

تحلیل دینامیکی اندرکنش سد و مخزن به روش اویلر - لاگرانژی با در نظر گرفتن لایه کاملاً سازگار (PML) در مرز انتشاری مخزن

رضا تازی‌نژاد^{۱*} و سجاد پیربوداکی^۲

^۱ استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تبریز

^۲ دانشجوی دوره دکترای سازه‌های هیدرولیکی، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تبریز

چکیده

حل مسئله اندرکنش سد و مخزن از دیرباز مورد توجه مهندسين عمران بوده است. با گسترش کامپیوترها و ارائه روش اجزای محدود، تحول شگرفی در زمینه حل این سیستم‌ها به وجود آمد. از آن جا که حل چنین سیستم‌هایی نیاز به اعمال شرایط مرزی مناسب دارند، لذا ارائه شرایط مرزی مناسب به خصوص در مرز انتشاری مخزن همواره مورد توجه محققین بوده است. لایه کاملاً سازگار (PML) اخیراً به عنوان یک شرط مرزی مناسب برای مرز دوردست (مرز انتشار امواج) معرفی شده است. در این مقاله، این نوع شرط مرزی در مرز انتشاری مخزن به کار گرفته شده است. برای این منظور ابتدا مفاهیم پایه شرط مرزی PML بیان شده، سپس روند پیاده‌سازی این شرط مرزی با استفاده از روش اجزای محدود ارائه شده است. به منظور، تحلیل دینامیکی سیستم سد و مخزن کد اجزای محدودی در محیط نرم‌افزار MATLAB توسعه یافته و تحلیل‌های پارامتری روی سیستم اندرکنشی سد و مخزن با استفاده از این شرط مرزی و نیز شرط مرزی سامرفلد برای تعیین بهینه ضریب تابع کاهنده انجام شده است. نتایج نشان می‌دهند که استفاده از شرط مرزی لایه کاملاً سازگار (PML) در مقایسه با شرط مرزی سامرفلد نیاز به مدل کردن مخزن تا ۵۰٪ کمتر برای یک دقت یکسان دارد که منجر به کاهش زمان محاسبات خواهد شد.

واژگان کلیدی: اندرکنش سد و مخزن، لایه کاملاً سازگار (PML)، روش اجزای محدود، مرز انتشاری مخزن، رویکرد اویلر - لاگرانژی.

۱- مقدمه

به منظور محاسبه دقیق فشار آب مخزن به بدنه سدهای بزرگ لازم است علاوه بر فشارهای هیدرواستاتیک، اثرات فشار هیدرودینامیکی در حین زلزله نیز به صورت مناسب برآورد گردد. این مسئله با عنوان اندرکنش دینامیکی سد و مخزن در حین زمین‌لرزه مطرح شده و عاملی عمده در طراحی سدهای جدید و برآورد ایمنی سدهای موجود در نواحی زلزله‌خیز می‌باشد.

از سال ۱۹۲۸ و به دنبال شکست سد سنت فرانسیس^۱ در کالیفرنیا، مشکلات خرابی سدهای بزرگ توجه بسیاری را به خود جلب نمود و زمینه‌ساز انجام تحقیقاتی گسترده در این زمینه شد. بررسی حوادث متعددی که از آن زمان تاکنون برای انواع مختلف سدها در بسیاری از نقاط جهان رخ داده اهمیت این موضوع را به خوبی نشان می‌دهد. در این زمینه می‌توان به دو سد بتنی هسین فنگ کیانگ^۲ در چین و کوینا^۳ در هند اشاره نمود که در دهه ۱۹۶۰ در اثر زلزله، آسیب‌های جدی به آن‌ها وارد گردید. نمونه دیگر، سد سفیدرود است که در زلزله سال

۱۳۶۹ دچار آسیب‌دیدگی شد. امروزه به دلیل قابلیت روش اجزای محدود در تعریف مدل‌های ریاضی با اشکال هندسی پیچیده و مصالح مختلف، در مدل‌سازی سدهای بتنی معمولاً از این روش استفاده می‌شود از این رو انتخاب آن برای حل معادلات مخزن می‌تواند هماهنگی مناسبی بین روش‌های حل معادلات سد و مخزن پدید آورده و به میزان زیادی از پیچیدگی مسئله بکاهد. اما مدل کردن مخازن بزرگ و نامحدود با این روش با دشواری‌هایی همراه است. از آن‌جا که گنجاندن کل مخزن در مدل کاری پر هزینه و غیر عملی است، ناگزیر باید مدل را در فاصله مناسبی از بدنه سد قطع نمود.

در هنگام زلزله، امواج فشاری هیدرودینامیک ایجاد شده در آب به سمت بالادست مخزن منتشر شده و همراه با خود انرژی را از محیط دور می‌کنند. اما در مدل اجزای محدود، این مرز قطع شده در حالت عادی با جلوگیری از انتشار امواج، موجب انعکاس آن‌ها به داخل محیط می‌شود. در نتیجه باید با اعمال یک شرط مرزی انتشاری مناسب در این ناحیه، مدل عددی مخزن را تا حد ممکن کوچک گرفت به شرطی که دقت مسأله از بین نرود.

تحقیقات متعددی برای افزایش دقت شرایط مرزی استفاده شده در مرز قطع شده مخزن و پی انجام گرفته و شرایط مرزی متعددی برای این منظور پیشنهاد شده است. لازم به ذکر است

1- Saint Francis
2- Hsin Feng kuang
3- Koyna

Sharan [۱۰] برای ناحیه قطع شده، یک شرط مرزی غیر انعکاسی ارائه نموده است. این روش با وجود سادگی نتایج نسبتاً خوبی داده و در مقایسه با سایر روش‌های متعارف به مدل کردن ناحیه کوچکتری از مخزن نیاز دارد.

Watanabe و همکاران [۱۱] در تحقیقی برای این ناحیه از یک مرز لزج استفاده کرده‌اند. آنان در این روش اثرات جذب انرژی در رسوبات کف مخزن را نیز منظور نموده‌اند.

از روش المان مرزی نیز برای مدل کردن سد و مخزن استفاده شده است. Tsai و همکاران [۱۲] در مقالات متعدد خود برای تحلیل سیستم سد-مخزن در حوزه زمان به ارائه یک مرز انتشاری برای ناحیه دور مخزن پرداختند. Seghir و همکاران [۱۳] با استفاده از ترکیب اجزای محدود و مرزی همچنین Wang و همکاران [۱۴] با استفاده از اجزای‌های مرزی از مراتب بالاتر به بررسی اندرکنش سد و مخزن پرداخته‌اند.

از کارهای جدید در این زمینه با استفاده از شرط‌های مرزی متفاوت کاربردی نیز می‌توان به Gogoi و همکاران [۱۵] و همچنین Samii و همکاران [۱۶] اشاره کرد.

PML شرط مرزی نسبتاً جدیدی است که نخستین بار در حوزه الکترومغناطیس معرفی شد [۱۷]. Chew و Weedon [۱۸] بلافاصله نشان دادند که معادله PML اولیه در واقع یک تغییر متغیر در حوزه فرکانس است. اندک زمانی پس از آن به سرعت در اکثر شاخه‌های مهندسی PML در مرزهای انتشار امواج به منظور مستهلک کردن آنها استفاده شد. اولین بار Chew و Liu [۱۹] از این روش برای معادلات الاستودینامیک استفاده کردند. Chopra و Basu [۲۰، ۲۱] با استفاده از این روش به تحلیل سیستم اندرکنشی سد و پی پرداختند.

Mehdizadeh و Paraschivoiu [۲۲] با استفاده از روش اجزاء محدود طیفی و اعمال لایه جذب PML به معادله هلمهولتز استاتیکی نشان دادند که امواج ورودی به این لایه کاملاً میرا می‌شوند. Harari و Albocher [۲۳] با ارائه یک تابع کاهنده وابسته به خصوصیات سیستم برای PML، کارایی آن را با حل چند مثال ساده‌ی معادلات موج الاستیک نشان داده‌اند. Fajardo و Papageorgiou [۲۴] با توجه به این که معادلات PML در حوزه زمان با انتگرال‌های پیچیده‌ی کانولوشن همراه است، به بررسی پایداری روش‌های مبتنی بر حل نکردن این انتگرال‌ها پرداخته‌اند. Kucukcoban و Kallivokas [۲۵] در یک محیط غیرهمگن، پارامترهای دخیل در PML مثل موقعیت منبع موج، ابعاد محیط اصلی و محیط جاذب و وجود لایه‌های

از آن‌جا که اعمال این شرایط مرزی در مسائل اندرکنشی سد و مخزن در فواصل کم یک نوع تقریب به حساب می‌آید، لذا این تحقیقات همچنان در جهت افزایش دقت شرایط مرزی پیشنهادی و بهینه کردن طول مورد نیاز مخزن برای کاهش هزینه و زمان تحلیل آن‌ها روی مدل‌های عددی ادامه دارد.

Westergaard [۱] اولین کسی بود که در سال ۱۹۳۳ فشار هیدرودینامیک آب را بر روی سدهای بتنی تحت تأثیر حرکت هارمونیک افقی زمین محاسبه کرد. وی توزیع فشار را برای فرکانس‌های کوچک به دست آورد. در این فرکانس‌ها، تراکم‌پذیری سیال تأثیر ناچیزی دارد از این رو می‌توان اثر فشارهای هیدرودینامیک را با جرم افزوده معادل دانست. در سال ۱۹۵۳، دو محقق به نام‌های Zangar و Haefeli [۲]، مقادیر فشار هیدرودینامیکی وارد بر سدها را توسط روش شبیه‌سازی الکتریکی به دست آوردند. سپس Kotsubo [۳] به بررسی این مسائل پرداخت و نشان داد که حل وسترگارد تنها برای ارتعاشاتی با فرکانس کمتر از فرکانس طبیعی مخزن صادق است. مسأله دو بعدی تعیین فشارهای هیدرودینامیک بر روی یک سد صلب توسط Chopra [۴] دنبال شد. وی با بررسی تأثیر تراکم‌پذیری آب بر پاسخ فشار هیدرودینامیک مخزن نشان داد که برای سیال تراکم‌ناپذیر، حل وسترگارد برای تمام فرکانس‌های بارگذاری صادق است. اما در سدهای بلند، تأثیر تراکم‌پذیری آب بر پاسخ فشار هیدرودینامیک در فرکانس‌های بالا قابل توجه می‌باشد. Chopra و همکاران [۵] سپس مدل خود را به سد انعطاف‌پذیر با در نظر گرفتن اندرکنش سد و مخزن گسترش دادند.

در سال ۱۹۸۱، Chopra و Chakrabarti [۷] روشی عمومی بر اساس زیرسازه‌ها برای تحلیل پاسخ سدهای بتنی وزنی با استفاده از روش اجزاء محدود تحت اثر مؤلفه‌های افقی و عمودی زلزله ارائه دادند.

Zienkiewicz و همکاران برای مدل کردن ناحیه دور در مخازن نامحدود، شرط مرزی سامرفلد [۸] را برای ایجاد یک مرز انتشاری در ناحیه قطع شده معرفی کردند. در واقع شرط سامرفلد مانند قرار دادن تعدادی میراگر در انتهای دور دست عمل می‌کند و در مدل‌سازی‌های نرم‌افزاری چندین میراگر در مرز مورد نظر قرار داده می‌شود. با وجود دقت شرط مرزی سامرفلد، مشکل این شرط نیاز به مدل‌سازی حجیم مخزن بود.

Saini و همکاران [۹] برای ناحیه دور در مخازن نامحدود از اجزاء نامحدود استفاده کرده‌اند. توابع شکل این اجزاء نامحدود دارای میرایی نمایی هستند.

معروفترین آن‌ها روش ریتز- گالرکین است. بر اساس این روش شکل تضعیف شده^۲ رابطه (۲) به دست می‌آید [۲۶]:

$$\int_{\Gamma} \nabla^T W K \nabla P d\Gamma + \int_{\Gamma} W \rho \ddot{P} d\Gamma - \int_{s_q} W K (\nabla P)^T n ds = 0 \quad (3)$$

در رابطه فوق W تابع وزن است. با تعریف توابع انترپولاسیون N_i می‌توان فشار هیدرودینامیک در محیط مخزن را به شکل زیر تقریب زد:

$$p = \sum_{i=1}^m N_i P_i \quad (4)$$

M تعداد گره‌ها است و از آن جایی که در محیط سیال، فشار هیدرودینامیک مجهول گرهی است و هر گره تنها یک درجه آزادی دارد، لذا m مساوی تعداد درجات آزادی سیال نیز خواهد بود. با انتخاب توابع انترپولاسیون به عنوان تابع وزنی رابطه (۳) به شکل زیر تبدیل می‌شود [۲۶]:

$$\int_{\Gamma} \nabla^T N_j \nabla P d\Gamma + \frac{\rho}{K} \int_{\Gamma} N_j^T \ddot{P} d\Gamma = \int_{s_q} N_j^T \frac{\partial p}{\partial n} ds, j=1, m \quad (5)$$

دستگاه معادله فوق، m معادله به دست می‌دهد که برای m مجهول بردار P کافی است با جای‌گذاری P از رابطه (۴) در رابطه (۵) می‌توان دستگاه m معادله m مجهولی فوق را به شکل زیر نشان داد:

$$\left[\int_{\Gamma} \nabla^T N \nabla N d\Gamma \right] p + \left[\frac{1}{c^2} \int_{\Gamma} N^T N d\Gamma \right] \ddot{p} - \int_{s_q} N^T \frac{\partial p}{\partial n} ds = 0 \quad (6)$$

انتگرال‌های داخل کروشه به ترتیب با H و E نشان داده می‌شوند:

$$H = \int_{\Gamma} \nabla^T N \nabla N d\Gamma \quad (7)$$

$$E = \frac{1}{c^2} \int_{\Gamma} N^T N d\Gamma \quad (8)$$

مختلف را بررسی کرده و برخی پیشنهادات کاربردی حاصل از تحلیل نتایج ارائه کرده‌اند.

در تحقیق حاضر، این شرط مرزی در محیط مخزن سد در مرز انتشاری استفاده شده و کارایی این روش برای مستهلک کردن امواج فشاری هیدرودینامیک منتشر شده در محیط مخزن ناشی از اثر اندرکنش سد و مخزن در موقع زمین‌لرزه مورد ارزیابی قرار گرفته است. بدین منظور کد کامپیوتری مناسبی به زبان MATLAB برای تحلیل سیستم اندرکنشی سد و مخزن با رویکرد اویلر-لاگرانژی توسعه داده شده است. برای بررسی صحت کد نوشته شده، نتایج حاصل از کد توسعه یافته حاضر با نتایج حاصل از تحقیقات گذشته با استفاده از شرط سامرفلد برای سد پایین فلت،^۱ مقایسه شده‌اند و پس از اطمینان از صحت کد توسعه یافته، تحلیل‌های پارامتری روی سیستم اندرکنشی سد و مخزن با استفاده از شرط مرزی PML و نیز شرط مرزی سامرفلد برای تعیین بهینه ضریب تابع کاهنده انجام شده است.

۲- معادلات دینامیکی حاکم بر محیط سد و مخزن

۲-۱- معادلات دینامیکی حاکم بر محیط مخزن

معادلات دیفرانسیل حاکم بر انتشار امواج فشار هیدرودینامیک در محیط مخزن جزء دسته معادلاتی موسوم به معادلات شبه هارمونیک^۲ است که به شکل زیر بیان می‌شوند:

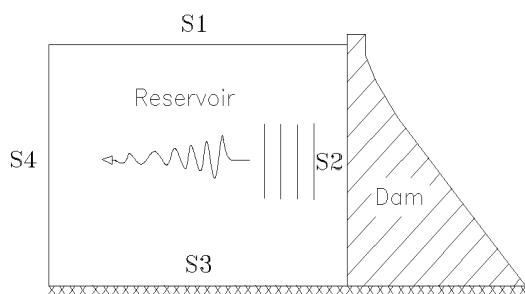
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \left(H - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (1)$$

در معادله فوق، K مدول ارتجاعی سیال، ρ جرم حجمی سیال، φ تابع پتانسیل و μ مدول برشی سیال است. معادله هلمهولتز حالت خاصی از معادله (۱) می‌باشد که با فرض ایزوتروپ بودن محیط و صرف نظر از μ و H و انتخاب فشار به عنوان کمیت مورد نظر به شکل معادله (۲) به دست می‌آید:

$$\nabla^T K \nabla P - \rho \ddot{P} = 0 \quad (2)$$

در معادله فوق، K مدول ارتجاعی سیال، ρ جرم حجمی سیال و P فشار هیدرودینامیک است.

در روش المان‌های محدود برای حل معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی معین از روش‌های تقریبی استفاده می‌شود که



شکل ۱- مدل شمانیک سد و شرطهای مرزی

۲-۲- معادله دینامیکی حاکم بر محیط سازه

دستگاه معادلات دینامیکی حاکم بر حرکت سازه را می‌توان به شکل زیر نشان داد [۲۷]:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F(t) \quad (16)$$

که در آن M ، C و K به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی و u ، \dot{u} و \ddot{u} به ترتیب بردار تغییر مکان نسبی، سرعت نسبی و شتاب نسبی سازه‌اند. همچنین $F(t)$ تابع نیروهای وارده می‌باشد.

۲-۳- روش حل معادلات کوپله سیستم

معادلات کوپله سیستم سد و مخزن در فرمولاسیون اوپلر لاگرانژ به شکل زیر می‌باشد [۲۴]:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = -QP - M\ddot{u}_g \quad (17)$$

$$E\ddot{P} + A\dot{P} + HP = -\rho Q^T (\ddot{u} + \ddot{u}_g) \quad (18)$$

دستگاه معادلات فوق را می‌توان به شکل ماتریسی رابطه (۱۹) نوشت:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ \rho Q^T & E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta} \\ \ddot{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & Q \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ p \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M\ddot{u}_g \\ \rho Q^T \ddot{u}_g \end{Bmatrix} = 0 \quad (19)$$

همان طور که مشاهده می‌شود ماتریس‌های ضرایب دستگاه فوق نامتقارن و غیرنواری هستند و حل هم‌زمان این معادلات نیازمند کامپیوترهای با حافظه فعال زیاد است و نیز بسیار

در روابط اخیر، H ماتریس شبه سختی و E ماتریس شبه جرم سیال است.

برای محاسبه جمله سوم رابطه (۶) از شرایط مرزی محیط سیال استفاده می‌کنیم:

$$\int_{S_q} N^T \frac{\partial p}{\partial n} ds = \sum_{i=1}^4 \int_{S_i} N^T \frac{\partial p}{\partial n} ds \quad (9)$$

با اعمال شرایط مرزی نهایتاً دستگاه معادلات دینامیکی حاکم بر انتشار امواج فشار هیدرو دینامیک در محیط مخزن به شکل زیر نشان داده می‌شود:

$$E\ddot{P} + A\dot{P} + HP = R^f \quad (10)$$

$$E = \frac{1}{c^2} \int_{\Gamma} N^T N d\Gamma \quad (11)$$

$$A = \frac{1}{c} \int_{S_1} N^T N ds \quad (12)$$

$$H = \int_{\Gamma} \nabla^T N \nabla N d\Gamma + \frac{\pi c}{2h} A \quad (13)$$

$$R^f = -\rho Q^T (\ddot{u} + \ddot{u}_g) \quad (14)$$

$$Q^T = \int_{S_4} N^T n \bar{N} ds \quad (15)$$

در روابط فوق، N و \bar{N} به ترتیب توابع انترپولاسیون در المان-های محیط سیال و سازه می‌باشند و n بردار عمود بر سطح مشترک بین سد و مخزن است پارامترهای c ، g ، h و ρ به ترتیب سرعت امواج فشار در محیط مخزن، شتاب ثقل، ارتفاع مخزن و جرم حجمی سیال می‌باشند. اگر مرزهای محیط سیال از خطوط مستقیمی تشکیل شده باشند، انتگرال $\int_{S_1} N^T N ds$ به طور خطی متناسب با طول مرز تحت انتگرال خواهد بود که در نتیجه ماتریس‌های A و Q به ترتیب متناسب با طول مرزهای S_2 و S_4 در شکل (۱) خواهند بود. انتگرال $\int_{\Gamma} N^T N d\Gamma$ نیز به طور خطی متناسب با مساحت ناحیه تحت انتگرال خواهد بود که در نتیجه ماتریس E متناسب با مساحت محیط سیال خواهد بود. ماتریس شبه سختی سیال H عمدتاً تابعی از هندسه یا به عبارتی نسبت طول به عمق مخزن است [۲۶]. لازم به ذکر است با حذف ترم دوم رابطه (۱۳)، شرط شاران به شرط سامرفلد تبدیل می‌شود.

نوسانی می‌باشند که این نوسانات تا بی‌نهایت ادامه دارد. حال اگر به جای در نظر گرفتن x در مختصات حقیقی، این متغیر در مختصات ترکیبی حقیقی و موهومی در نظر گرفته شده و یک ترم موهومی به معادله افزوده شود، مشاهده می‌گردد که امواج مستهلک می‌شوند علت این است که $e^{ik(Rex+Imx)} = e^{ikRex} e^{-kImx}$ و چون ترم دوم برای k های بزرگ‌تر از صفر و x های بزرگ به سمت صفر میل می‌کند، پس کل عبارت به سمت صفر میل خواهد کرد. در واقع این راه حل همان راه حل ارائه شده برای مواد جاذب موج است. نقطه قوت این روش این است که مثل حالت قبل، متغیر فقط تابعی از x می‌باشد، اما مشکل این جاست که حل معادله دیفرانسیل حاصله به علت داشتن قسمت موهومی کمی مشکل می‌باشد. برای حل این مشکل از تبدیل سیستم مختصاتی استفاده می‌شود. برای تبدیل مختصات به صورت زیر عمل می‌شود:

اگر محور جدید را با \tilde{x} نشان داده شود، داریم:

$$\tilde{x}(x) = x + if(x) \quad (21)$$

که در آن f تابع تبدیل می‌باشد. پس هر جایی که $\partial \tilde{x}$ وجود داشته باشد می‌توان به جای آن، عبارت زیر را جایگزین نمود:

$$\partial \tilde{x} = (1 + i \frac{df}{dx}) \partial x \quad (22)$$

برای راحتی کار، تابعی مثل σ_x به صورت رابطه (۲۳) معرفی می‌گردد:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\sigma_x(x)}{\omega} \quad (23)$$

با اعمال σ_x داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{1 + i \frac{\sigma_x(x)}{\omega}} \frac{\partial}{\partial x} \quad (24)$$

و این رابطه، رابطه اصلی در تبدیل محورهای مختصات در PML است [۱۸].

وقت‌گیر می‌باشد. لذا برای احتراز از حل هم‌زمان دستگاه معادلات، از روش تکرار^۱ استفاده می‌گردد. در این روش معادلات محیط سازه و سیال به طور جداگانه حل می‌شوند و ماتریس‌های ضرایب شکل متقارن و باندی خود را حفظ می‌کنند و به این ترتیب حافظه فعال مورد نیاز کامپیوتر به حداقل ممکن کاهش می‌یابد. در این روش تحلیل در قلمرو زمان انجام می‌شود و در هر گام زمانی تا رسیدن به همگرایی مورد نظر معادلات محیط سازه و سیال به نوبت حل می‌شوند. در حوزه فرکانس دستگاه معادلات به صورت زیر خواهد بود [۵]:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 M + (1+2\beta i)K & -Q^T \\ -\rho Q \omega^2 & -\omega^2 E + i\omega A + H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -M \bar{u}_g \\ -\rho Q^T \bar{u}_g \end{Bmatrix} \quad (20)$$

که در این رابطه β ضریب میرایی هیستریک^۲ می‌باشد.

۳- شرط مرزی لایه کاملاً سازگار (PML^3)

لایه کاملاً سازگار (PML)، یک مدل لایه جذب کننده برای معادلات موج خطی است که تقریباً به طور کامل، امواج را جذب می‌کند. مفهوم لایه PML ابتدا توسط برنگر [۱۷] برای مباحث الکترومغناطیس ارائه شد. با معرفی این شرط محققین دیگر این شرط را برای سایر معادلات موج خطی مانند معادله هلمهولتز، معادله اولر، معادله موج برای محیط‌های ناتراوا و برای امواج الاستودینامیک بسط دادند.

ایده اصلی برای فرمول‌بندی PML برای معادله موج الاستودینامیک برای اولین بار توسط Liu و Chew [۱۹] ارائه شد. Basu و Chopra [۲۰، ۲۱] PML را برای مدل‌سازی محیط نیمه بی‌نهایت زیر پی صلب مورد استفاده قرار دادند. تحقیقات آن‌ها نشان داد که PML کارایی بسیار بالایی برای مستهلک کردن امواج دارد.

۳-۱- مفاهیم پایه و روابط اساسی

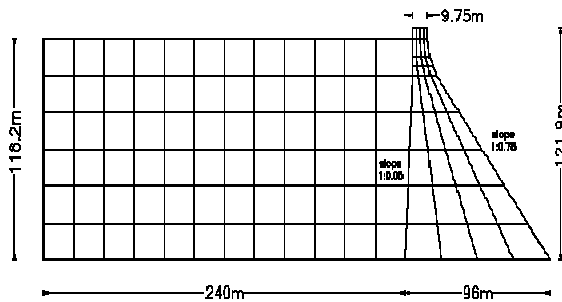
معادله امواج یک بعدی دارای ترم e^{ikx} می‌باشد که تابعی از متغیر x است و این بدان معناست که می‌توان محور x را حتی در مختصات موهومی هم در نظر گرفت. این امواج دارای حالت

1- Staggered scheme
2- Hysteriac
3- Perfectly matched layer

لایه PML تشکیل می‌شود. بعد از ساختن لایه PML روند حل مانند حل معمولی معادلات می‌باشد [۲۲].

۴- تحلیل‌های انجام گرفته و نتایج آن

یکی از مشهورترین سدهای بتنی وزنی که رفتار دینامیکی آن توسط محققین متعددی بررسی شده است، سد پایین فلت است. این سد در ایالت کالیفرنیا آمریکا بر روی رودخانه King احداث گردیده است. علت انتخاب این سد آن است که مطالعات زیادی روی آن انجام شده و به کمک این مدل بررسی صحت نتایج به راحتی امکان پذیر است. مدلی که مطالعات بر روی آن صورت گرفته است، مشابه ستون فاقد سرریز سد پایین فلت می‌باشد که مشخصات هندسی مدل اجزاء محدود آن در شکل (۲) دیده می‌شود.



شکل ۲- مدل سد پایین فلت

مصالح سد ایزوتوپ، همگن و با رفتار الاستیک خطی است. سد در حالت تنش مسطح و ضخامت ۱۰ متر است. پی سد و مخزن صلب و از اندرکنش سیستم با پی صرف نظر شده است. آب مخزن غیرچرخشی، غیرویسکوز و تراکم پذیر فرض شده است. وزن حجمی آب، ۱۰ کیلو نیوتن بر متر مکعب و سرعت امواج فشاری ۱۴۴۰ متر بر ثانیه در نظر گرفته شده است. سایر مشخصات به کار رفته به شرح جدول (۱) می‌باشد:

جدول ۱- مشخصات سد پایین فلت

مدول الاستیسیته بتن	۲۲/۷۵ گیگا پاسگال
جرم واحد حجم بتن	۲۴/۸ کیلو نیوتن بر مترمکعب
ضریب پواسون بتن	۰/۲
ضریب استهلاک بتن	۰/۰۵

۳-۲- اعمال PML به روش المان محدود

برای اعمال PML به روش اجزای محدود باید تغییراتی در ماتریس سختی و جرم المان‌های PML اعمال کرد. اگر ماتریس جرم و سختی به ترتیب با روابط زیر نشان داده شوند [۲۲]:

$$E = \int_{\Omega_e} N^T \rho N d \Omega \quad (25)$$

$$H = \int_{\Omega_e} B^T D B d \Omega \quad (26)$$

برای المان‌های PML توابع زیر انتگرال این روابط باید در تابعی کاهنده ضرب شده تا اثر استهلاک امواج در لایه PML به وجود آید. بدین ترتیب با اعمال این تابع کاهنده ψ ، ضابطه ماتریس جرم به شکل زیر بیان می‌گردد.

$$E = \int_{\Omega_e} N^T \psi \rho N d \Omega \quad (27)$$

به همین صورت در ماتریس سختی نیز همین توابع در ماتریس \tilde{D} اعمال خواهد شد:

$$H = \int_{\Omega_e} \nabla N^T \tilde{D} \nabla N d \Omega \quad (28)$$

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\psi} & 0 \\ 0 & \psi \end{bmatrix} \quad (29)$$

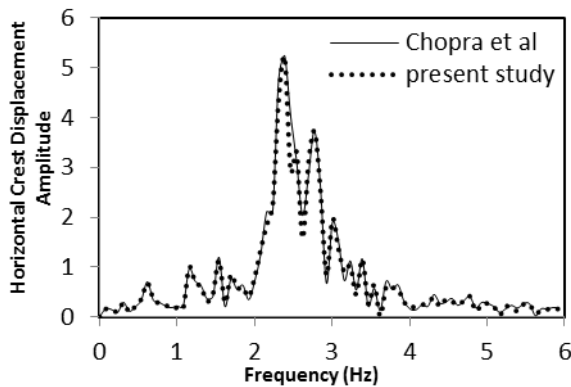
که در روابط بالا، B مشتق تابع شکل N است. تابع کاهنده اعمالی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi = 1 - \sigma i \quad (30)$$

$$\sigma = \sigma^* \frac{(x_1 - a_1)^2}{(a_1^* - a_1)^2} \quad (31)$$

در رابطه بالا، a_1 و a_1^* به ترتیب طول لایه PML و طول لایه اصلی می‌باشند و σ^* ضریب تابع کاهنده اصلی است که بایستی به صورت بهینه تعیین شود. برای طول لایه‌های مختلف تابع کاهنده ψ حساب شده و در ماتریس‌های سختی و جرم ضرب می‌شوند و سپس روند قبلی انجام خواهد شد. بدین ترتیب

در اکثر مراجع شرط مرزی سامرفلد با طول مخزن ۲ برابر ارتفاع سد استفاده شده است [۳۰]. لذا برای اطمینان از نتایج، شرط مرزی سامرفلد با طول مخزن ۳ برابر ارتفاع سد به عنوان مبنایی برای مقایسه با نتایج PML استفاده شده است. برای صحت-سنجی کد نوشته شده، نمودار بزرگی دامنه تغییر مکان افقی تاج سد با طول مخزن ۳۶۰ متر در حوزه فرکانس حاصل از تحلیل دینامیکی بر اساس مؤلفه افقی زلزله تفت با نتایج پایه ارائه شده توسط Chopra [۲۸] و مراجع دیگر [۲۹، ۳۰] مقایسه شده است (شکل ۵)). لازم به ذکر است که نتایج می-توانند به راحتی با استفاده از تبدیل فوریه از حوزه زمان به فرکانس یا بر عکس تبدیل شوند. محدوده فرکانسی اعمالی باید از صفر تا فرکانس قطع^۱ رکورد زلزله باشد که با توجه به گام زمانی ۰/۰۲ برابر ۵۰ هرتز است. اما با توجه به اندازه مش انتخابی امکان ورود فرکانس‌های بزرگ‌تر از ۶ هرتز به مدل وجود ندارد، به این صورت که تغییرات بعد از ۶ هرتز قابل چشم‌پوشی است. گام فرکانسی اعمالی نیز بستگی به الگوریتم تبدیل فوریه دارد. با استفاده از تحلیل‌های با گام‌های فرکانسی متفاوت ملاحظه گردید که با گام کوچک‌تر از ۰/۰۷۷ هرتز تغییری در نتایج به وجود نمی‌آید. تحلیل‌های صورت گرفته نشان می‌دهند که نتایج به دست آمده از کد توسعه یافته، انطباق خوبی با نتایج موجود دارند.

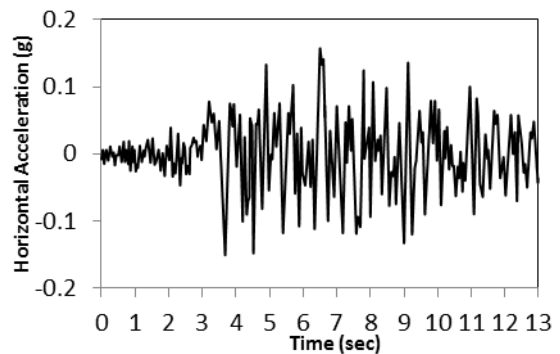


شکل ۵- مقایسه دامنه تغییر مکان افقی تاج سد با نتایج چوپرا در حوزه فرکانس [۲۸]

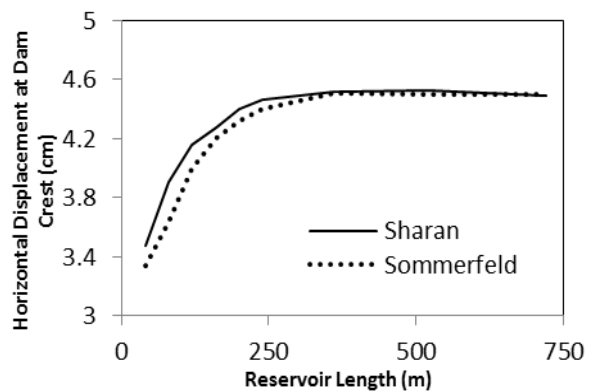
۴-۱- تحلیل سد با استفاده از شرط مرزی PML

همان طور که گفته شد لایه مرزی PML، برای مرز دوردست به جای شرایط مرزی کلاسیک مانند شرط شاران یا

برای تحلیل دینامیکی، ۱۳ ثانیه از مؤلفه *S69E* رکورد ثبت شده زلزله تفت در جهت افقی مورد استفاده قرار گرفته است. شتاب‌نگاشت مربوط به این زلزله در شکل (۳) نشان داده شده است. حداکثر شتاب افقی (PGA) ۰/۱۵۷g می‌باشد. با استفاده از رکورد ارائه شده، مدل سد نشان داده شده با طول مخزن متغیر تحت شرایط مرزی شاران و سامرفلد در مرز دوردست در حوزه زمان تحلیل دینامیکی شد. با در نظر گرفتن تغییر مکان افقی سد، نتایج در شکل (۴) نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، اگر چه شرط مرزی شاران برای طول‌های مخزن کمتر از دو برابر ارتفاع سد تقریباً بهتری نسبت به شرط مرزی سامرفلد می‌دهد، اما با بیشتر شدن طول مخزن تأثیر شرط مرزی دوردست کم شده و نتایج به هم نزدیک می‌شود. به طوری که بعد از طول دو برابر ارتفاع سد نتایج تقریباً یکسان است. به همین خاطر برای راحتی شرط مرزی سامرفلد استفاده شده است. هر چند که صلب بودن کف مخزن از محدودیت‌های شرط مرزی شاران است [۱۰].



شکل ۳- رکورد زلزله تفت

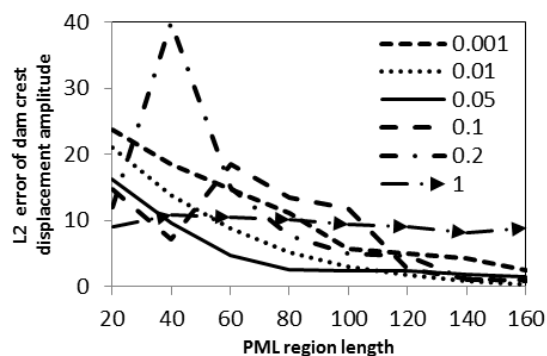


شکل ۴- مقایسه تغییر مکان افقی تاج سد پر با شرایط مرزی دوردست سامرفلد و شاران

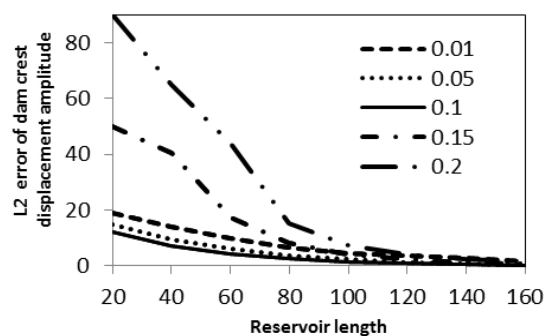
1- Nyquist frequency

ملاحظه می‌شود که مقدار $0.5/0$ نسبت به سایر مقادیر عملکرد بهتری داشته و بهینه‌تر است. با انتخاب مقادیر خیلی بزرگ مثل ۱ برخلاف انتظار نه تنها نتایج به طرف خطای کمتر همگرا نشده بلکه باعث خطای تقریباً ثابت شده است. با انتخاب مقادیر نزدیک به مقدار بهینه‌ی $0.5/0$ مثل $0.2/0$ یا $0.1/0$ ممکن است برخی ناپایداری‌ها در نتایج دیده شود. این مسأله می‌تواند ناشی از تحلیل دینامیکی باشد؛ چرا که اعداد موج زیادی در تحلیل دخیل هستند و مسأله استاتیکی نیست. می‌توان گفت که با ناپایداری‌های به وجود آمده نیاز به طول بیشتری از مخزن خواهد بود و تنها با طول خیلی کم مخزن ممکن است نتایج خیلی بهینه نباشد.

در حالت دوم برای ناحیه PML، ۲ ردیف المان ثابت (۴۰ متر) مورد استفاده قرار گرفته و خطای نتایج بین ضخامت لایه‌های مختلف مخزن به ازای ضرایب مختلف تابع کاهنده در شکل (۸) مقایسه شده است.



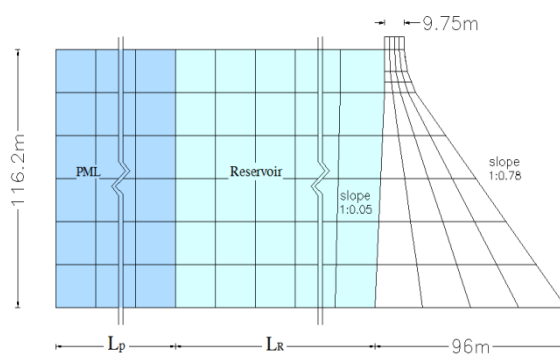
شکل ۷- مقایسه خطای نتایج بین ضخامت لایه‌های مختلف PML به ازای ضرایب مختلف تابع کاهنده با طول مخزن ثابت ۴۰ متر



شکل ۸- مقایسه خطای نتایج بین ضخامت لایه‌های مختلف مخزن به ازای ضرایب مختلف تابع کاهنده با طول لایه‌ی PML ثابت ۴۰ متر

سامرفلد استفاده شده است. برای مدل‌سازی لایه PML در محیط مخزن کافی است ضرایب دارای جزء موهومی در توابع سختی و جرم سیال ضرب شوند. مدل‌سازی سد و مخزن با شرط PML در شکل (۶) نشان داده شده است. در واقع مخزنی به وجود آمده است که ماده قسمت انتهایی آن خاصیت جذب امواج دارد. واضح است که مش انتخابی PML برای راحتی بهتر است سازگار با مش مخزن اصلی باشد. هر چند که انتخاب مش ریزتر باعث کارایی بیشتر PML خواهد شد، ولی در این تحقیق مطالعه نشده است. به منظور مقایسه نتایج PML با شرط سامرفلد دوردست خطایی به صورت زیر تعریف شده است:

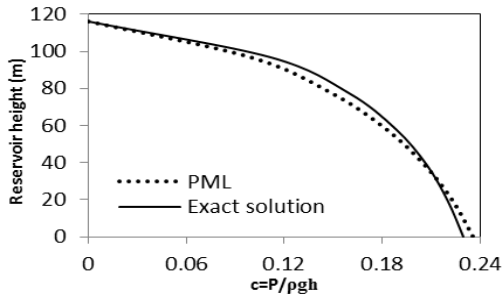
$$Error = \sum (\varphi_{Sommerfeld} - \varphi_{PML})^2 \quad (32)$$



شکل ۶- مدل‌سازی سد و مخزن با شرط PML

۴-۱-۱- نتایج حاصل از تحلیل سد با استفاده از PML از آن‌جا که شرط مرزی PML شرطی کاملاً سازگار با محیط می‌باشد و نیز در تابع کاهنده آن ترم مربوط به مشخصه ابعاد محیط اصلی موجود هست، بنابر این لازم است حداقل چند لایه المان از جنس محیط اصلی استفاده شده و سپس لایه PML در لایه بعدی اعمال می‌شود. ذکر این نکته ضروری است که در انتهای ناحیه PML، مرز صلب در نظر گرفته شده است. به منظور مطالعه رفتار و انتخاب بهینه‌ترین ضریب تابع کاهنده شرط PML، دو حالت در نظر گرفته شده است. در حالت اول برای مخزن ۲ ردیف المان ثابت (۴۰ متر) مورد استفاده قرار گرفته و خطای نتایج بین ضخامت لایه‌های مختلف PML به ازای ضرایب مختلف تابع کاهنده در شکل (۷) مقایسه شده است.

همچنین ماکزیمم ضریب فشار هیدرودینامیک وارده به سد برای این دو حالت نیز در شکل (۱۱) مقایسه شده‌اند. لازم به ذکر است که برای فشار هیدرودینامیک، با تقسیم فشار بر مقدار ρgh ضریب بی‌بعدی به دست آمده که از این ضریب برای نشان دادن فشار هیدرودینامیک استفاده شده است.



شکل ۱۱- مقایسه بیشینه ضریب فشار هیدرودینامیک وارده به سد با شرط PML و شرط سامرفلد

نتایج حاصله نشان می‌دهند که با وجود مدل‌سازی ۵۰٪ کمتر مخزن که خود باعث کاهش حجم محاسبات و افزایش سرعت تحلیل می‌شود، نتایج تطابق بسیار خوبی با نتایج دقیق دارند و در بیشتر مواقع جواب‌ها کاملاً یکسان می‌باشند. نمودارهای حاصله کارآیی بالای PML برای مدل‌سازی مخزن را نشان می‌دهند.

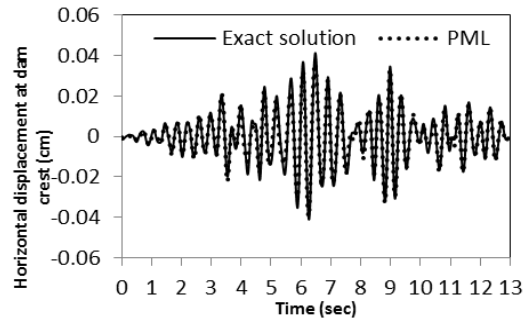
به منظور مقایسه دقیق‌تر، در جدول (۲) مقادیر بیشینه پارامترهای دینامیکی مثل تغییر مکان‌های افقی و عمودی تاج سد و همچنین ضریب فشار هیدرودینامیک وارده به وجه بالادست سد با هم مقایسه شده‌اند. با توجه به نتایج حاصله، با این که برای مدل‌سازی با PML، حجم بسیار کمتری از مخزن مدل شده است با این وجود جواب‌های حاصله مطابقت بسیار خوبی با هم دارند.

جدول ۲- مقایسه بیشینه پارامترهای دینامیکی برای شرایط مرزی PML و سامرفلد

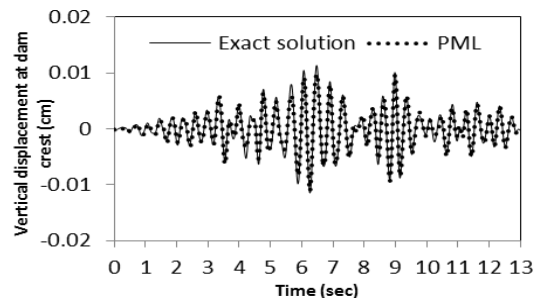
سامرفلد	PML	پارامتر دینامیکی (m)
۰/۰۳۷۹	۰/۰۳۶۰	ماکزیمم تغییر مکان افقی تاج سد
۰/۰۱۰۴	۰/۰۰۹۸	ماکزیمم تغییر مکان عمودی تاج سد
۰/۲۲۹۷	۰/۲۳۵۶	ماکزیمم ضریب فشار هیدرودینامیک

میزان امواج هیدرودینامیک در انتهای دور مخزن یکی از پارامترهای مهم برای بررسی کارآیی شرایط مرزی استفاده شده در انتهای دور مخزن می‌باشد. در شکل‌های (۱۲) و (۱۳)، فشار

ملاحظه می‌شود که مانند حالت قبل، انتخاب مقادیر بزرگ برخلاف انتظار در طول‌های کم باعث بهبود نتایج نمی‌شود. همچنین واضح است که با افزایش طول مخزن مدل شده بیشتر از ۸۰ متر تاثیر شرط مرزی دوردست (PML) کم شده و نتایج نزدیک به جواب دقیق می‌شود. در مجموع با مقایسه شکل‌های (۷) و (۸) می‌توان گفت که طول مخزن بیشتر با لایه‌های PML ثابت نتایج بهتری نسبت به لایه‌های PML بیشتر با طول مخزن ثابت کمتر دارد. همچنین مقدار ۰/۰۵ به عنوان مقدار بهینه ضریب تابع کاهنده انتخاب شده است. برای نشان دادن دقت این شرط در منحنی‌های جداگانه‌ای جواب‌های حاصل با دو لایه PML و ۸۰ متر مخزن با جواب‌های حاصل از شرط سامرفلد با طول مخزن ۳۶۰ متر مقایسه شده است. در واقع مخزنی با طول کلی ۱۲۰ متر مدل شده که ۸۰ متر آن مخزن اصلی و ۴۰ متر آن (PML) دارای ماده جاذب امواج است. در حقیقت مخزن نسبت به حالت معمول شرط سامرفلد دوردست (۲۴۰ متر)، ۵۰٪ کمتر مدل شده است. در شکل‌های (۹) و (۱۰) تغییر مکان‌های افقی و قائم تاج سد در دو حالت شرط سامرفلد و شرط PML با هم مقایسه شده‌اند.



شکل ۹- مقایسه تغییر شکل افقی تاج سد با شرایط مرزی PML و سامرفلد



شکل ۱۰- مقایسه تغییر شکل عمودی تاج سد با شرایط مرزی PML و سامرفلد

انجام محاسبات و به دست آوردن نتایج مورد نیاز و مقایسه آن‌ها با نتایج روش‌های دیگر و بررسی دقت و کارایی شرط مرزی جدید، برنامه کامپیوتری تهیه و تنظیم گردیده است. در کد نوشته شده برای محیط مخزن معادلات حرکت بر اساس معادله دیفرانسیل حاکم بر انتشار امواج فشار هیدرودینامیک و شرایط مرزی مربوطه تشکیل شده است. نتایج تحلیل با استفاده از تبدیل فوریه از حوزه زمان به فرکانس و برعکس تبدیل شده است.

اهم نتایج حاصل از مطالعه حاضر را می‌توان به شرح زیر خلاصه کرد:

۱- استفاده از PML در مرز دور دست به جای شرایط مرزی کلاسیک مانند شرط سامرفلد، نیاز به مدل‌سازی به مراتب کمتری از مخزن دارد. در تحقیق حاضر برای مدل‌سازی با شرط PML، ۵۰ درصد در حجم مدل‌سازی مخزن برای رسیدن به دقت همسان، کاهش مشاهده شده است. همچنین تعداد المان‌های مورد استفاده، از ۱۰۸ المان به ۶۰ المان کاهش یافته است که این امر خود باعث کاهش حجم محاسبات و افزایش سرعت تحلیل نیز شده است.

۲- شرط PML در صورت انتخاب پارامترهای مناسب تأثیرگذار در آن تقریباً تمام موج وارد شده به خود را مستهلک می‌کند و عملاً میزان موج انعکاسی از این مرز به محیط اصلی بسیار ناچیز و در حد صفر است.

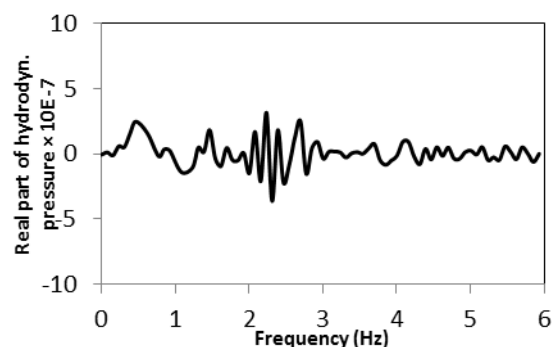
۳- طول مخزن بیشتر با لایه‌های PML ثابت نتایج بهتری نسبت به لایه‌های PML بیشتر با طول مخزن ثابت کمتر دارد. همچنین مقدار ۰/۰۵ به عنوان مقدار بهینه ضریب تابع کاهنده انتخاب شده است.

۴- تحلیل‌های انجام شده نشان می‌دهند که برای مستهلک شدن امواج با شرط سامرفلد، حداقل مدل‌سازی دو برابر ارتفاع سد نیاز است. در حالی که با مدل‌سازی ۵۰ درصدی حالت قبل مخزن و استفاده از شرط PML می‌توان نتایج مشابهی به دست آورد.

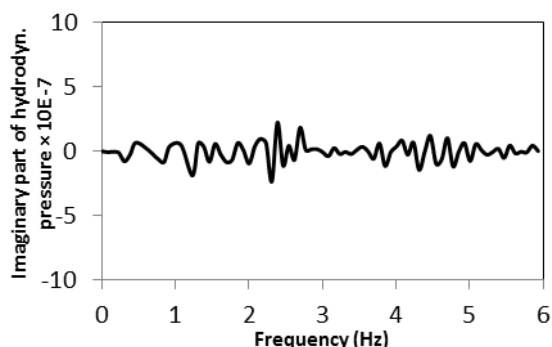
۶- تقدیر و تشکر

این مقاله مستخرج از گزارش نهایی طرح پژوهشی شماره ۱۰-۲۷/۱۸۳۷/ص به تاریخ ۱۳۹۰/۵/۸ می‌باشد که از محل اعتبارات پژوهشی دانشگاه تبریز اجرا گردیده است. بدین وسیله از حمایت معاونت محترم پژوهشی دانشگاه در انجام این تحقیق تشکر و قدردانی می‌گردد.

هیدرودینامیک در میانه مرز دور دست هنگامی که از شرط مرزی PML استفاده گردیده، نشان داده شده است. هدف از این قسمت نشان دادن این موضوع است که در انتهای مرز PML، فشار هیدرودینامیک امواج به حدود صفر می‌رسد. لازم به ذکر است که با توجه به مختلط بودن فشار هیدرودینامیک در حوزه فرکانس، دو نمودار جداگانه برای قسمت‌های حقیقی و موهومی ارائه شده است. با ملاحظه مقادیر تقریباً صفر این نمودارها مشخص می‌شود که استفاده از PML در کاهش فشار هیدرودینامیک در مرز دور دست مخزن نیز مؤثر بوده است.



شکل ۱۲- قسمت حقیقی فشار هیدرودینامیک در مرز میانی انتهای دور دست شرط PML



شکل ۱۳- قسمت مجازی فشار هیدرودینامیک در مرز میانی انتهای دور دست شرط PML

۵- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، شرط مرزی PML در انتهای دور دست مخزن استفاده شده است که اساس آن بر مستهلک کردن امواج و عدم بازتابش موج هیدرودینامیک از محل قطع شده به محیط مخزن می‌باشد. برای مدل‌سازی سد و مخزن از روش اجزای محدود با فرمولاسیون اویلر-لاگرانژ استفاده شده است. به منظور

- ۷-مراجع
- [13] Seghir, A., Tahakourt, A., Bonnet, G., "Coupling FEM and Symmetric BEM for Dynamic Interaction of Dam-Reservoir Systems", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2009, 33 (10), 1201-1210.
- [14] Wang, X., Jin, F., Prempramote, S., Song C., "Time-Domain Analysis of Gravity Dam-Reservoir Interaction Using High-Order Doubly Asymptotic Open Boundary", *Computers and Structures*, 2011, 89, 668-680.
- [15] Gogoi, I., Maity, D., "A Novel Procedure for Determination of Hydrodynamic Pressure along Upstream Face of Dams Due to Earthquakes", *Computers and Structures*, 2010, 88, 539-548.
- [16] Samii, A., Lotfi, V., "Application of H-W Boundary Condition in Dam-Reservoir Interaction Problem", *Finite Elements in Analysis and Design*, 2012, 50, 86-97.
- [17] Berenger, J. P., "A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Wave", *Journal of Computational Physics*, 1994, 114 (2), 185-200.
- [18] Chew, W. C., Weedon, W. H., "A 3D Perfectly Matched Medium from Modified Maxwells Equations with Stretched Coordinates", *Microwave and Optical Technology Letters*, 1994, 7 (13), 599-604.
- [19] Chew, W. C., Liu, Q. H., "Perfectly Matched Layers for Elastodynamics: A New Absorbing Boundary Condition", *Journal of Computational Acoustics*, 1996, 4 (4), 341-359.
- [20] Basu, U., Chopra, A., "Perfectly Matched Layers for Time Harmonic Elastodynamics of Unbounded Domains: Theory and Finite Element Implementation", *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, 192, 1337-1375.
- [21] Basu, U., Chopra, A. K., "Perfectly Matched Layers for Transient Elastodynamics of Unbounded Domains", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 59 (8), 1039-1074.
- [22] Mehdizadeh, O. Z., Paraschivoiu, M., "Investigation of a Two-Dimensional Spectral Element Method for Helmholtz's Equation", *Journal of Computational Physics*, 2003, 189, 111-129.
- [23] Harari, I., Albocher, U., "Studies of FE/PML for Exterior Problems of Time-Harmonic Elastic Waves", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195 (29-32), 3854-3879.
- [24] Meza-Fajardo, K.C., Papageorgiou, A. S., "On the Stability of a Non-Convolutional Perfectly Matched Layer for Isotropic Elastic Media",
- [1] Westergard, H. M., "Water Pressure on Dams during Earthquake", *ASCE Transactions*, 1933, 98, 418-433.
- [2] Zangar, C. N., Haefeli, R. J., "Electric Analog Indicates Effect of Horizontal Earthquake Shocks on Dams", *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1952, 22 (4).
- [3] Kotsubo, S., "Dynamic Water Pressure on Dams during Earthquakes", *The 2nd World Conference on Earthquake Engineering*, 1960.
- [4] Chopra, A. K., "Hydrodynamic Pressure on Dams during Earthquakes", *ASCE Proceedings*, 1967, 93 (Em6).
- [5] Chopra, A. K., "Earthquake Response of Concrete Gravity Dams", *ASCE Journal of Engineering Mechanics Division*, 1970, 96 (Em4).
- [6] Hall, J. F., Chopra, A. K., "Two-Dimensional Dynamic Analysis of Concrete Gravity and Embankment Dams Including Hydrodynamic Effects", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1982, 10, 305-332.
- [7] Chopra, A. K., Chakrabarti, P., "Earthquake Analysis of Concrete Gravity Dams Including Dam Fluid Foundation Rock Interaction", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1981, 9, 363-383.
- [8] Zienkiewicz, O. C., Bettess, P., Kelly, D. W., "The Finite Element Method for Determining Fluid Loadings on Rigid Structures: two and Three-Dimensional Formulations", In O. C. Zienkiewicz, R. W. Lewis, K. G. Stagg (Eds.), *Numerical Methods in Offshore Engineering*, Wiley, Chichester, UK, 1978.
- [9] Saini, S. S., Bettess, P., Zienkiewicz, O. C., "Coupled Hydrodynamic Response of Concrete Gravity Dams Using Finite and Infinite Elements", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1978, 6, 363-374.
- [10] Sharan, S. K., "Finite Element Modeling of Infinite Reservoirs", *ASCE Journal of Engineering Mechanics Division*, 1985, 111, 1457-1469.
- [11] Watanabe, H., Ariga, Y., Cao, Z., "Earthquake Resistance of a Concrete Gravity Dam Reevaluated with 3-D Nonlinear Analyses", *Proceedings of JSCE*, 2002, (696), 99-110.
- [12] Tsai, C. H., "Solution of the Dam Reservoir Interaction Problems Using a Combination of FEM, BEM with Particular Integrals", *Modal Analysis and Substructuring*, National Center for Earthquake Engineering, Research Technical Report, NCEER-88-0036, December, 1998.

- Dams during Earthquakes", ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division, 1996, 93 (EM6), 205-223.
- [۲۹] پیربوداقی، س.، "تحلیل اندرکنش سد و مخزن با استفاده از روش اجزاء محدود طیفی"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران، ۱۳۹۰.
- [30] Lotfi, V., "Seismic Analysis of Concrete Dams Using the Pseudo-Symmetric Technique", Journal of Dam Engineering, 2002, 13 (2), 119-145.
- Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2010, 30 (3), 68-81.
- [25] Kucukcoban, S., Kallivokas, L. F., "Mixed Perfectly-Matched-Layers for Direct Transient Analysis in 2D Elastic Heterogeneous Media", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200 (1-4), 57-76.
- [۲۶] احمدی، م. ت.، قره باغی، ب.، "روش نوین تحلیل اندرکنش دینامیکی سد و مخزن به روش اویلر لاگرانژ"، پژوهشگاه بین المللی لرزه شناسی و مهندسی زلزله، پروژه تحقیقاتی شماره ۱۱۴، تهران، ایران، ۱۳۷۲.
- [27] Bathe, K. J., "Finite Element Procedures", Prentice-Hall, New Jersey, US, 1996.
- [28] Chopra, A. K., "Hydrodynamic Pressures on

EXTENDED ABSTRACT

Dynamic Analysis of Dam-Reservoir Interaction by Euler-Lagrange Approach Using Perfectly Matched Layer (PML) in Radiation Boundary

Reza Tarinejad *, Sajjad Pirboudaghi

Faculty of Civil Engineering, University of Tabriz, Tabriz, 5166616471 Iran

Received: 24 February 2013; Accepted: 09 September 2013

Keywords:

Dam-reservoir interaction, Euler-Lagrange, Perfectly matched layer (MPL), Radiation boundary, Finite element method

1. Introduction

A key issue in the seismic analysis of a dam-reservoir system is the accurate and inexpensive modeling of the unbounded reservoir. The Perfectly matched layer (PML) is one of the state-of-the-art boundary conditions, introduced by Berenger for the absorption of radiated boundary waves. In this research, seismic analysis of dam-reservoir system is carried out using the PML in the radiation boundary of the reservoir. For this purpose, the numerical implementation of the PML based on the finite element method is presented. A special purpose computer code is developed to carry out the dynamic analysis of the dam-reservoir systems using the MATLAB software. Sensitivity analyses corresponding to the PML layer parameters, the decay function and layer thickness, are carried out to achieve accurate results in less computing time.

2. Methodology

2.1. Coupling of dam and reservoir equations

The dam-reservoir interaction is a classic coupled problem, which contains two harmonic differential equations in the frequency domain. The coupled equations of the dam- reservoir can be written in the following form:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 M + (1 + 2\beta i)K & -Q^T \\ -\rho Q \omega^2 & -\omega^2 E + i \omega A + H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta} \\ \bar{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -M \bar{u}_g \\ -\rho Q^T \bar{u}_g \end{Bmatrix} \quad (1)$$

where [M] and [K] are the mass and stiffness matrices of the dam and [E], [A] and [H] are the matrices representing the mass, damping and stiffness of the reservoir, respectively. [Q] is the coupling matrix, β is the constant hysteretic damping, \bar{p} and $\bar{\delta}$ are the vectors of hydrodynamic pressures and displacement amplitude, respectively, \bar{u}_g is the ground acceleration amplitude and ρ is the density of the fluid.

2.2. FE modeling with PML

The PML was first developed for the two-dimensional time dependent Maxwell equations by employing auxiliary fields [1]. It was later shown that the layer can be obtained by performing a complex coordinate stretch [2]. The perfectly matched layer surrounds a rectangular computational domain (in Cartesian coordinates) and attenuation is provided through the complex-valued function which depends only on the coordinate axis [3, 4]. This provides highest attenuation for waves traveling along this axis, and no attenuation for those traveling perpendicular to it. The PML method is based on introducing an absorbing layer, after the truncated boundary, to absorb outgoing waves and prevent reflection from the artificial boundary. Based on this method the mass and stiffness matrices of the reservoir from Eq. (1) are modified in the following forms:

* Corresponding Author

E-mail addresses: r_tarinejad@tabrizu.ac.ir (Reza Tarinejad), s.pirboudaghi@tabrizu.ac.ir (Sajjad Pirboudaghi)

$$E = \int_{\Omega_e} N^T \psi \rho N d \Omega \tag{2}$$

$$H = \int_{\Omega_e} \nabla N^T \tilde{D} \nabla N d \Omega \tag{3}$$

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \psi & \psi \\ 0 & \psi \end{bmatrix} \tag{4}$$

where N is the interpolation function and \tilde{D} is the matrix of material property. The mass matrix inside the PML is obtained by multiplying the integrand of the mass matrix of the elastic medium by the stretch functions, ψ , which is defined as [5]:

$$\psi = 1 - \sigma i \tag{5}$$

$$\sigma = \sigma^* \left(\frac{x}{L_p}\right)^2 \tag{6}$$

where σ , σ^* and L_p are attenuation function, positive constant attenuation coefficient and the length of PML layer respectively and x is measured from the interface. The finite element model of the dam-reservoir system including the PML layer in the radiation boundary is shown in Fig. 1.

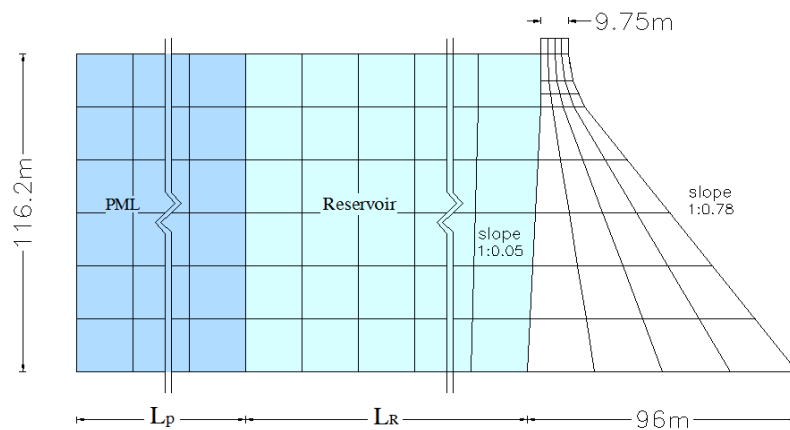


Fig. 1. The finite element model of the dam-reservoir system

3. Results and discussion

3.1. Dam-reservoir analysis by using PML at far end of reservoir

A computer code is developed to carry out the seismic analysis of the dam-reservoir interaction system using the PML layer in the radiation boundary of the reservoir. Verification of the developed code is carried out by the comparison of the results using Sommerfeld boundary condition by appropriate length of the reservoir, three times of the dam height, with the results of the previous investigations. Good agreement was obtained in time and frequency domain. Sensitivity analysis with PML's length (L_p), reservoir's length (L_R) and attenuation coefficient (σ^*) are performed to achieve accurate results in less computing time. The convergence errors of the dam crest horizontal displacement (L2 error) are indicated versus different parameters in Figs. 1 and 2. The maximum responses of the dam-reservoir system obtained from two kinds of boundary conditions, the optimum PML layer and Sommerfeld, are presented in Table 2. Although the small length of the reservoir is modeled by using the PML layer in comparison with the classic Sommerfeld boundary condition, the results show good agreement for different kinds of responses.

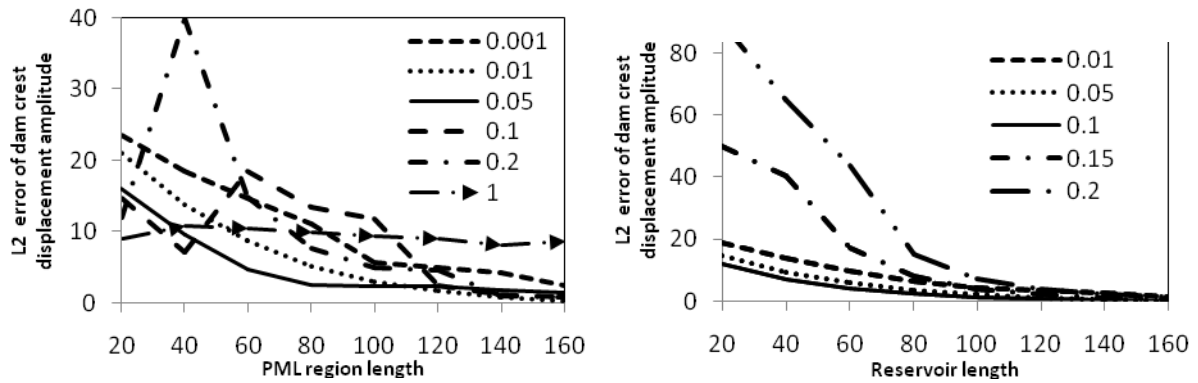


Fig. 2. The results of sensitivity analysis: (left) L2 error of dam crest displacement amplitude versus the PML's length by different attenuation coefficients with constant reservoir length ($L_R=40\text{m}$), (right) L2 error of dam crest displacement amplitude versus the reservoir's length by different attenuation coefficients with constant PML's length ($L_P=40\text{m}$)

Table 1. The maximum responses obtained by the PML and Sommerfeld boundary conditions

Boundary condition	PML	Sommerfeld
Maximum horizontal displacement of the dam crest	0.0360	0.0379
Maximum vertical displacement of the dam crest	0.0098	0.0104
Maximum hydrodynamic pressure/hydrostatic pressure	0.2356	0.2297

4. Conclusions

The PML was adopted in the radiation boundary of the reservoir in the seismic analysis of the dam-reservoir interaction system and the finite element implementation was presented.

A computer code is developed and verified to carry out the dynamic analysis of the interaction system using the MATLAB software.

Sensitivity analysis of the PML parameters, PML's length (L_P), reservoir's length (L_R) and attenuation coefficient (σ^*), was performed to achieve the accurate results with less computational time in comparison with the results obtained from the classic Sommerfeld boundary conditions.

Results from this analysis demonstrated that for the same accuracy, the PML-type radiation boundary leads to 50% off in time consumption of the analysis compared to the Sommerfeld boundary condition.

5. References

- [1] Berenger, J. P., "A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Wave", *Journal of Computational Physics*, 1994, 114 (2), 185-200.
- [2] Chew, W. C., Liu, Q. H., "Perfectly Matched Layers for Elastodynamics: A New Absorbing Boundary Condition", *Journal of Computational Acoustics*, 1996, 4 (4), 341-359.
- [3] Basu, U., Chopra, A., "Perfectly Matched Layers for Time Harmonic Elastodynamics of Unbounded Domains: Theory and Finite Element Implementation", *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, 192, 1337-1375.
- [4] Mehdizadeh, O. Z., Paraschivoiu, M., "Investigation of a Two-Dimensional Spectral Element Method for Helmholtz's Equation", *Journal of Computational Physics*, 2003, 189, 111-129.
- [5] Harari, I., Albocher, U., "Studies of FE/PML for Exterior Problems of Time-Harmonic Elastic Waves", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195 (29-32), 3854-3879.