده برای



Harris (1977) برای ثابت اعمال نمودن دبی و حذف مقادیر استوکاستیک، در ورودی تصفیه‌خانه یک حوضچه تثبیت‌کننده لحاظ نمود و جهت ساده‌سازی، اکثر پارامترها و مقادیر عددی مورد استفاده در شبیه‌سازی را به‌صورت یک عدد ثابت در نظر گرفت. نتایج نشان‌دهنده تفاوت چشم‌گیر در میزان BOD محاسباتی و BOD مشاهداتی بود، اما مقادیر DO محاسباتی و DO مشاهداتی تفاوت ناچیزی داشتند. در مطالعه مذکور تناوب متوسط نرخ جریان بین (50 تا 150)٪ در نظر گرفته شده و غلظت BOD بین (10 تا 250) درصد متغیر بوده که این فرضیات باعث ایجاد خطا در بار ورودی گردید.

در مطالعه حاضر از معادلات SDE برای تحلیل حرکت براونی همزمان با اعمال عدم قطعیت‌های دخیل در روند فیزیکی لجن فعال تصفیه‌خانه تبریز استفاده شد. داده‌های مشاهداتی در طی یک بازه زمانی دو هفته‌ای، با داده‌های محاسباتی مقایسه گردید و در پایان ضرایب بهینه معادلات SDE استخراج شد. کاربرد این روش برای اولین بار در تحلیل عدم قطعیت بخش لجن فعال به عنوان نوآوری تحقیق حاضر محسوب می‌شود که در آن یک مدل وینر با استفاده از SDE برای بررسی داده‌های واقعی و اندازه‌گیری پارامترهای آلاینده بخش بیولوژیکی لجن فعال جهت رصد تغییرات کوتاه مدت BOD و Q با رویکرد تحلیل عدم قطعیت‌های موجود در بخش راکتور بیولوژیکی، ارائه شده است.

2- مواد و روش‌ها

در این تحقیق بررسی عدم قطعیت روی شاخص آلاینده‌ی BOD و میزان تغییرات Q برای بخش بیولوژیکی WWTP شهر تبریز انجام یافت. طراحی این WWTP بر پایه سیستم لجن فعال انجام یافته است. برای آنالیز داده‌های استخراجی از سال (2020-2019) و معادلات SDE با بازه زمانی 15 روزه مورد استفاده قرار گرفت. برای حل انتگرال $\int_{t_0}^t$ روش اویلر-مارویاما به‌کار برده شد سپس ضرایب ثابت بهینه SDE استخراج و با داده‌های مشاهداتی مورد مقایسه قرار گرفت. در ادامه روش‌های مورد استفاده به تفصیل شرح داده شده است.

1-2- منطقه مورد مطالعاتی و داده‌ها

موقعیت قرارگیری WWTP در فاصله چهار کیلومتری غرب شهر تبریز در اراضی روستای قراملک، ضلع جنوبی رودخانه آجی-چای و در پائین‌ترین نقطه شهر می‌باشد. نحوه عملکرد و جانمایی تصفیه‌خانه فاضلاب شهر تبریز در شکل (1) نشان داده شده است.

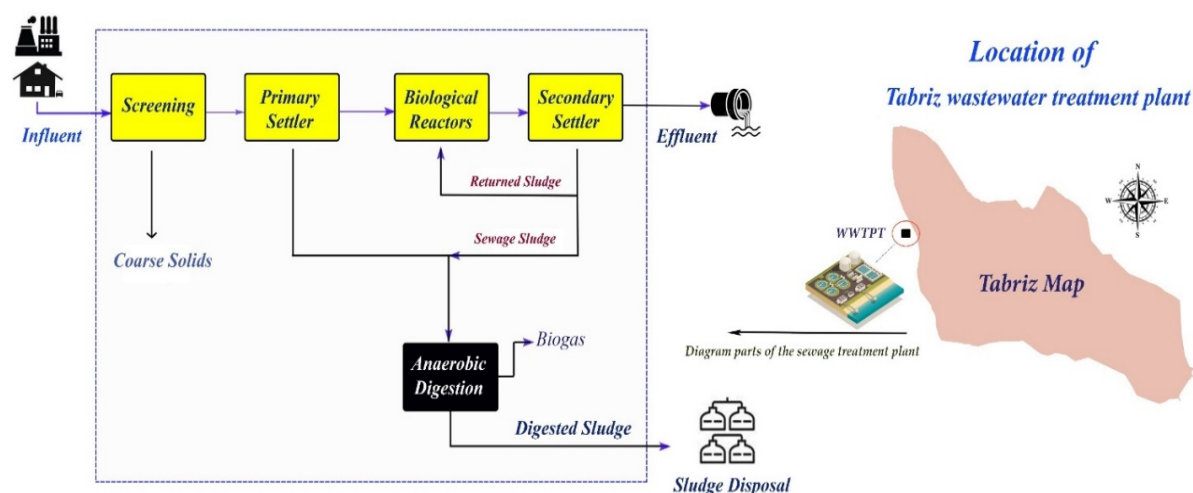
قطعیت‌ها در جواب‌های به‌دست آمده خواهد بود. در نتیجه شبیه‌سازی‌های عددی را اغلب باید مورد دقت‌سنجی قرار داده یا لازم است مدل‌های ریاضی را بر اساس مدل‌های مادی با اندازه‌گیری‌های پروتوتیپ¹ تنظیم کرد (Streeter و Wylie، 1978).

مدل‌سازی ریاضی عموماً به دو گروه عمده نگرش فیزیکی برپایه معادلات ریاضی جعبه سفید و نگرش جعبه سیاه تقسیم می‌شوند، که در این راستا باید به مدل‌های بینابینی موسوم به مدل‌های تفهیمی نیز اشاره کرد. در نگرش فیزیکی به‌منظور برآورد خروجی یک سیستم مشخص، عموماً توجه به ورودی سیستم، ساختار سیستم و قوانین فیزیکی، بدون شرایط اولیه و مرزی اجتناب‌ناپذیر می‌باشد. اکثر مدل‌های ریاضی مبتنی بر نگرش فیزیکی که برای حل چنین مسائلی به کار می‌روند، هر چند نیازی به داده‌های زمانی زیادی ندارند، با مشکل جمع‌آوری وسیع داده‌های فیزیکی مواجه هستند که می‌توانند معروض به عدم قطعیت باشند. در نگرش جعبه سفید عموماً جهت تحلیل سیستم، معادلات ODE کارایی لازم را دارند لیکن برای لحاظ کردن عدم قطعیت می‌توان از SDE بهره‌گرفت (Kabouris و Georgakakos، 1991).

اگر معادلات حاکم بر پدیده معلوم در نظر گرفته شود، با ساختن مدل عددی از وضعیت واقعی، می‌توان با شبیه‌سازی ریاضی، وضعیت پروتوتیپ را شبیه‌سازی کرد. مثلاً برای تحلیل لجن فعال از موازنه قانون بقای جرم در قسمت ورودی و خروجی بخش بیولوژیکی WWTP استفاده می‌شود که ماهیت معادلات حاکم بر فرآیند از جنس معادلات ODE در طراحی WWTP است (Metcalf، 2003؛ Sin و همکاران، 2009؛ Lin، 2014).

تصفیه فاضلاب با فرآیند لجن فعال (ASP) ترکیبی از حذف کاتیون‌های مکانیکی، شیمیایی و بیولوژیکی و قابل بررسی با معادلات غیرخطی با راه‌حل‌های ناپیوسته می‌باشد (Mauritsson، 2013). در کنار مدل‌های مبتنی بر فیزیک مسئله و مدل‌های مادی، تحقیقاتی در زمینه طراحی و شبیه‌سازی پدیده‌های فیزیکی با استفاده از معادلات حاکم در ریاضیات پیشرفته روی فضا‌های استوکاستیک جهت بهبود مدل‌سازی موضوعات حوزه مهندسی آب و محیط زیست با در نظرگیری عدم قطعیت‌ها در فرآیند و همین‌طور استوکاستیک بودن پدیده‌ها و استفاده از معادلات استوکاستیک (SDE)، انجام یافته است (Dexter و همکاران، 2016). از معادلات SDE برای تحلیل و مدل‌سازی فرآیندهای مختلفی استفاده شده است (Beck، 1978؛ Soto و Infante، 2019؛ Browning و همکاران، 2020).

Harris (1977) یکی از منحصر به فردترین تحقیقات را در زمینه استفاده از معادلات استوکاستیک برای WWTP با سیستم لجن فعال با داده‌های روزانه (حداکثر دو روز متوالی) و با استفاده از معادلات اویلر به انجام رسانده است.



شکل 1- موقعیت مکانی و دیاگرام عملکرد تصفیه‌خانه فاضلاب شهر تبریز

فاضلاب ورودی به ترتیب 250 و 350 میلی‌گرم در لیتر، بار آلودگی 5BOD و مواد معلق فاضلاب ورودی به ترتیب 32400 و 45360 کیلوگرم در روز می‌باشند. اطلاعات آماری شاخص‌های آلودگی در جدول (1) نشان داده شده‌اند.

سیستم WWTP تبریز شامل دو مرحله اولیه (تصفیه فیزیکی) و ثانویه (تصفیه بیولوژیکی) و نهایتاً گندزدائی می‌باشد. متوسط دبی سالیانه فاضلاب و طراحی تصفیه‌خانه به ترتیب 1/15 و 1/5 مترمکعب در ثانیه می‌باشند. حداکثر دبی لحظه‌ای در روزهای بارانی و خشک به ترتیب 3/8 و 2/5 مترمکعب در ثانیه و غلظت 5BOD و مواد معلق

جدول 1- اطلاعات آماری پارامترهای آلودگی تصفیه‌خانه تبریز

پارامتر	توضیحات	واحد	بیشینه مقدار	کمینه مقدار	میانگین	انحراف معیار
p_{inf}	میزان غلظت یون هیدروژن محلول	-	8/61	7/29	8/05	0/19
BOD_{eff}	BOD خروجی از تهنشینی ثانویه	mg/L	69	13	24/3	4/6
$BOD_{inf}(t-1)$	BOD ورودی به تصفیه‌خانه در روز قبل و خروجی از تهنشینی اولیه	mg/L	200	140	181/4	10/4
BOD_{inf}	BOD ورودی به تصفیه‌خانه	mg/L	320	160	288/3	22/8
COD_{inf}	COD ورودی به تصفیه‌خانه	mg/L	516/67	362/17	479/16	22/01
SS_{inf}	مواد جامد معلق ورودی به تصفیه‌خانه	mg/L	1/5	0	0/61	0/151
TSS_{inf}	مجموع مواد جامد معلق در فاضلاب در ورودی تصفیه‌خانه	mg/L	336/33	234	296/40	14/64
VSS_{inf}	جامدات معلق فرار در ورودی تصفیه‌خانه	mg/L	235/33	140/5	191/13	15/04
TDS_{inf}	کل جامدات محلول در ورودی تصفیه‌خانه	ppm	1366/83	779/83	936/34	64/35
T_{inf}	دمای فاضلاب ورودی تصفیه‌خانه	°C	26/5	12/2	21/04	2/97
MLSS	مقدار کل جامدات معلق در مخزن هوادهی	mg/L	2870	1138	2273/48	147/5
EC_{inf}	هدایت الکتریکی ورودی تصفیه‌خانه	$\mu\text{Siemens/cm}$	2320	824	1550/23	280/76

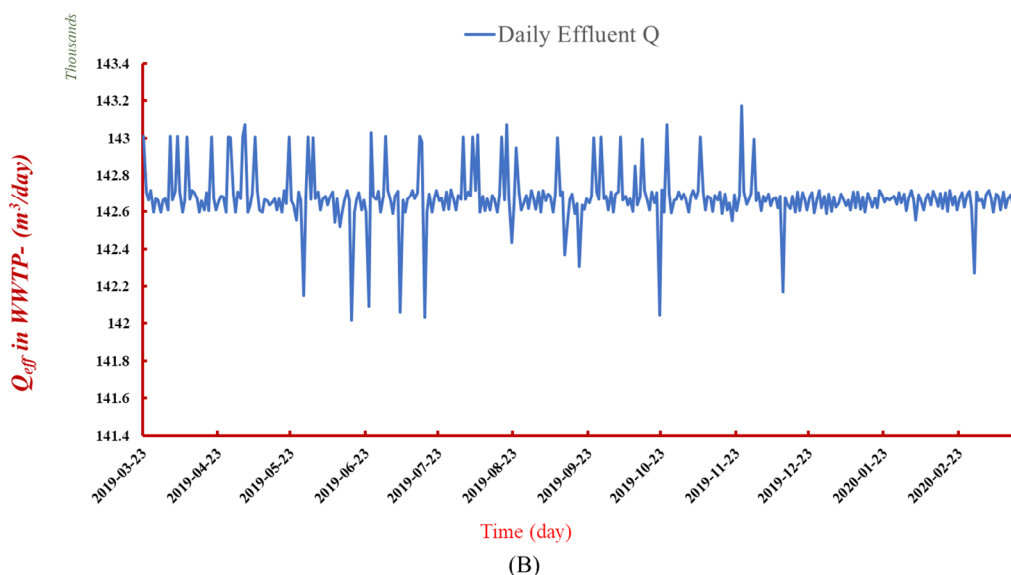
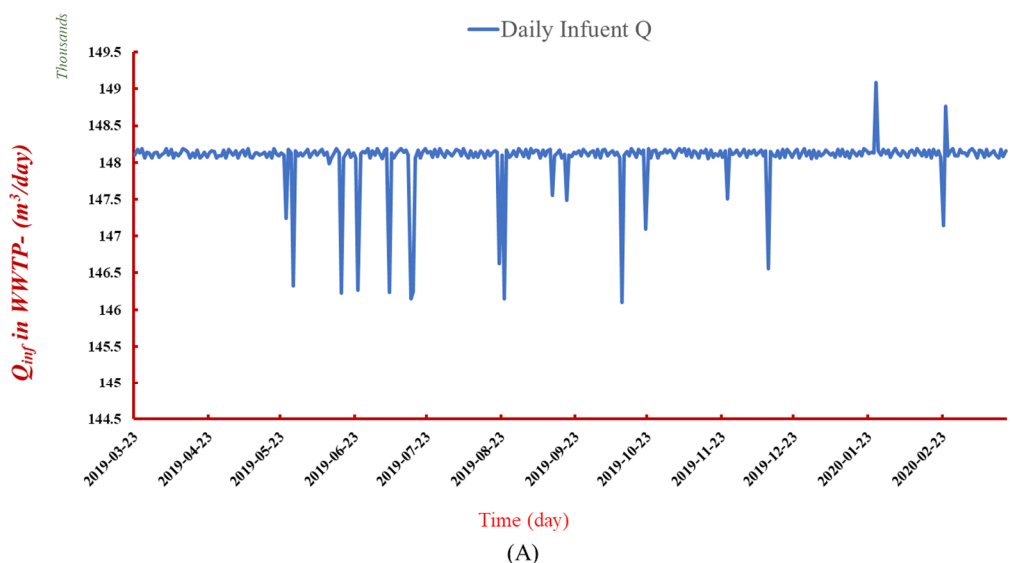
نظر گرفته شدند. اندازه‌گیری داده‌های آزمایشگاهی برپایه BOD در مدل‌سازی به کار رفتند. نمودار رفتار تغییرات دبی ورودی و خروجی به تصفیه‌خانه طی بازه یک‌ساله (2019-2020)، در شکل (2) نشان داده شده است. تحقیق

به علت اهمیت پارامتر BOD و تغییرات Q در کنترل کیفیت پساب فاضلابی و ثبت دقیق این داده‌ها نسبت به سایر پارامترها و همین‌طور ماهیت معادلات بخش لجن فعال که قابل تبدیل به معادلات SDE می‌باشند، این دو پارامتر به عنوان پارامترهای هدف در مدل‌سازی در

پارامترهای آلاینده‌ی بخش تصفیه بیولوژیکی با EDS بدون شک تکمیل کننده EDO خواهد بود. بنابراین در این مقاله برای بررسی تأثیر عدم قطعیت‌های مربوط به بخش لجن فعال و پارامترهای بیولوژیکی خروجی یا داخل سیستم، از EDS استفاده شد. برای حل معادلات EDS و تشریح فازهای احتمالاتی به صورت تحلیلی، با اتکا به روش گسسته-سازای اوپلر-ماریاما و فرآیند $I\dot{t}o$ در حضور مقادیر عدم قطعیت‌ساز چون وینر و نویز سفید اولین گام‌های تحقیقاتی توسط Serrano (1990) آغاز گردید.

حاضر متشکل از دو بخش کلی است. بخش اول استخراج و تبدیل معادلات لجن فعال به فرم معادلات دیفرانسیل استوکاستیک با استفاده از مفاهیم طراحی تصفیه‌خانه و بخش دوم حل عددی این معادلات با استفاده از انتگرال $I\dot{t}o$ و روش اوپلر-ماریاما می‌باشد. با توجه به این که عملکرد WWTP تبریز بر پایه لجن فعال می‌باشد، معادلات طراحی مبتنی بر لجن فعال در بخش پیوست ذکر شده است. در صورت نیاز به توضیحات اضافی می‌توان به فصول چهارم و هشتم Metcalf (2003) مراجعه کرد.

عموماً رفتار فرآیند لجن فعال را می‌توان با ODE تحلیل کرد (Georgakakos و Kabouris، 1991)، اما بررسی عدم قطعیت برای



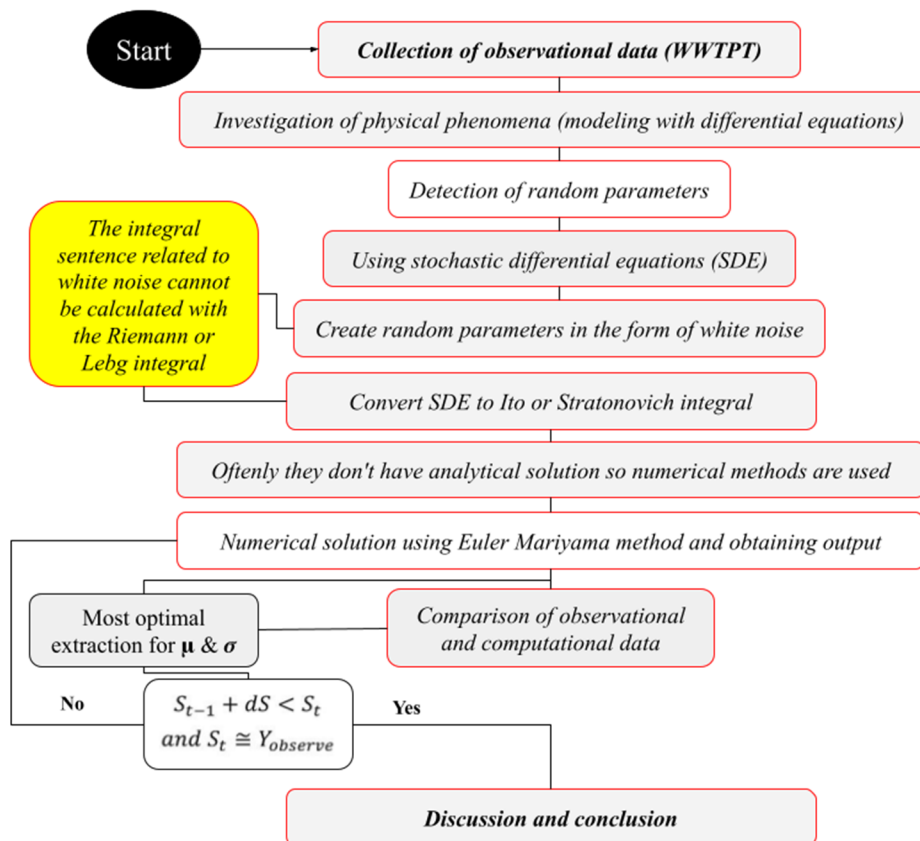
شکل 2- نوسانات روزانه جریان فاضلاب در تصفیه‌خانه: الف) Q_{in} ، ب) Q_{eff}

فرآیند وینر در بازه‌های زمانی مختلف و پراکندگی داده‌های مشخص در EDS به صورت تک‌بعدی و تحلیل حرکت براونی به- صورت گسسته‌سازی و حل عددی انجام شده است.

با معرفی راهکارهای مؤثر و نوین در مدل‌سازی‌ها با استفاده از EDS توسط Särkkä (2006) و روش تحلیلی تعمیم یافته $I\dot{t}o$ برای حل معادلات استوکاستیک خطی مرتبه اول توسط Richardson (2009) و Evans (2012)، مدل‌سازی عددی

غیرخطی و جزئی می‌باشند مدل‌های معرفی شده قادر به توجیه اکثر مسائل مهندسی نخواهد بود (Xiu و Hesthave, 2005). مراحل محاسباتی به صورت شماتیک در شکل (3) نمایش داده شده است. اطلاعات تکمیلی در بخش پیوست این تحقیق و مطالعه‌ای که توسط Erfanian و همکاران (2016) انجام یافته، قابل دسترسی می‌باشد.

Higham (2001)، الگوریتم عددی احتمالاتی معرفی کرد که با استفاده از روش زنجیره‌ای استوکاستیک اوپلر و در نظر گرفتن همگرایی‌های ضعیف و قوی، جواب‌هایی برای روش تقریب‌های اوپلر- ماریاما و میلیشتاین به دست آورد سپس اقدام به حل معادلات ساده دیفرانسیل غیرخطی کرد، ولی از آنجایی که بیشتر معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسائل مهندسی از دسته معادلات



شکل 3- دیگرام حل معادلات EDS

وزن توده بیولوژیکی در واحد زمان از بین می‌رود. در مرحله دوم محاسباتی ظرفیت یا حجم واحد تصفیه بیولوژیکی از رابطه (2) محاسبه می‌شود.

$$\text{if } Q = cte \Rightarrow \forall = t \times Q \quad (2)$$

که t زمان ماند هیدرولیکی (روز)، Q دبی متوسط روزانه (مترمکعب بر روز) و \forall حجم تانک یا راکتور (مترمکعب) است (شکل 1-ب)). زمان ماند متوسط سلول، یک معیار طراحی بسیار مهم برای میکروارگانیسم-های داخل راکتور بیولوژیکی می‌باشد و از رابطه (3) قابل استخراج است.

$$\theta_c = \frac{\forall X}{Q_w X_u} \quad (3)$$

2-2- استخراج SDE حاکم بر لجن فعال

محاسبات لجن فعال بر پایه چهار معادله اساسی (1) تا (4) برنامه-ریزی می‌شود (Metcalf, 2003).

$$\forall \frac{dX}{dt} = QY(S_0 - S_e) + Q_w X_u + k_d \forall X \quad (1)$$

به طوری که \forall ضریب بازده سلولی که به طبیعت سوپسترا (این اصطلاح به مواد آلی و مغذی که در طول تصفیه بیولوژیکی تجزیه می‌شوند و یا ممکن است تصفیه بیولوژیکی را محدود کنند اطلاق می‌شود. برای مثال، مواد آلی کربنی موجود در فاضلاب که طی تصفیه بیولوژیکی تجزیه می‌شوند)، نوع لجن فعال و دما بستگی دارد. k_d ثابت خودخوری که نشان‌دهنده کاهش زیست‌توده درون سیستم می‌باشد (عکس زمان)، به عبارت دیگر k_d وزن توده بیولوژیکی است که به ازاء هر واحد

$$(Q + Q_R)X = (Q_W + Q_R)X_u \quad (4)$$

که در آن $(Q + Q_R)X$ توده بیولوژیکی ورودی و $(Q_W + Q_R)X_u$ توده بیولوژیکی خروجی می‌باشند (mg/lit). معلومات به همراه مجهولات مطرح در معادلات مذکور در جدول (2) ذکر گردیده است.

جدول 2- معلومات و مجهولات در معادلات طراحی لجن فعال

داده‌های ورودی		خروجی مدل									
توصیف	حجم	ثابت خودخوری	ضریب بازده سلولی	غلظت زیست‌توده برگشتی	غلظت زیست توده	غلظت سوبسترای ورودی	دبی فاضلاب خروجی از سیستم	دبی فاضلاب برگشتی	دبی فاضلاب ورودی	غلظت سوبسترای خروجی	غلظت سوبسترای ورودی
متغیر	V	k_d	y	X_u	X	S_0	Q_W	Q_R	Q	S_e	S_0
واحد	3m	^{-1}day	-	g/lit	g/lit	g/lit	day ³ /m	day ³ /m	day ³ /m	g/lit	g/lit

بر این اساس در این مقاله به بررسی عدم قطعیت در خروجی و خود سیستم پرداخته شده است. در این حالت دو فرض اصلی مطرح می‌باشد. فرض اول در مورد حجم لجن می‌باشد. حجم لجن با میزان افزایش لجن متناسب است یعنی:

$$\left(\frac{dx}{dt} \propto X\right) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = k_d X \quad (5)$$

$$\Rightarrow dx = X_{t+1} - X_t$$

به طوری که dx لجن تولیدی به ازای غذای مصرفی را نشان می‌دهد. فرض دوم، در مورد تغییرات غذای میکروارگانیسم‌ها خواهد بود، به طوری که این نوسانات باعث ایجاد تغییرات در میزان DOB می‌شود، یعنی:

$$\left(\frac{ds}{dt} \propto S\right) \Rightarrow \frac{ds}{dt} = -qx \quad (6)$$

که ds تغییرات غلظت لجن را مشخص می‌کند. نسبت دو رابطه به $\frac{ds}{dt}$ رابطه (7) را نتیجه می‌دهد.

$$dx = y \times ds \quad (7)$$

حال با توجه به قانون بقای جرم و فرضیات، روابط (8) و (9) نتیجه می‌شوند:

$$V \frac{ds(t)}{dt} = QS_0(t) - QS_e(t) - Vx(t)q \quad (8)$$

$$V \frac{dx(t)}{dt} = QX_0(t) - Q_W X_u - k_d Vx \quad (9)$$

به طوری که $QS_0(t)$ جرم ورودی به سیستم، $QS_e(t)$ جرم خروجی از سیستم، $QX_0(t)$ جرم ورودی به سیستم است. X_0 در مرحله ورودی به WWTP برابر صفر است. $Q_W X_u$ بیانگر جرم خروجی از سیستم بوده پس ماهیت جمله منفی خواهد بود. $k_d Vx$ نیز جمله راکتور می‌باشد. در معادلات (8) و (9)، $S_e(t)$ و $x(t)$ مقادیر مجهول،

زمان ماند متوسط سلول باید بیشتر از زمان تولید بیشینه باکتری‌های درون سیستم باشد تا از فرار زیست‌توده یا همان لخته‌های بیولوژیکی همراه با جریان خروجی جلوگیری شود. معادله پیوستگی در بخش راکتور بیولوژیکی با فرض دبی ثابت معادله (4) را سبب می‌شود:

با جمع‌بندی مطالب مقدماتی می‌توان گفت هدف پژوهش حاضر استخراج فرم وینر معادله (1) برای Q_{eff} و BOD_{eff} و تبدیل آن به فرم استوکاستیک و مقایسه نتایج محاسباتی با داده‌های مشاهداتی بود. در آنالیزهای جعبه سفید، پارامترها در محاسبات جهت ساده‌سازی ثابت فرض می‌گردند. در این تحقیق از زاویه‌های دیگر به مسأله پرداخته شده است. در گام اول معادلات لجن فعال با توجه به عدم قطعیت‌ها در حالت استوکاستیک و فرم اوپلر- مارویاما استخراج و گام دوم یعنی کدهای تحلیلی مربوطه برای 15 روز به صورت رندوم در طی سال (2019-2020) پیاده‌سازی و نتایج در پایان گزارش گردید. با توجه به وجود عدم قطعیت در فیزیک پدیده، تغییرات برای گام‌های زمانی آنی و برداشت داده‌های روزانه در محاسبات لحاظ شد. این تغییرات استوکاستیک از سه دیدگاه قابل بررسی هستند:

- اثرات عدم قطعیت برای Q_{in} و BOD_{in} و تأثیر آن روی غلظت لجن (X)، که ممکن است در اثر تغییرات آب و هوایی و بارش میزان دبی ورودی متغیر بوده در نتیجه این پدیده همزمان، باعث کاهش میزان BOD فاضلاب گردد یا تغییرات الگوی مصرف در برخی از فصول سال باعث افزایش یا کاهش این پارامترها شود.
- عدم قطعیت پارامترهای دخیل در رفتار میکروارگانیسم‌ها یعنی y ، k_d و تأثیر داده‌های گذشته بر این مقادیر تغییرات شاخص‌های زاد و ولد و مرگ‌ومیر برای جمعیت در هر روز، تأثیر مستقیم بر پارامترهای y ، k_d می‌گذارند که نوسانات ایجاد شده به عنوان نتیجه عدم قطعیت‌ها قابل بررسی هستند.
- عدم قطعیت در خروجی یا خود سیستم. جریانی که در طول ساعات معینی از روز به مقادیر بیشینه و کمینه می‌رسد و برای دوره زمانی از یک هفته تا یک ماه در طی یک سال، مقادیر تقریباً ثابت باقی می‌ماند، تأثیر قابل توجهی بر میزان پارامترهای دخیل در بخش لجن فعال می‌گذارد.

سیلابی یا بارش را به تصفیه‌خانه نداده و مانع ایجاد نوسانات بیشتر از یک بازه مشخص می‌شود. این مشخصه، باعث اعمال بار فاضلاب ورودی در حدی معین به تصفیه‌خانه می‌شود. در چنین حالتی، عدم قطعیت‌های حاصل از وجود رواناب‌های سطحی و یا سایر عوامل، در فواصل زمانی مشخص برای بارهای بیش از حد طراحی غیرقابل اندازه‌گیری است. مقادیر دبی ورودی، همواره مثبت بوده بنابراین ضرایب عددی رابطه (10)، طوری تعیین شدند که طی دو هفته سری زمانی محاسباتی بیشترین همپوشانی را با داده‌های مشاهداتی داشته باشند. W_i ها فرآیند وینر برای مدل‌سازی عدم قطعیت‌ها و c_i ، a_i ها بردار و توابع ماتریسی هستند که وابسته به سرعت جریان و میزان حجم لجن و در کل ثابت‌های بیولوژیکی سینتیکی¹ و استوکیومتری² (به معنی اندازه‌گیری عنصر بوده و شاخه‌ای از علم شیمی است که با روابط کمی میان عناصر در تشکیل مواد مرکب در واکنش‌های شیمیایی سر و کار دارد)، در فاضلاب هستند. اما اساس مطالعه انجام شده، بر پایه مدل واقعی از WWTP بوده و از روابط کمی میان عناصر دیگر صرف نظر شده است. نتایج این مدل‌سازی در مقایسه‌ای که با داده‌های مشاهداتی انجام یافته در جدول (3) برای ضرایب بهینه معادلات استوکاستیک در طی پانزده روز نشان داده شده‌اند.

انتخاب داده‌های مشاهداتی از پانزده روز متوالی متعلق به سال (2019-2020) به صورت استوکاستیک انجام شد. با استفاده از آزمون و خطا ضرایب با کمترین خطای مقایسه‌ای برآورد گردیدند که نمونه‌ای از نتایج در قالب نمودارهای مقایسه‌ای در شکل (4) نشان داده شده است. با انجام آنالیزهای مربوطه با استفاده از روش اویلر-مارویاما مقادیر پیش‌بینی با کمترین اختلاف نسبت به داده‌های مشاهداتی انتخاب گردید. آنچه مسلم است با توجه به توسعه مقادیر استوکاستیک در فضای احتمالاتی و ماهیت حرکت براونی، با جلو رفتن زمانی محاسبات امکان افزایش خطا نیز بیشتر خواهد بود. ضرایب به دست آمده برای SDE در بهینه‌ترین حالت برای مقادیر پیش‌بینی در محاسبات اعمال شد. نکته اساسی تحلیل در تنوع ارقام در گام‌های زمانی برای هر داده بود، چرا که در هر بار اجرای برنامه نتایج نسبت به دفعات بعدی متغیر بوده و ایجاد همگرایی در جواب‌های به دست آمده برای بازه‌های زمانی بلندمدت باعث طولانی شدن زمان محاسبات گردید که این مورد از محدودیت‌های روش ارائه شده در این تحقیق به حساب می‌آید.

$x(t)$ میزان لجن و $S_e(t)$ میزان BOD_{eff} را مشخص می‌کند. S_e مقدار محدودی است که بر اساس استانداردهای سازمان محیط زیست مشخص می‌شود. هدف طراحی، تنظیم پارامترها بر اساس مقدار S_e خواهد بود. در این صورت می‌توان طراحی تصفیه‌خانه را بر اساس S_e و X انجام داد. با ارائه مقادیر اولیه برای e_k روند حل مسئله شروع و با مقایسه آستانه مجاز پارامترها تا اخذ نتیجه مناسب قابل تغییر می‌باشند. X_{ii} ناشی از غلظت لجن به جا مانده با مقداری مشخص است. گام نهایی استوکاستیک نمودن معادلات بر اساس Q و S_e (یا همان BOD) است. پارامترها نسبت به زمان متغیرند، در این صورت سری زمانی داده‌های مشاهداتی Q و S_e را تشکیل و معادلات قابل حل می‌شوند. با بهره‌گیری از روش اویلر-مارویاما و استفاده از حرکت براونی هندسی با توزیع لوگ نرمال، معادلات استوکاستیک شده برای تغییرات دبی و غلظت لجن به صورت روابط (10) و (11) حاصل می‌گردند:

$$dQ = a_1(\bar{Q} - Q_t)dt + c_1\sigma_Q\sqrt{Q_t}dW_1 \quad (10)$$

$$dS_0 = a_2(\bar{S} - S_e)dt + c_2\sigma_{S_0}\sqrt{S_e}dW_2 \quad (11)$$

که در آن‌ها \bar{Q} دبی متوسط، \bar{S} BOD متوسط برحسب داده‌های مشاهداتی و جزو معلومات مسئله هستند. Q_t و S_e به ترتیب مقادیر دبی و DOB در لحظه t ، dW_i متغیرهای مستقل استوکاستیک به شکل $\sqrt{\delta t}N(0,1)$ برای حرکت براونی با تابع توزیع لوگ نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار یک هستند. a_1 ، a_2 ، c_1 ، c_2 ثابت‌های عددی می‌باشند که مقدار بهینه این ضرایب با آزمون و خطا حاصل می‌شوند و σ انحراف معیار داده‌های مشاهداتی است. برای به دست آوردن اطلاعات تکمیلی به روابط (پ-3) و (پ-4) در بخش پیوست این مقاله مراجعه گردد.

3- نتایج و بحث

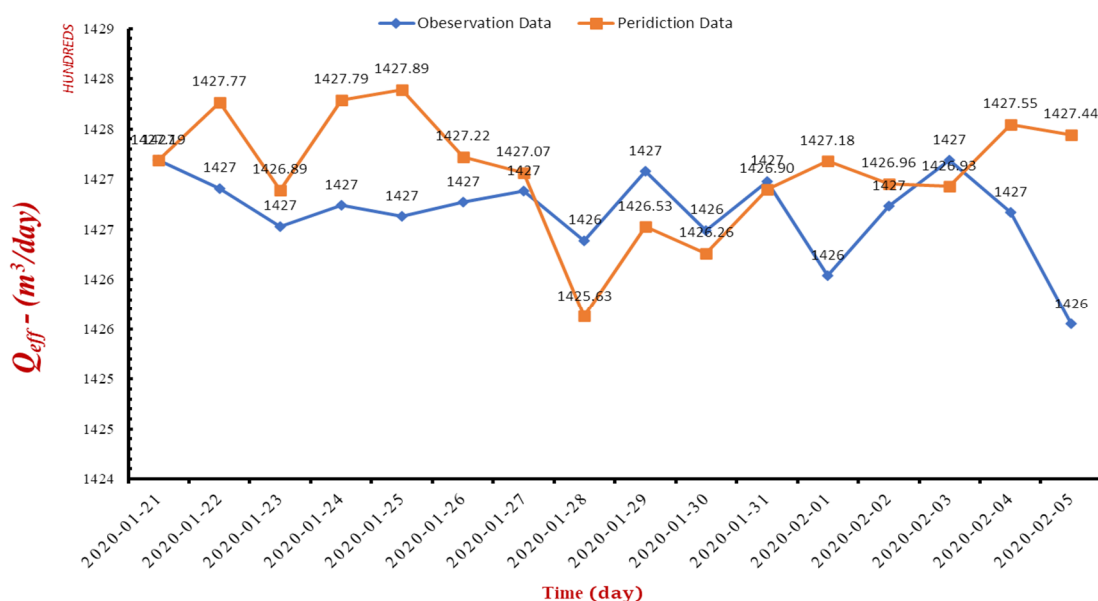
3-1- نتایج مدل‌سازی SDE برای دبی

نوسانات حاکم بر جریان ورودی، به علت الگوی مصرف در زمان‌های مختلف یکی از پارامترهای مدنظر برای اعمال میزان عدم قطعیت بود. وجود معیار تثبیت کننده جریان اجازه جریان‌های آشفته در مواقع

جدول 3- ضرایب بهینه معادلات استوکاستیک برای دبی خروجی تصفیه‌خانه فاضلاب

روز	داده‌های مشاهداتی (m^3/day)	داده‌های رندوم	$\bar{Q} - Q_t$	$\sqrt{Q_t}$	dw_t	داده‌های پیش‌بینی	ضرایب ثابت
1	142719	0/188	57/87	377/78	0/26	142719/00	
2	142691	0/910	-85/57	377/78	-0/42	142776/87	
3	142653	0/484	89/70	377/78	0/41	142689/29	
4	142663	0/532	10/36	377/80	0/04	142779/00	
5	142677	0/711	-66/98	377/84	-0/32	142789/35	
6	142688	0/694	-15/87	377/83	-0/08	142722/38	
7	142639	0/119	-143/5	377/87	-0/68	142706/51	$a_1 = 0035/0$
8	142649	0/037	89/52	377/78	0/41	142563/00	$c_1 = 0/0028$
9	142604	0/681	-26/27	377/80	-0/13	142652/53	$dt = 1 \times 10^{-3} [s]$
10	142673	0/322	63/94	377/76	0/29	142626/25	
11	142719	0/367	27/88	377/65	0/12	142690/19	
12	142667	0/931	-22/33	377/62	-0/11	142718/08	
13	142555	0/390	-2/83	377/64	-0/02	142695/74	
14	142694	0/908	-2/83	377/68	0/28	142692/91	
15	142611	0/019	-10/33	377/75	-0/06	142754/81	
16	142673	0/261	65/27	377/79	0/29	142744/48	

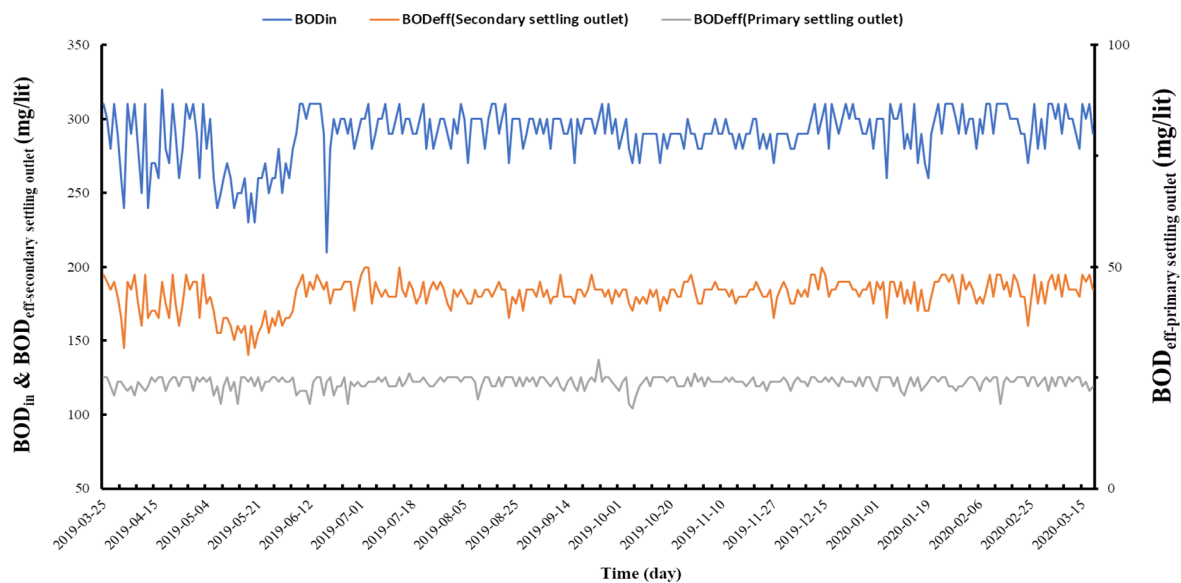
$\sigma_Q = 42/98$

شکل 4- مدل‌سازی Q_{eff} با SDE برای داده‌های مشاهداتی - محاسباتی

نشان داده شده است. برای ایجاد ارتباط معنی‌دار بین داده‌های ورودی و مقادیر حاصل از حرکت براونی بین گام زمانی t_i تا t_{i+1} ، ضرایب عددی معادله (11) توسط آزمون و خطا مشخص و نتایج در جدول (4) ارائه شدند.

3-2- نتایج مدل‌سازی SDE برای BOD

مدل‌سازی متغیر BOD در سه فاز ورودی به تصفیه‌خانه، خروجی ته‌نشینی اولیه و خروجی ته‌نشینی ثانویه برای سال (2019-2020) صورت گرفت. دامنه نوسانی هر متغیر به صورت نمودار خطی برای داده‌های در دسترس برای این سه بخش که عملکرد بیولوژیکی تصفیه‌خانه را مشخص می‌کند، در شکل (5)



شکل 5- نوسانات متغیر BOD در سه فاز مختلف از تصفیه‌خانه فاضلاب

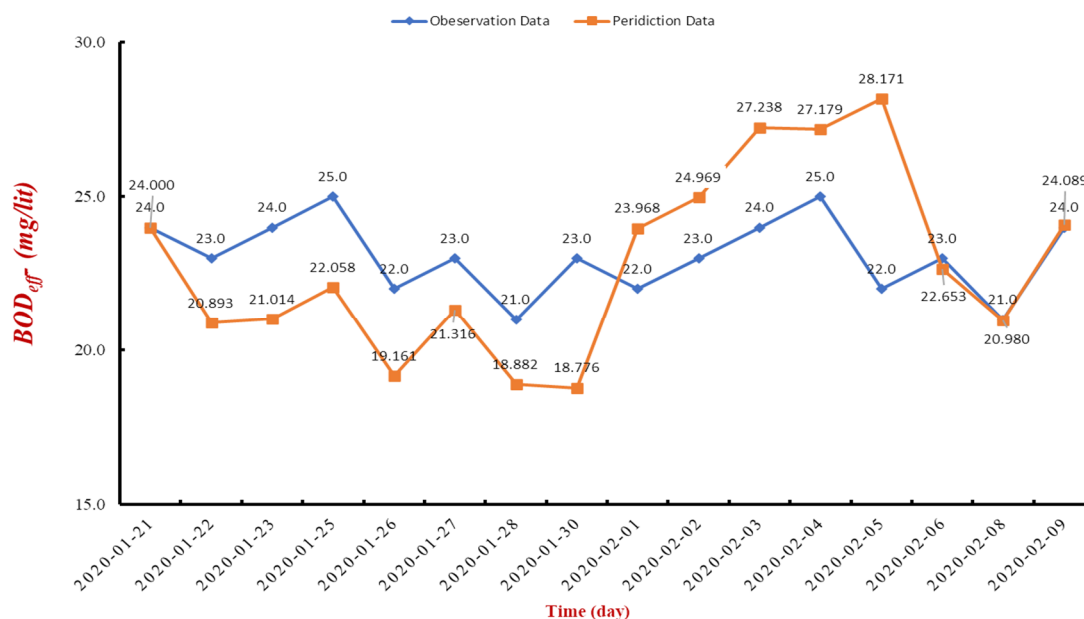
جدول 4- ضرایب بهینه معادلات استوکاستیک برای BOD_{eff} تصفیه‌خانه فاضلاب

روز	داده‌های مشاهداتی (m^3/day)	داده‌های رندوم	$\bar{S} - S_t$	$\sqrt{S_t}$	dw_i	داده‌های پیش‌بینی	ضرایب ثابت
1	24	0/511	-0/9375	4/8990	-0/338	24/000	
2	23	0/307	-0/5002	4/8541	0/000	20/893	
3	24	0/618	-0/0346	4/8059	0/110	21/014	
4	25	0/584	-0/1654	4/8195	-0/343	22/058	
5	22	0/350	-0/2729	4/8307	0/267	19/161	
6	23	0/577	-0/8680	4/8919	-0/300	21/316	
7	21	0/761	0/3462	4/7662	-0/029	18/882	$a_1 = 0/005$
8	23	0/966	0/1595	4/7857	0/677	18/776	$c_1 = 0/7$
9	22	0/481	0/7090	4/7279	0/090	23/968	$dt = 1 \times 10^{-3} [s]$
10	23	0/655	0/7498	4/7236	0/213	24/969	
11	24	0/534	0/9054	4/7071	-0/020	27/238	
12	25	0/315	1/0441	4/6924	0/077	27/179	
13	22	0/653	0/5534	4/7444	-0/504	28/171	
14	23	0/998	1/7057	4/6213	-0/199	22/653	
15	21	0/394	2/1998	4/5676	0/356	20/980	
16	24	0/740	1/8310	4/6078	-0/383	24/089	

$\sigma_s = 1/24$

یک فرآیند فیزیکی با عدم قطعیت‌های مختلف به صورت مدل مفهومی تجزیه و تحلیل کرد. داده‌ها جهت آنالیز معادله (7) در بازه زمانی (2019-2020) برای متغیر BOD_{eff} در مدت 15 روز متوالی با انتخاب رندوم ولی هم‌راستا با Q_{eff} انتخاب شد. نتایج مدل منتخب در شکل (6)، به صورت نمودار مقایسه‌ای برای داده‌های محاسباتی و مشاهداتی ارائه گردیده است.

به علت عملکرد مناسب لجن فعال در بحث تصفیه فاضلاب و دفع پسماند، در جهت بهبود کیفیت فاضلاب تصفیه شده، رصد و تثبیت متغیرهای فیزیکی این بخش از اهمیت بسزایی برخوردار است. بنابراین مسأله کنترل آلودگی را می‌توان با هدف کمینه نمودن خطاهای محاسباتی برای یک پدیده کاملاً استوکاستیک همانند لجن فعال به شکل فرمول‌های ریاضی درآورده و در قالب



شکل 6- مدل سازی BOD_{eff} با SDE برای داده‌های مشاهداتی - محاسباتی

WWTP استفاده می‌شوند. برای این منظور ابتدا شکل استوکاستیک معادلات برای دو پارامتر خروجی یعنی BOD_{eff} و Q_{eff} از سری معادلات خطی بخش لجن فعال استخراج گردیده و سپس ضرایب ثابت بهینه a_i و C_i برای هر دو مدل تعیین شدند که برای Q_{eff} این مقادیر به ترتیب 0/0035 و 0/0028 بودند. در ادامه ضرایب برای BOD_{eff} به ترتیب معادل 0/005 و 0/7 محاسبه شد. برای همگام‌سازی، بیشترین همگرایی در نتایج برای گام‌بندی δt مساوی 0/001 به دست آمد. یکی از معایب این روش عدم توانایی محاسبات دقیق در مقیاس‌های زمانی بلندمدت می‌باشد. علت اصلی آن در اعمال خطا در هر دوره زمانی است که انباشت این خطاها در بلندمدت منجر به خطای فاحشی در مدل‌سازی می‌گردد. اما این روش در بازه‌های زمانی کوتاه مدت توانایی مناسبی جهت رصد نوسانات و فعالیت میکروارگانیسم‌ها و کنترل تغییرات را دارد. از منظر دیگر که نقطه قوت این روش می‌باشد عدم اعمال عدم قطعیت‌های موجود در بحث لجن فعال است که خود جای تأمل دارد و با این روش می‌توان با تقسیم‌بندی زمان‌های طولانی به بازه‌های زمانی کوتاه‌تر محاسبات را انجام داد. عملکرد نهایی روش محاسباتی با استفاده از تحلیل معادلات ODE و SDE هم‌زمان با داده‌های مشاهداتی مقایسه و نتایج در جدول (5) گزارش شده است. با توجه به روند محاسبات در بخش طراحی و استفاده از ODE که موجب اخذ خروجی واحد برای هر متغیر می‌گردد، از متوسط‌گیری داده‌های مشاهداتی و SDE در طی 15 روز برای انجام مقایسه نتایج استفاده شد. نتایج به وضوح نشان‌دهنده قرابت نتایج روش SDE با داده‌های مشاهداتی است.

چون اکثر SDEها، به‌خصوص SDEهای غیرخطی، راه حل‌های تحلیلی ندارند، بنابراین برای شبیه‌سازی محاسباتی، باید به روش‌های عددی متوسل شد. در هنگام مدل‌سازی، نتایج t_i نسبت به t_{i+1} ، به لحاظ ماهیت حرکت براونی و W_i ها، در هر گام متفاوت با مدل‌سازی گام بعدی است. هدف رسیدن به تقریب عددی با راه حل آسان و کمترین خطا بین داده‌های مشاهداتی و محاسباتی، به‌همراه انتخاب ضرایب ثابت بهینه است. در این راستا نتایج تحلیلی نشان‌دهنده همگرایی روش اویلر-مارویاما در اندازه گام‌های کوچک زمانی است. نوسانات ریز معمول در بررسی معادلات SDE عملاً مشاهده نمی‌شود، زیرا فرآیند لجن فعال یک پدیده فیزیکی ماکرو شمرده شده که باعث حذف نویزهای فرآیند وینر می‌گردد. مدل‌های توسعه یافته بر اساس تئوری SDE به‌عنوان مدل‌های نویزدار یکپارچه دو نقش اساسی دارند. اول آن‌که باید اطمینان حاصل کرد که فرآیند حل، ماهیت مارکوفی داشته باشد، بدین ترتیب که S_{i+1} به S_i وابسته باشد. ثانیاً دسته جواب به دست آمده باید به کلاس گسترده‌ای از مارتینگل‌ها⁴ که در نظریه احتمالات دنباله‌ای از بی‌نهایت متغیر استوکاستیک که در زمانی دلخواه از آن، امید ریاضی مقدار بعدی برابر است با مقدار مشاهده شده کنونی را شامل می‌شود (برید لقمانی و محسنی‌مقدم، 1383)، تعلق داشته باشند که تضمین می‌کند فرآیند حل دارای ویژگی‌های حرکت براونی و یا فرآیند وینر می‌باشد. اساس کار بر پایه مدلی با ماهیت فرآیند استوکاستیک است که می‌تواند کمکی شایسته به توسعه مدل‌های مبتنی بر معادلات ODE مرتبه اول خطی بکند که برای تجزیه و تحلیل معادلات بخش لجن فعال

جدول 5- مقایسه نتایج تحلیل داده‌های محاسباتی ODE و SDE با داده‌های مشاهداتی

پارامتر	طراحی با معادلات ODE	میانگین داده‌های مشاهداتی 15 روزه	میانگین داده‌های 15 روزه محاسباتی با SDE
BOD_{eff} [mg/lit]	20	23/0625	22/834
Q_{eff} [mg/lit]	129600	142660/9	142707/5

جمعیت معادل طراحی برای مدول یک تصفیه‌خانه = 612000 نفر*

4- نتیجه‌گیری

بسیاری از پدیده‌های فیزیکی و مهندسی با استفاده از معادلات دیفرانسیل مدل‌سازی می‌شود. آنچه بدیهی است، وجود عدم قطعیت در این موارد است. بنابراین امروزه با افزایش نیاز جهت بررسی و اعمال نوسانات استوکاستیک ناشی از عدم قطعیت در تحلیل‌ها، تعیین عدم قطعیت و استفاده از SDE بیشتر مورد توجه محققان قرار گرفته است. در این راستا، معادلات SDE حاکم بر فرآیند لجن فعال برای تغییرات پارامترهای آلاینده‌گی Q_{eff} و BOD_{eff} به‌عنوان یک فرآیند بیولوژیکی استخراج شد. در ادامه از روش اویلر-ماروایما جهت حل عددی انتگرال ایتو حاصل از SDE و تعمیم آن به نوسانات فرآیند لجن فعال استفاده گردید. نتایج نشان‌دهنده امکان بررسی قسمت بیولوژیکی WWTP با SDE بود اما به‌علت استوکاستیک بودن نتایج به‌دست آمده، با هدف جلوگیری از ایجاد خطاهای تجمعی، به‌عنوان بازه بهینه، داده‌ها در زمان پانزده روزه جهت تعیین متغیرها و ضرایب ثابت در نظر گرفته شد. انتخاب استوکاستیک W_i ها موجب ایجاد مقادیر مثبت و منفی برای هر نقطه محاسباتی گردید که باعث نوسانات شدید در نتایج-های به‌دست آمده می‌شود که این مورد یکی از نقاط ضعف این روش بوده و این نتایج از دسته جواب‌ها تفکیک شدند. نتایج نشان داد که استفاده از SDE برای بازه‌های زمانی بلندمدت همراه با داده‌های زمانی نزدیک به هم به‌دلیل تغییرات ضرایب ثابت نمی‌تواند نتایج مورد قبول ارائه کند و برای طراحی تصفیه‌خانه گزینه مطلوب نخواهد بود.

فاکتورهای محاسباتی و احجام اجرایی پروژه‌های WWTP و بار مالی فزاینده می‌شود. به‌عنوان مثال عدم محاسبه صحیح ضریب حداقل Q_{inf} (دبی ورودی) در مواقع بحرانی باعث ازدیاد زمان ماند در حوض‌های ته‌نشینی و نهایتاً سبب هوادهی بیش از حد و متعاقباً افزایش زمان رسیدن لجن ته‌نشین شده به مرحله نیتریفیکاسیون می‌شود. این عامل در ادامه می‌تواند باعث پدیده رازینگ (بالا آمدن ذرات فشرده شده ته‌نشین شده به سطح فاضلاب) و کاهش کیفیت پساب تصفیه شده گردد.

بنابراین استفاده از این روش جهت رصد نوسانات Q و BOD_{eff} می‌تواند در کنترل رشد و نمو و مرگ‌ومیر میکرو ارگانیسم‌های فعال در بخش ته‌نشینی ثانویه برای بازه‌های زمانی کوتاه مدت جهت کنترل غلظت مؤثر غذایی این میکرو ارگانیسم‌ها که هزینه‌های سربر بالائی برای بهره‌بردار دارد، کارآمد باشد. لازم به‌ذکر است که این روش بر خلاف روش‌های جعبه سیاه مثل مدل‌های هوش مصنوعی که نیازمند تعداد زیادی از داده‌های مشاهداتی برای تحلیل دارند، می‌تواند در کوتاه مدت و با تعداد بسیار کمتری از داده‌های مشاهداتی از سیستم نحوه عملکرد تصفیه‌خانه در بخش لجن فعال را رصد نماید. پیشنهاد می‌شود جهت توسعه روش آنالیز، سایر روش‌های حل معادلات SDE به‌صورت همسو و هم زمان برای مطالعه لجن فعال مورد استفاده قرار گرفته و نتایج مورد مقایسه قرار گیرند.

5- مراجع

- لقمانی‌برید ق، محسنی‌مقدم م، "بررسی روش‌های عددی اویلر-مارایما و میلشتاین برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی"، مجله علوم دانشگاه تهران، 1383، 30 (1)، 23-31.
- مؤمنی ع، کامرانی م، "حل عددی و شبیه‌سازی معادلات رندم با فرایندهای وینر و پواسون مرکب"، پژوهش‌های نوین در ریاضی، 1398، 5، 93-106.
- BECK MB, "Water quality modeling: a review of the analysis of uncertainty", Water Resources Research, 1987, 23, 1393-1442.
<https://doi.org/10.1029/WR023i008p01393>
- Browning AP, Warne DJ, Burrage K, Baker RE, Simpson MJ, "Identifiability analysis for stochastic differential equation models in systems biology", Journal of the Royal Society Interface, 2020, 17,

بررسی عدم قطعیت یک عامل همراه با نتیجه آنالیز عددی است که محدوده مقادیری را معین می‌کند که نتایج آنالیز می‌تواند داشته باشد و مقدار آن نشان‌دهنده سطح اطمینانی است که مقدار واقعی مورد اندازه‌گیری شده در محدوده تعیین شده، قرار می‌گیرد. هدف از بررسی اثر عدم قطعیت با استفاده از SDE برای بخش لجن فعال WWTP ایجاد نگرشی نو برای کاهش خطاهای محاسباتی و افزایش کارایی برای عملکرد میکروارگانیسم‌ها است. در روند معمول طراحی تصفیه‌خانه، محاسبات در یک روند خطی ناشی از مفروضات اولیه حاصل شده و تا حصول نتیجه مطلوب ادامه پیدا می‌کند و نوسانات حاکم بر پدیده فاضلاب از قبیل مواقع بحرانی بارش، رفتار فرهنگی جمعیت نادیده گرفته می‌شود. دانش ناقص برای اعمال نتایج عدم قطعیت موجب ورود ایرادات اساسی در

- SIAM Journal on Scientific Computing, 2005, 27, 1118-1139.
- Zhang L, Cui B, Yuan B, Zhang A, Feng J, Zhang J, Han X, Pan L, Li L, "Denitrification mechanism and artificial neural networks modeling for low-pollution water purification using a denitrification biological filter process", *Separation and Purification Technology*, 2021, 257, 117918. <https://doi.org/10.1137/040615201>
20200652.
<https://doi.org/10.1098/rsif.2020.0652>
- Dexter NC, Webster CG, Zhang G, "Explicit cost bounds of stochastic Galerkin approximations for parameterized PDEs with random coefficients", *Computers and Mathematics with Applications*, 2016, 71, 2231-2256. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.12.005>
- Erfanian HR, Hajimohammadi M, Abdi MJ, "Using the Euler-Maruyama method for finding a solution to stochastic financial problems", *International Journal of Intelligent Systems and Applications*, 2016, 8, 48. <https://doi.org/10.5815/ijisa.2016.06.06>
- Evans LC, "An introduction to stochastic differential equations", American Mathematical Soc., 2012.
- Harris C, "Modelling, simulation and control of stochastic systems with applications in wastewater treatment", *International Journal of Systems Science*, 1977, 8, 393-411. <https://doi.org/10.1080/00207727708942050>
- Higham DJ, "An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations", *SIAM Review*, 2001, 43, 525-546. <https://doi.org/10.1137/S0036144500378302>
- Kabouris JC, Georgakakos AP, "Stochastic control of the activated sludge process", *Water Science and Technology*, 1991, 24, 249-255. <https://doi.org/10.2166/wst.1991.0163>
- Lin SD, "Water and wastewater calculations manual", McGraw-Hill Education, 2014.
- Mauritsson G, "Simulation of wastewater treatment plants modeled by a system of nonlinear ordinary and partial differential equations", *Master's Theses in Mathematical Sciences*, 2013.
- Metcalfe L, "Wastewater engineering: treatment and reuse", Metcalf & Eddy Inc. McGraw-Hill Inc., New York, 2003.
- Richardson M, "Numerical methods for option pricing", University of Oxford, Special topic, 2009.
- Särkkä S, "Recursive bayesian inference on stochastic differential equations", Helsinki University of Technology, 2006.
- Serrano S, "Development of the instantaneous unit hydrograph using stochastic differential equations", *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, 1990, 4, 151-160. <https://doi.org/10.1007/BF01543288>
- Sin G, Gernaey KV, Neumann MB, Van Loosdrecht MC, Gujer W, "Uncertainty analysis in WWTP model applications: a critical discussion using an example from design", *Water Research*, 2009, 43, 2894-2906. <https://doi.org/10.1016/j.watres.2009.03.048>
- Soto J, Infante S, "Ensemble kalman filter and extended kalman filter for state-parameter dual estimation in mixed effects models defined by a stochastic differential equation", *International Conference on 'Knowledge Society: Technology, Sustainability and Educational Innovation'*, 2019, Springer, 285-300. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37221-7_24
- Wylie EB, Streeter VL, "Fluid transients. New York, 1978.
- Xiu D, Hesthaven JS, "High-order collocation methods for differential equations with random inputs",

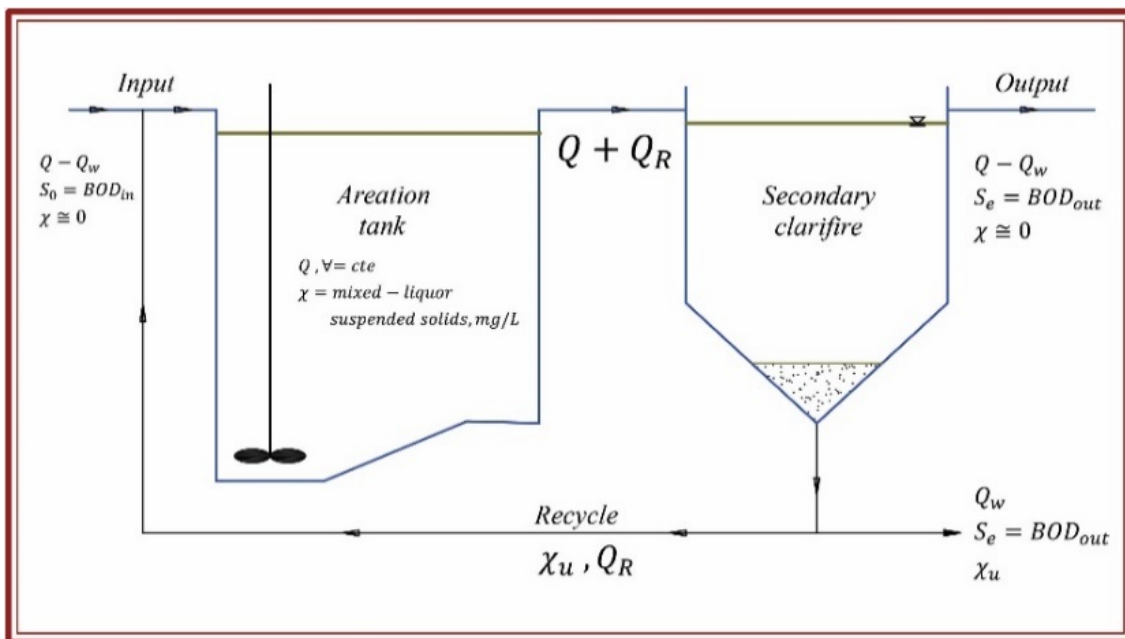
«پیوست»

پ-1) فرآیند لجن فعال

در فرآیند لجن فعال مخلوطی از میکرو ارگانیسم‌ها برای اکسایش مواد آلی موجود در فاضلاب با استفاده از عمل هوادهی و ایجاد اختلاط مناسب در حوض هوادهی به کار می‌روند. وجود لخته‌های میکروبی باعث افزایش راندمان در حوض ته‌نشینی می‌شود. فرآیند لجن فعال در سه بخش اساسی انجام می‌پذیرد:

- راکتور هوادهی با میکرو ارگانیسم‌های معلق که مسئول تصفیه می‌باشند.
 - حوضچه ته‌نشینی با وظیفه جداسازی جامدات کلئیدی و مواد آلی موجود در فاضلاب و ته‌نشین‌سازی لجن بیولوژیکی.
 - سیستم برگشتی برای باز چرخش جامدات تخلیه شده از حوضچه ته‌نشینی به راکتور.
- ویژگی مهم فرآیند لجن فعال، تولید جامدات لخته شده قابل ته‌نشینی است که به وسیله ته‌نشینی ثقلی در حوضچه ته‌نشینی حذف می‌شوند. در بیشتر موارد، فرآیند لجن فعال، با فرآیندهای فیزیکی و شیمیایی در تصفیه مقدماتی و اولیه فاضلاب و تصفیه نهایی از جمله گندزدایی و احتمالاً فیلتراسیون به کار می‌رود. با شروع رشد و تکثیر

میکرو ارگانیسم‌ها مقدار بیشتری از ضایعات فاضلاب حذف شده و به این ترتیب فاضلاب به‌طور مؤثری تصفیه می‌گردد. برای این که سیستم به راندمان قابل قبولی برسد لازم است که نسبت مناسب بین تعداد میکرو ارگانیسم‌ها و میزان غذا و غلظت کافی اکسیژن محلول در سیستم برقرار گردد. فرآیندهای بیولوژیکی برای حذف مواد آلی، محلول کلئیدی و نیتریفیکاسیون بیولوژیکی و حذف بیولوژیکی فسفر ضروری هستند. نحوه عملکرد فرآیند لجن فعال در بخش ته‌نشینی ثانویه در شکل (پ-1)، نشان داده شده است، که در آن، Q ، Q_R و Q_W به ترتیب جریان فاضلاب ورودی، جریان فاضلاب برگشتی به راکتور بیولوژیکی با غلظت X_u و جریان فاضلاب خروجی از سیستم (مترمکعب بر روز)، V حجم حوض یا همان حجم راکتور (مترمکعب)، X غلظت زیست توده (واحد حجم/جرم)، X_u غلظت نهایی زیست توده (واحد حجم/جرم)، S_0 غلظت سوبسترای ورودی در زمان t_0 معادل BOD_{in} ، S_e غلظت سوبسترای خروجی در زمان t معادل BOD_{eff} با واحد (mg/lit)، که توسط سازمان محیط زیست به جهت رعایت ضوابط کنترل زیست محیطی ارائه می‌شود. هدف اصلی این واحد جدا کردن حجم زیادی از مواد معلق (MLSS) خروجی از استخر هوادهی و تولید جریان زلال و پایدار با غلظت کم TSS و BOD می‌باشد.



شکل 1-پ) دیاگرام بخش بیولوژیکی تصفیه‌خانه فاضلاب مبتنی بر روش لجن فعال (Metcalف، 2003)

پ-2) معادلات SDE

نموده و معمولاً این گونه از معادلات به صورت انتگرال استوکاستیک $I\hat{t}o$ بیان می‌شوند. شکل کلی SDE در رابطه (پ-1)، نشان داده شده است (Erfanian و همکاران، 2016).

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dW_t \quad (\text{پ-1})$$

فضای احتمالاتی برای یک پدیده استوکاستیک، فرآیند وینر مسیری پیوسته در یک گام زمانی مشخص با $W(t_i)$ متغیرهای مستقل است. به‌خاطر وجود جملاتی برحسب فرآیندهای وینر در انتگرال استوکاستیک مربوطه جواب آن‌ها برحسب t ، مشتق‌پذیر

این که در مدل سازی پارامترهای تصفیه خانه، بخش لجن فعال و لاگون های هوادهی، سیستم به صورت پیش رونده بوده و مقادیر اندازه گیری شده منفی نخواهند بود، از حرکت براونی با توزیع لوگ نرمال⁷ که تنها مقادیر غیرمنفی را اخذ کرده، استفاده شد. برای تغییرات dS_t این سیستم از فرآیند بازگشتی رابطه (پ-3)، پیروی خواهد کرد.

$$dS_t = a(b - S_t)dt + c\sqrt{S_t}dW_t \quad (\text{پ-3})$$

که a ، b و c به عنوان ضرایب ثابت عددی هستند که از مدل هال- وایت⁸ تبعیت می کنند (Higham, 2001). dW_t تغییرات حرکت براونی و S_t جوابی صریح از معادله بلک- شولز که فرمی کلی تر از رابطه (7) می باشد. از رابطه (پ-4) قابل محاسبه است.

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \quad (\text{پ-4})$$

به طوری که μ میانگین و σ^2 واریانس داده ها، σ انحراف معیار و W_t فرآیند احتمالاتی وینر در هر گام زمانی از δt است.

که در آن X_t متغیرها در میدان d - بعدی و f ضریب رانش⁵، g ضریب انتشار⁶ ماتریس $(d \times m)$ - بعدی، W_t فرآیند وینر m - بعدی می باشد. برای تعریف انتگرال $I\hat{t}o$ با گام زمانی مشخص و با شرط $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$ یک افراز از بازه $[t_0, T]$ و $\lambda_n = \max(t_i, t_{i+1})$ در نظر گرفته می شود. در این صورت انتگرال $I\hat{t}o$ به صورت رابطه (پ-2) قابل تعریف است.

$$Y_t(t) = \int_{t_0}^T g(s, X_s) dW_s$$

$$= \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(t_{i-1}^*, X_{t_{i-1}}) (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \quad (\text{پ-2})$$

$$; t_{i-1}^* = t_{i-1}$$

اگر g تابعی اندازه پذیر و $\int_{t_0}^T E(|g(s, X_s)|^2) ds \leq \infty$ باشد حد فوق و در نتیجه انتگرال $I\hat{t}o$ موجود است. برای حل عددی SDE در این مطالعه از روش اویلر- مارویاما استفاده شده است (بریدلقمانی و محسنی مقدم، 1383). حرکت براونی هندسی اغلب برای تشخیص تحلیل تکنیکال متغیرهای استوکاستیک و مقادیر مثبت و منفی را شامل می شود (مؤمنی و کامرانی، 1383). نظر به

7. Log-Normally distribute

8. Hull and White risk natural stochastic volatility model

5. Drift Coefficient

6. Diffusion Coefficient

EXTENDED ABSTRACT

Use of Stochastic Differential Equations in Investigating the Uncertainties Related to the Operation of the Activated Sludge Wastewater Treatment Plant

Vahid Nourani ^{a,*}, Reza Shahidi Zounouz ^a, Mehdi Dini ^b

^a Faculty of Civil Engineering, University of Tabriz, Tabriz 5166616471, Iran

^b Faculty of Engineering, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran

Received: 30 December 2022; Review: 20 April 2023; Accepted: 24 April 2023

Keywords:

Activated Sludge Unit, Uncertainty, Brownian motion, Wiener process, Tabriz Wastewater Treatment Plant.

1. Introduction

In the present paper, the uncertainty analysis for the activated sludge part in the wastewater treatment plant (WWTP) was done using stochastic differential equation (SDE) equations. Euler-Maruyama method was selected for the numerical solution of the Itô integral and the results were compared and analyzed with observational data.

2. Methodology

2.1. Case Study area and data

The wastewater treatment plant of Tabriz city was selected as a study case, its location is shown in figure (1). The data of the 15-day period during the year (2019-2020) was considered for analysis.

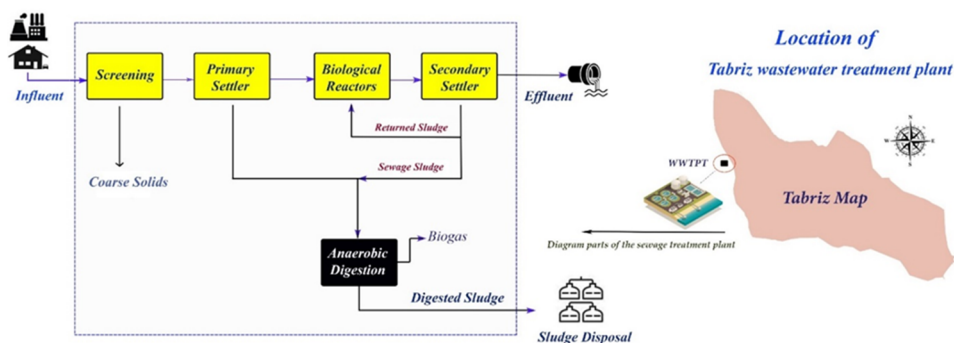


Fig. 1. Location and performance diagram of Tabriz wastewater treatment plant

In this research, uncertainty was investigated on pollution indicators such as BOD and Q for the biological section of WWTP. The statistical data for the variables of the biological sector and the behavior of the changes

in the input and output flow to the WWTP during a one-year period (2019-2020) in 15 day's were recorded and analyzed.

2.2. Activated sludge process and SDE equations

Biological processes are necessary for the removal of organic matter, colloidal solution and biological nitrification and biological phosphorus removal. The main purpose of this unit is to separate a large volume of mixed liquor suspended solids (MLSS) from the aeration pool and produce a clear and stable flow with low concentration of total suspended solids (TSS) and biochemical oxygen demand (BOD) (Metcalf, 2003). The behavior of the activated sludge process can be investigated with differential equations (Kabouris and Georgakakos, 1991) but the investigation of uncertainty for the pollution parameters of the biological treatment section with SDE would certainly complement ODE. Therefore, in this article, SDE has been used to investigated the uncertainties related to the activated sludge part and the biological parameters of the output or inside the system (Harris, 1977). The performance of calculations is shown schematically in figure (2).

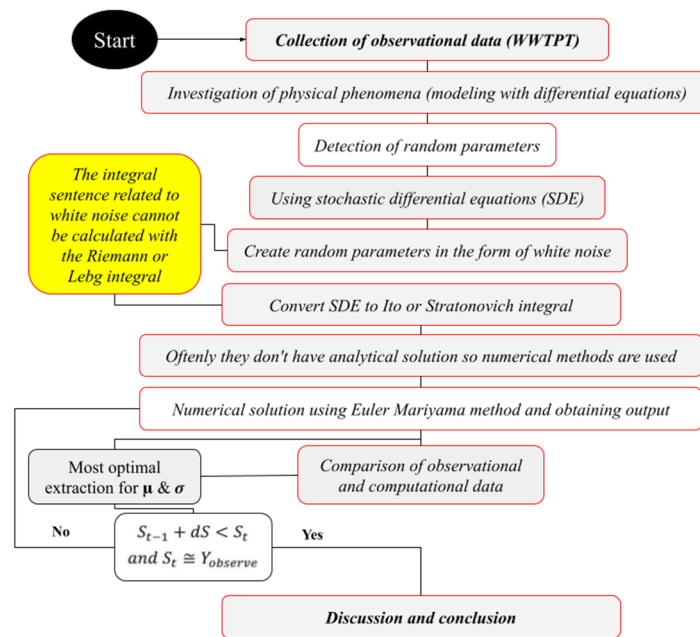


Fig. 2. Diagram of solving SDE equations

3. Results and discussion

3.1. SDE Extraction for Activated Sludge

The probability space for a random phenomenon is a Wiener process with a continuous path in a certain time step with $W(t_i)$ independent variables. Due to the presence of sentences in terms of wiener processes in the corresponding stochastic integral, their solution is not derivable in terms of t, and usually these types of equations are expressed in the form of stochastic integral $I\hat{t}o$ (Erfanian et al., 2016). The generalization of the law of conservation of mass and continuity for the activated sludge section follows from equation (1) (Metcalf, 2003).

$$\forall \frac{dX}{dt} = Qy(S_0 - S_e) + Q_w X_u + k_d \forall X \tag{1}$$

So that X biomass concentration (mg/lit), \forall reactor volume (m3), S_e output substrate concentration at time t (mg/lit), S_0 input substrate concentration at time t_0 , Q_w wastewater flow back to the biological reactor with concentration X_u , The stochastic form of activated sludge equations can be seen in equations (2) and (3). k_d is the weight of the biological mass that is lost per unit of time (day⁻¹). Using the Euler-Maruyama method and using geometric Brownian motion with log-normal distribution, the stochastic equations for flow rate and sludge concentration changes are obtained as relations (2) and (3) which are chosen by trial and error.

$$dQ = a_1(\bar{Q} - Q_t)dt + c_1\sigma_Q\sqrt{Q_t}dW_1 \tag{2}$$

$$dS_0 = a_2(\bar{S} - S_e)dt + c_2\sigma_{S_0}\sqrt{S_e}dW_2 \tag{3}$$

So that σ standard deviation is preferable to variance because it is the same dimension as observational data. dW_i random independent variables in the form $\sqrt{\delta t}N(0,1)$ for Brownian motion with distribution function between intervals (0,1). a_i & c_i constant coefficients.

3.2. SDE modeling results for Q

After deriving the SDE equations for the activated sludge part of WWTP, the results of constant coefficients a_i and c_i for Q_{eff} were found to be 0.0035 and 0.0028, respectively, with δt equal to 0.001. The comparison chart of observed values with calculations in figure (3-a) it has been shown. The convergence of the numerical results of the SDE equations for BOD_{eff} was calculated as 0.005 and 0.7 with δt equal to 0.001, which is shown in Figure (3-b).

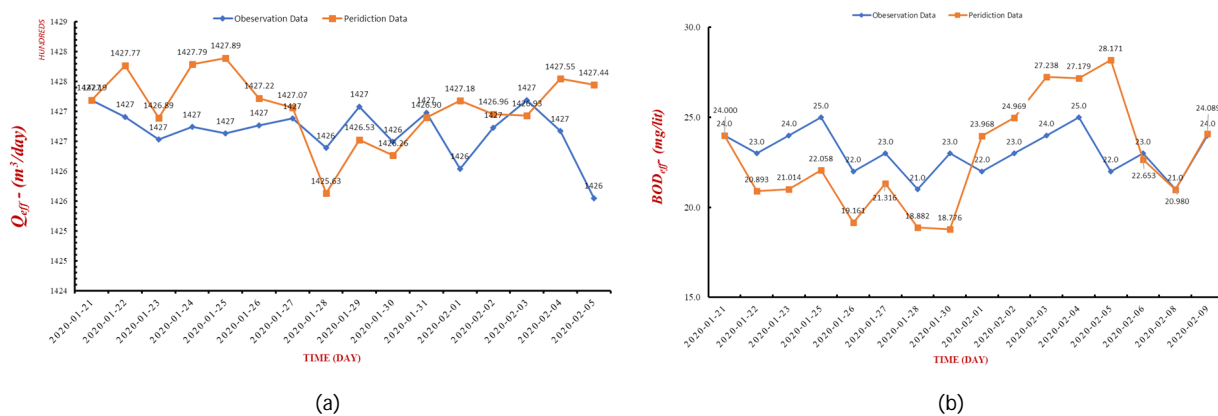


Fig. 3. (a) Modeling Q_{eff} with SDE for observed-computed data, (b) modeling BOD_{eff} with SDE for observed-computed data

4. Conclusions

Nowadays, the investigation of uncertainty in physical and engineering phenomena and the use of SDE have been more attention of researchers. Therefore, the analysis of the activated sludge process was carried out using these equations and monitoring observing changes in the pollution parameters, Q_{eff} and BOD_{eff} , as a biological process after extracting the relevant equations for a period of 15 days from the data (2019-2020). The period of 15 days was chosen to prevent the entry of wrong information due to cumulative errors. The results show the possibility of monitoring the fluctuations of the biological part of WWTP with SDE. One of the advantages of this method is reducing economic costs and observing changes in short periods of time.

5. References

Erfanian HR, Hajimohammadi M, Abdi MJ, "Using the euler maruyama method for finding a solution to stochastic financial problems", International Journal of Intelligent Systems and Applications, 2016, 8, 48. <https://doi.org/10.5815/ijisa.2016.06.06>

Harris C, "Modelling, simulation and control of stochastic systems with applications in wastewater treatment", International Journal of Systems Science, 1977, 8, 393-411. <https://doi.org/10.1080/00207727708942050>

Kabouris JC, Georgakakos AP, "Stochastic control of the activated sludge process", Water Science and Technology, 1991, 24, 249-255. <https://doi.org/10.2166/wst.1991.0163>

Metcalf L, "Wastewater engineering: treatment and reuse", Metcalf & Eddy Inc. McGraw-Hill Inc., New York, 2003.