

اعمال روش پخش موج با دقت بالا در مدل‌سازی عددی جریان ترافیک کلان‌نگر بر اساس رفتار فیزیولوژیکی - روان‌شناختی

مرتضی عراقی*^۱، حسین مهدیزاده^۲، صادق مودی^۳

^۱ استادیار گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه بیرجند

^۲ دانشیار گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه بیرجند

^۳ دانشجوی دکتری گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی شهید نیکبخت، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان

دریافت: ۱۳۹۹/۱۰/۲۳، پذیرش: ۱۴۰۰/۵/۲۶، نشر آنلاین: ۱۴۰۰/۵/۲۶

چکیده

در این مقاله، یک نسخه اصلاح‌شده الگوریتم پخش موج مرتبه دوم نوع گودونو (Godunov) با دقت بالا به منظور مدل‌سازی کلان‌نگر یک‌بعدی جریان ترافیک ارائه شده است. روش موردنظر یک مدل خوش توازن بوده و قادر به رفتار کردن مؤلفه‌های منبع در داخل تفاوت شارهای مجاور روش حجم محدود می‌باشد. علاوه بر این، روش موردنظر از نوعی سرعت تقریبی جدید ریمان برای پخش عددی در حل معادلات مشتق‌های پاره‌ای غیرخطی هذلولوی (Hyperbolic) جریان ترافیک که پاسخ تحلیلی ندارند استفاده می‌نماید. عملکرد روش پیشنهادی با انتخاب دو مدل متداول پین-ویتهام (Whitham) و مدل پین-ویتهام بر اساس رفتار توأمان فیزیولوژیکی- روان‌شناختی راننده مورد ارزیابی قرار گرفته است، لذا مسئله ایست-و-حرکت جریان ترافیک، با چهار ناپیوستگی برای یک مسیر دایره‌ای با شرایط مرزی تناوبی انتخاب شد. در مقایسه الگوریتم پیشنهادی با تکنیک تجزیه رو که به‌طور معمول برای گسسته‌سازی مدل کلان‌نگر جریان ترافیک مورد استفاده است، تغییرات مکانی- زمانی دو متغیر سرعت و چگالی و پروفیل‌های مربوطه در زمان‌های مختلف ارائه گردید. نتایج مبین این مطلب است که الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با تکنیک تجزیه رو، پاسخ‌های قابل قبول سازگار و پایدار با رعایت خاصیت حفظ مقدار مثبت و کنترل خطای پخش عددی، خصوصاً برای مدل متداول در برآورد متغیرهای اساسی جریان ترافیک ارائه می‌دهد. برای مدل متداول در مدت زمان شبیه‌سازی با استفاده از تکنیک تجزیه رو، علاوه بر چگالی‌های غیرمجاز، سرعت غیرممکن منفی ۱۴ متر بر ثانیه مشاهده می‌شود، در صورتی که روش پیشنهادی در برآوردن خاصیت حفظ مقدار مثبت موفق عمل کرده است.

کلیدواژه‌ها: مدل‌های جریان ترافیک کلان‌نگر مرتبه دوم، الگوریتم پخش موج با دقت بالا، روش موج شار، حل‌کننده ریمان.

۱- مقدمه

طی سالیان گذشته رویکردهای متفاوتی برای مدل‌سازی دینامیک جریان ترافیک اتخاذ شده است که بسیاری از آن‌ها درصدد لحاظ کردن عوامل مؤثر بر مدت زمان تصمیم‌گیری خصوصاً رفتار فیزیولوژیکی- روان‌شناختی رانندگی علاوه بر متغیرهای کلان‌نگر ترافیک یعنی چگالی (تعداد وسایل نقلیه موجود در طول مشخصی از راه) و سرعت متوسط وسایل نقلیه و نرخ تردد (تعداد وسایل نقلیه عبوری مشخص در واحد زمان از یک نقطه مشخص از راه) بوده‌اند (Mohammadian, ۲۰۱۷).

در یک دسته‌بندی کلی این مدل‌ها شامل مدل‌های پیوسته یا

در هنگام رانندگی، رانندگان باید به‌طور مداوم اطلاعات مختلف را از اطراف خود بگیرند تا نسبت به آن‌ها عکس‌العمل نشان دهند. از لحظه‌ای که چیزی در برابر چشم راننده ظاهر می‌شود تا لحظه‌ای که وی نسبت به آن واکنش نشان می‌دهد، مراحل طی شده و مدتی طول می‌کشد. این مراحل شامل کشف و ادراک، ارزیابی، تصمیم‌گیری و واکنش اولیه می‌باشد که به زمان مربوطه زمان تصمیم‌گیری جهت رفتار توأمان فیزیولوژیکی- روان‌شناختی راننده گویند. این مدت زمان به عوامل متعددی مانند مهارت، نگرش، هوشیاری و آگاهی راننده، سرعت وسیله نقلیه، نوع و رنگ و شرایط مانع، فاصله از مانع، نوع و شرایط راه و شرایط دید از

* نویسنده مسئول؛ شماره تماس: ۰۹۱۲۲۰۳۷۳۴۴

در طول زمان ارائه شده‌اند. این مدل‌ها به دلیل سادگی و نیز شبیه‌سازی موفق جریان ترافیک، محبوبیت زیادی بین مهندسان ترافیک داشتند. با این وجود، مطالعات بعدی نشان داد که سرعت همواره در تعادل با چگالی نبوده و صرف نظر کردن از شتاب‌گیری خودروها باعث نتایج غیرواقعی می‌شود (Mohammadian, 2017).

بین مدلی خردنگر را ارائه کرد که در آن یک معادله دینامیک مستقل برای سرعت و وسایل نقلیه در نظر گرفته شده بود (Payne, 1971). مدل او نخستین مدل مرتبه دوم می‌باشد. ویتهم به طور مستقل مدلی مشابه را توسعه داد که به مدل پین-ویتهم^۶ معروف است (Whitham, 2011). این مدل به دلیل توانایی شبیه‌سازی نسبتاً مناسب جریان ترافیک با استفاده از کم‌ترین متغیرها، امروزه نیز یکی از پرکاربردترین مدل‌های مرتبه دوم به شمار می‌آید. این مدل از دو معادله تشکیل شده است. معادله اول که به معادله پیوستگی معروف است، بر اساس بقای تعداد خودروها در مسیر مورد مطالعه به دست می‌آید. در معادله دوم (معادله حرکت)^۷ شتاب‌گیری و وسایل نقلیه در نظر گرفته شده که بیانگر تغییرات سرعت کلان‌نگر جریان ترافیک است. در نظر گرفتن هم‌زمان این دو معادله منجر به تشکیل یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی می‌شود. با داشتن وضعیت اولیه ترافیک و حل هم‌زمان این دستگاه معادلات دیفرانسیلی، مقادیر چگالی و سرعت کلان‌نگر جریان ترافیک در هر قسمت از راه و در هر گام زمانی به دست می‌آید (Davoodi, 2014).

مدل پین-ویتهم تحت شرایط خاصی، خاصیت غیرایزوتروپیک بودن جریان ترافیک را حفظ نمی‌کند و نتایج در این حالت‌ها شامل رانندگی رو به عقب هستند (Delis و همکاران, 2014). این مدل می‌تواند رفتار غیرواقعی (اغلب نوسانی) در ناپیوستگی‌های ترافیک تولید کند که ناشی از توصیف ناکافی تغییرات فضایی (مکانی) در چگالی ترافیک حین انتقالات است. فرض بر این است که تنظیم ترافیک با یک سرعت ثابت اتفاق می‌افتد، که می‌تواند منجر به تجاوز سرعت از مقدار حداکثر یا کم‌تر از صفر شدن آن شود، که غیرممکن است (Khan و همکاران, 2019). تحقیقات بسیاری جهت رفع معایب مدل پین-ویتهم صورت گرفته است. Del Castillo و همکاران (1994) با دخالت دادن پارامترهای زمان درک و پاسخ راننده برای تغییرات کوچک در چگالی و سرعت، مدل پین-ویتهم را بهبود بخشیدند.

Zhang مشتق توزیع سرعت تعادلی را جایگزین ثابت سرعت کرد و نسخه غیرایزوتروپیک مدل پین-ویتهم را ارائه کرد

کلان‌نگر^۱، مدل‌های خردنگر^۲، و مدل‌های متوسط‌نگر^۳ می‌باشند. در مدل‌های خردنگر هر وسیله نقلیه به طور جداگانه و همچنین در تعامل و ارتباط با سایر وسایل نقلیه در نظر گرفته می‌شود، در حالی که مدل‌های جریان ترافیکی کلان‌نگر به جریان ترافیک به عنوان مفهومی تجمعی نگاه می‌کنند. مدل‌های متوسط‌نگر ترکیبی از دو مدل فوق است که جریان ترافیک در آن توسط توزیع‌های احتمالی و نظریه صف مدل می‌شوند. مدل‌های کلان‌نگر به دلیل پیچیدگی کم و عملکرد رضایت‌بخش آن‌ها، متداول‌ترین رویکرد به حساب می‌آیند (Gulliver و Khan, 2020).

در مدل‌های کلان‌نگر، جریان ترافیک به عنوان یک سیال غیرایزوتروپیک^۴ تراکم‌پذیر در نظر گرفته می‌شود. غیرایزوتروپیک در نظر گرفتن ترافیک بدین دلیل است که در جریان ترافیک رانندگان تنها به وسایل نقلیه مقابل خود واکنش نشان می‌دهند و قطع کردن جریان ترافیک از پشت سر (مانند قرمز شدن چراغ) در مشخصه‌های ترافیک عبور کرده تأثیری نمی‌گذارد (Mohammadian, 2017).

در سرعت‌های زیادتر رانندگان هوشیارترند و در نتیجه مدت زمان تصمیم‌گیری آن‌ها کوتاه‌تر است. البته باید توجه داشت که با سرعت زیادتر، در مدت زمان مساوی، وسیله نقلیه فاصله بیشتری را طی می‌کند و به همین دلیل است که در سرعت‌های زیاد رانندگان با تمرکز بیشتری رانندگی می‌کنند. در شرایط ازدحام، چگالی وسایل نقلیه زیاد بوده و فاصله بین آن‌ها کم است و بیشترین تعامل بین وسایل نقلیه در شرایط ایست-حرکت رخ می‌دهد. در چنین شرایطی جریان ترافیک در مسافت‌های کوتاه رفتار نوسانی زیادی نشان می‌دهد و پاسخ سریع راننده به شرایط قابل پیش‌بینی است (Richards, 1956).

مدل‌های کلان‌نگر از تاریخچه‌ای غنی برخوردارند. نخستین و اساسی‌ترین مطالعه در این زمینه توسط Whitham و Lighthill (1955) و Richards (1956) صورت گرفت. آن‌ها با استفاده از نوشتن قانون بقا برای تعداد خودروها در طول مسیر، نخستین مدل خردنگر را ارائه دادند. فرض اساسی در این مدل این است که سرعت همیشه با چگالی ترافیک در تعادل است. همچنین، آن‌ها رابطه سرعت و چگالی را به صورت خطی و مانند مدل گرینشیلدز^۵ در نظر گرفتند که به معنی حداکثر سرعت در چگالی صفر و نیز سرعت صفر در چگالی حداکثر است. از آنجایی که در این مدل تنها چگالی مجهول مسئله است و برای سرعت معادله مستقلاً در نظر گرفته نمی‌شود، به آن مدل مرتبه اول گفته می‌شود (Sreekumar و همکاران, 2019). مدل‌های مرتبه اول دیگری نیز

5. Greenshields
6. Payne-Whitham (PW) model
7. Equation of Motion

1. Macroscopic Models
2. Microscopic Models
3. Mesoscopic Models
4. Anisotropic Fluid

روش‌های حجم محدود این است که قوانین بقا در یک بازه ثابت به نام حجم کنترل اعمال می‌شوند. این روش‌ها بر پایه شکل انتگرالی قوانین فیزیکی هستند و بنابراین می‌توانند مشکلات به وجود آمده در مسائل ناپیوسته مانند قوانین بقای هذلولی را برطرف نمایند. در این روش بردار مجهولات در سلول‌های عددی در هر گام زمانی، فقط به کمک تفاضل شار بین کناره‌های سلول تصحیح می‌شود. روش‌های حجم محدود صریح که به منظور تسخیر شوک^{۱۰} استفاده می‌شوند، از نوع روش‌های گودونو^{۱۱} می‌باشند که در مسائل ناپیوسته، نتایج غیرنوسانی می‌دهند. برای رسیدن به جواب در روش گودونو، بایستی مسئله ریمن^{۱۲} حل گردد (Moodi, ۲۰۱۷). این مسئله به صورت ناپیوستگی در مکان تعریف می‌شود. ایده اصلی حل‌کننده‌های دقیق و تقریبی ریمن، محاسبه سرعت موج‌های شوک و دیگر ناپیوستگی‌ها در مسئله ریمن است. روش‌های آغازین گودونو تنها دارای دقت مرتبه یک بودند (به عنوان نمونه Ngoduy و همکاران (۲۰۰۸)، Borges و همکاران (۲۰۰۸) و Ngoduy (۲۰۱۳))، اما با گذشت زمان روش‌های با دقت بالا^{۱۳} مطرح گردیدند (Khan و همکاران، ۲۰۲۰؛ Delis و همکاران، ۲۰۱۴؛ Chen و همکاران، ۲۰۱۲).

از جمله این روش‌ها می‌توان به روش ENO^{۱۴}، MUSCL^{۱۵} و WENO^{۱۶} اشاره نمود. مشکل این روش‌ها این است که استناد این نوع روش‌ها بر شار^{۱۷} می‌باشد که ممکن است برای دستگاه هذلولی اصلی استفاده نشوند. همچنین از دید محاسباتی، حجیم‌تر از الگوریتم پخش موج با دقت بالا می‌باشند (LeVeque, ۲۰۰۲). الگوریتم پخش موج برای نخستین بار توسط لوک^{۱۸} معرفی شد. تنها تفاوت میان الگوریتم پخش موج لوک و روش اصلی گودونو این است که در روش لوک، موج‌های ظاهر شده در جواب‌های ریمن، دوباره در سلول‌های مجاور میانگین‌گیری می‌شوند در حالی که روش اصلی گودونو از داده‌های شار در سطح مشترک سلول‌ها برای محاسبه گام زمانی بعدی استفاده می‌کند (Moodi, ۲۰۱۷).

در این مقاله از یک نسخه از الگوریتم پخش موج اصلاح شده به نام روش موج شار استفاده می‌شود. این روش برای کنترل مؤلفه‌های منبع در عین حفظ مشخصات بقایی بسیار مناسب می‌باشد. این روش بعدها به منظور رفع بعضی محدودیت‌ها، با استفاده از ترکیبی از حل‌کننده‌های ریمن دقیق و تقریبی، گسترش یافت (Bale و همکاران، ۲۰۰۳). تفاوت عمده روش‌های حل معادلات، محاسبه مؤلفه‌های شار و سرعت انتشار امواج شوک

(Zhang, ۱۹۹۸). Khan و همکاران (۲۰۲۰) با لحاظ کردن پاسخ راننده، حداکثر سرعت و فاصله بین وسایل نقلیه در جمله تابع فشار ترافیکی در معادله حرکت که بیانگر واکنش گروهی از وسایل نقلیه به تغییرات پروفیل چگالی و در بعضی از مدل‌ها، پروفیل سرعت است، مدل را بهبود بخشیدند. Khan و Gulliver (۲۰۲۰) این مدل را در مطالعه‌ای دیگر با در نظر گرفتن سه پارامتر سرعت متوسط ترافیک در انتقال، حداکثر سرعت و فاصله انتقال بهبود بخشیدند.

Khan و همکاران (۲۰۱۹) در مطالعه‌ای که در این مقاله جهت مقایسه نتایج و بهبود آن مدنظر قرار گرفته است، با معرفی ثابت ترافیک به صورت تابعی از رفتار توأمان فیزیولوژیکی- روان‌شناختی راننده و به طور مشخص متغیرهای ادراک، آگاهی، نگرش و واکنش اولیه، مدل متداول پین- ویتهم را ارتقا داده‌اند. آن‌ها از تکنیک تجزیه رو برای گسسته‌سازی مدل کلان نگر پیشنهادی‌شان استفاده کرده‌اند. برای بررسی عددی عملکرد مدل پیشنهادی، از یک گلوگاه در یک جاده دایره‌ای با طول کوتاه و تغییرات چگالی قابل توجه که جریان ترافیک در بدترین حالت در نظر گرفته شده است، استفاده کرده‌اند.

معادلات مربوط به مدل‌های کلان‌نگر جریان ترافیک نوع پین- ویتهم، به فرم دستگاه معادلات مشتق‌های پاره‌ای^۸ نوشته می‌شوند. این معادلات از نوع هذلولوی^۹ و در اغلب موارد غیرخطی هستند و حل تحلیلی ندارند. بنابراین برای حل معادلات این مدل باید از روش‌های عددی استفاده کرد. بدین منظور طول ناحیه ترافیکی و بازه زمانی مورد مطالعه به تعداد مشخصی تقسیم شده و توسط روش‌های عددی، متغیرهای وابسته که در این معادلات سرعت و چگالی هستند، در هر تکرار زمانی محاسبه شده و در مرحله بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. با به دست آوردن چگالی و سرعت در هر مرحله، سایر پارامترهای جریان ترافیک از قبیل حجم، سرفاصله‌های زمانی و مکانی نیز توسط روابط موجود به دست آمده و با تفسیر این مقادیر می‌توان تصمیم‌گیری‌های لازم را برای کنترل جریان ترافیک انجام داد (Mohammadian, ۲۰۱۷).

روش‌های عددی معمول مورد استفاده در حل معادلات کلان‌نگر حاکم بر جریان ترافیک نوع پین- ویتهم توسط مهندسان ترافیک عمدتاً شامل روش‌های حجم محدود می‌باشند که به منظور تخمین عددی حل دقیق معادلات مشتق‌های پاره‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند (Khan و همکاران، ۲۰۲۰). ویژگی اساسی

14. Monotonic Upstream Scheme for Conservation Law
15. Essentially Non- Oscillatory
16. Weighted ENO
17. Flux
18. LeVeque

8. Partial Differential Equations
9. Hyperbolic Systems
10. Shock Capturing
11. Godunov
12. Riemann Problem
13. High Resolution

در متر) و $u(x, t)$ سرعت کلان نگر وسایل نقلیه (برحسب متر بر ثانیه)، x و t به ترتیب فاصله مکانی و زمانی، τ زمان آسایش، زمانی است که طی آن سرعت جریان ترافیک به سرعت تعادلی می‌رسد. $V_e(\rho)$ سرعت تعادلی وسایل نقلیه بر اساس چگالی و C_0 ثابت سرعت است که معرف عکس‌العمل کلان نگر راننده به چگالی ترافیک است.

برای سرعت تعادلی روابط زیادی تاکنون ارائه شده است که در این مقاله از رابطه معروف گرین‌شیلدز (Greenshields, ۱۹۳۵) که به صورت ذیل است، استفاده می‌شود:

$$V_e(\rho) = u_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right) \quad (۲)$$

که u_m و ρ_m به ترتیب چگالی حداکثر و متوسط سرعت مکانی حداکثر هستند.

با توجه به این که در سیستم ارائه شده در رابطه (۱) مؤلفه منبع (سمت راست معادلات) صفر نمی‌باشد، سیستم غیر همگن^{۲۱} نامیده می‌شود.

سرعت‌های مشخصه^{۲۲} برابر با مقادیر ویژه^{۲۳} سیستم (λ) می‌باشند که با حل دترمینان ذیل به دست می‌آیند:

$$\det[J(u) - \lambda I] = 0 \quad (۳)$$

که در آن $J(u)$ ماتریس ژاکوبین^{۲۴} دستگاه معادلات رابطه (۱) می‌باشد.

در صورت وجود مقادیر ویژه واقعی سیستم معادلات هذلولوی به شمار می‌آید (Mohammadian و Wagneningen- van, ۲۰۱۸, Kessels).

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس ژاکوبین مربوطه به ترتیب عبارت‌اند از:

$$\lambda_{1,2} = u \pm C_0 \quad (۴)$$

$$r_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \pm C_0 \end{pmatrix} \quad (۵)$$

با توجه به اینکه دو مقدار ویژه واقعی و متمایز وجود دارد، سیستم معادلات مدل یک‌بعدی پین- ویتهم هذلولوی است.

۲-۲- مدل اصلاح شده پین- ویتهم

در مدل پین- ویتهم فرض می‌شود که رانندگان به طور مشابه به شرایط مختلف واکنش نشان می‌دهند و تغییرات اندکی در سرعت و چگالی رخ می‌دهد. این یک توصیف ناکافی از پیش فرض راننده است و در نتیجه می‌تواند منجر به رفتار ترافیکی غیر واقعی

و انبساطی^{۱۹} برای مسئله ریمن است. در سال‌های اخیر توسعه‌های مختلفی از الگوریتم پخش موج تغییر یافته برای مدل سازی سیلاب (Mahdizadeh و همکاران، ۲۰۱۱؛ Mahdizadeh و همکاران، ۲۰۱۲)، معادلات جریان گذار در لوله‌ها (Mahdizadeh و همکاران، ۲۰۱۸؛ Mahdizadeh و Moodi، ۲۰۱۸) و حل معادلات اولر^{۲۰} (Bale و همکاران، ۲۰۰۳؛ Mahdizadeh و Moodi، ۲۰۱۸؛ Mahdizadeh، ۲۰۱۸) ارائه گردیده است. الگوریتم پخش موج، از نوعی سرعت انتشار استفاده می‌نماید که ترکیبی از سرعت‌های تقریبی و دقیق ریمن بوده و از لحاظ محاسباتی نسبتاً پیچیده است (Mahdizadeh و همکاران، ۲۰۱۱).

بر اساس اطلاعات نویسندگان تاکنون هیچ توسعه‌ای از مدل‌های کلان‌نگر یک بعدی مرتبه دوم حاکم بر جریان ترافیک نوع پین- ویتهم و توسعه‌های آتی آن با استفاده از روش پخش موج با دقت بالا صورت نگرفته است. در این مقاله به منظور بررسی عملکرد حل عددی روش پیشنهادی از مدل متداول پین- ویتهم و مدل متأخر پین- ویتهم بر اساس رفتار توأمان فیزیولوژیکی- روان‌شناختی راننده استفاده شده است. نویسندگان این مقاله پس از اطمینان از عدم استفاده سایرین از الگوریتم پخش موج، روش اصلاح شده خود را (که تاکنون در مقالات گذشته در زمینه مدل سازی سیلاب، معادلات جریان گذار در لوله‌ها و حل معادلات اولر آزموده و استفاده کرده‌اند) برای این مدل‌ها تنظیم نموده و مورد استفاده قرار دادند.

ساختار مقاله بدین صورت می‌باشد: در ابتدا به معرفی معادلات حاکم مشتق‌های پاره‌ای جریان ترافیک یک بعدی با وجود مؤلفه منبع پرداخته می‌شود. سپس دو مدل ذکر شده بیان می‌گردند. در ادامه الگوریتم پخش موج با دقت بالا و روش موج شار تعریف شده و نهایتاً نتایج عددی بیان می‌شوند.

۲- معادلات حاکم

۲-۱- مدل پین- ویتهم

مدل کلان‌نگر مرتبه دوم جریان ترافیک یک‌بعدی پین- ویتهم که شامل معادله پیوستگی و معادله حرکت است را می‌توان با در نظر گرفتن راه همگن بدون دسترسی جانبی و صرف نظر از تعداد خطوط راه و نیز یک کلاس وسیله نقلیه به صورت ذیل ارائه کرد (Payne، ۱۹۷۱؛ Whitham، ۲۰۱۱):

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0 \\ \rho u_t + \rho u u_x + \rho C_0^2 \rho_x &= \rho \left(\frac{V_e(\rho) - u}{\tau} \right) \end{aligned} \quad (۱)$$

که $\rho(x, t)$ چگالی محلی وسایل نقلیه (برحسب وسیله نقلیه

22. Characteristic speeds
23. Eigenvalues
24. Jacobian matrix

19. Rarefaction Wave
20. Euler
21. Non-Homogeneous

۳- روش مدل سازی

۳-۱- الگوریتم پخش موج با دقت بالا

برای حل سیستم معادلات روابط (۱) و (۶) از روش حجم محدود گودونو به نام الگوریتم پخش موج گودونو استفاده می شود که اولین بار توسط LeVeque (۲۰۰۲) ارائه شد:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\sum_{K: S_1 < 0} \xi_{k,i-1/2} + \sum_{K: S_2 > 0} \xi_{k,i-1/2} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{F}_{i+1/2}^n - \bar{F}_{i-1/2}^n) \quad (10)$$

در رابطه فوق، U_i^n تقریب متوسط بردار مجهولات (چگالی و سرعت) در زمان $t = n\Delta t$ بوده و Δt ، Δx و n به ترتیب گام زمانی، گام مکانی و سطح زمانی هستند. i مربوط به ابتدای سلول، $i-1/2$ به معنای وسط سلول قبل و $i+1/2$ وسط سلول بعد می باشند. که $\xi_{k,i-1/2}$ عبارت است از k امین موج شار منتشر شده از سطح سلولی $i-1/2$ که با ضرب ضریب ویژه $\beta_{i-1/2}$ در بردار ویژه یعنی $\beta_{i-1/2} r_{i-1/2}$ قابل محاسبه است.

شارهای اصلاحی مرتبه دوم مورد نیاز برای رسیدن به حل با مرتبه بالا می باشند که اگر صفر باشند، روش گودونو مرتبه اول به دست می آید و برای محاسبه آن ها بایستی محدود کننده با مرتبه بالای مناسب انتخاب شود. لازم به ذکر است که در گسسته سازی به روش گودونو، توزیع کمیت ها در حجم کنترل ثابت در نظر گرفته می شود و از این رو دقت مکانی در این روش ها از مرتبه اول است که منجر به نتایج پراکنده می شود. جواب روش اصلی گودونو را می توان با اضافه کردن مؤلفه های مرتبه دوم ($\bar{F}_{i\pm 1/2}^n$) ارتقا داد. مشکل این مؤلفه ها آن است که در نزدیکی ناپیوستگی ها به خوبی عمل نمی کنند و بنابراین قادر به تولید جواب های دقیق نمی باشند. این مشکل با اعمال روش های با دقت بالا بر طرف می گردد (Moodi, ۲۰۱۷). در روش های دقت بالا، توزیع کمیت ها در داخل حجم کنترل متغیر است. در چنین حالتی، بر اساس این که چه توزیعی در داخل حجم کنترل در نظر گرفته شود و نیز شیب این توزیع چگونه محاسبه شود، روش های دقت بالای متفاوتی به وجود می آید. در افزایش مرتبه دقت باید به این نکته توجه داشت که افزایش دقت به دست آمده نسبت به افزایش هزینه محاسباتی مقرون به صرفه باشد. برای اعمال این روش ها عموماً از روش های کاهندگی مجموع تغییرات^{۲۶} استفاده می شود که همراه با توابع محدود کننده می باشند. به طور کلی یک روش عددی دارای خاصیت کاهندگی مجموع تغییرات است اگر در تکرارهای زمانی بیشتر مجموع تغییرات برای مقادیر کمیت ها کاهش یابد

و نوسانی در مسافت های کوچک شود (Khan و همکاران، ۲۰۲۰). Khan و همکاران (۲۰۱۹) با تغییر در فرمول بندی مدل بین-ویتهام باعث بهبود مدل گردیدند. نحوه در نظر گیری عامل عکس-العمل راننده در مدل کلان نگر جریان ترافیک در این مرجع مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته و ضمن مناسب ندانستن توابع ثابت، خطی و نمایی به علت به دست آمدن نتایج غیر واقعی، این پارامتر را متناسب با مربع مشتق جزئی چگالی نسبت به مکان فرض کرده اند. آگاهی راننده را متناسب با سرفاصله زمانی و معکوس چگالی در نظر گرفته اند و نهایتاً با ترکیب متغیرهای چندگانه مطرح شده، مدل پیشنهادی خود را به شکل رابطه (۶) ارائه کردند:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$

$$\rho u_t + \rho u u_x - \rho L_d u_x = \rho \left(\frac{V_e(\rho) - u}{\tau} \right) \quad (6)$$

که در آن L_d ثابت ترافیک است که جهت در نظر گرفتن رفتار توأمان فیزیولوژیکی- روان شناختی راننده در مدل وارد شده است که به صورت ذیل تعریف می شود:

$$L_d = \frac{V_e(\rho) \rho_x^2}{u_x \rho} \quad (7)$$

نحوه استخراج ثابت ترافیک که در آن به طور هم زمان ادراک، آگاهی، واکنش اولیه و نگرش راننده لحاظ شده است به طور مبسوط در مرجع Khan و همکاران (۲۰۱۹) ارائه شده است. مقادیر و بردارهای ویژه این مدل در روابط (۸) و (۹) ارائه شده اند.

$$\lambda_{1,2} = u \pm \sqrt{-(2V_e(\rho) \rho \rho)} \quad (8)$$

$$r_{1,2} = \left(u \pm \sqrt{\frac{1}{\frac{2u_m \rho}{\rho_m}}} \right) \quad (9)$$

گسسته سازی این مدل برای ارزیابی عملکرد آن توسط تکنیک تجزیه رو^{۲۵} صورت گرفته است. از تکنیک تجزیه رو می توان برای تقریب یک سیستم معادلات غیر خطی استفاده کرد این روش به خطی سازی ماتریس ژاکوبین با تجزیه آن به مقادیر ویژه و بردارهای ویژه می پردازد. این کار بر اساس این مفهوم است که متغیرهای معادلات غیر خطی، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه برای تغییرات کوچک در زمان و مکان محفوظ می مانند. این روش به طور گسترده ای مورد استفاده قرار گرفته است، زیرا قادر است اثرات تغییرات ناگهانی در متغیرهای معادلات را به دست آورد (Khan و همکاران، ۲۰۱۹).

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\rho_i \tilde{u}_i}{\rho_i} - V_e(\rho) \rho_i^2 \right] \\ & - \left[\frac{\rho_{i-1} \tilde{u}_{i-1}}{\rho_{i-1}} - V_e(\rho) \rho_{i-1}^2 \right] \\ & - \Delta x \left[\tilde{\rho}_{i-1/2} \left(\frac{V_e(\tilde{\rho}_{i-1/2}) - \tilde{u}_{i-1/2}}{\tau} \right) \right] \\ & = \beta_1 \left[\tilde{u}_i - \sqrt{\frac{2u_m \rho}{\rho_m}} \right] + \beta_2 \left[\tilde{u}_i + \sqrt{\frac{2u_m \rho}{\rho_m}} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن $\tilde{u}_{i-1/2}$ و $\tilde{\rho}_{i-1/2}$ چگالی و سرعت سطح سلولی $i-1/2$ می‌باشند که از ترکیب سرعت‌های دقیق و تقریبی موج ریمن که در مرجع (Mahdizadeh و همکاران، ۲۰۱۱) به‌طور کامل تشریح شده است، قابل محاسبه‌اند. حل‌کننده تقریبی ریمن مورد استفاده در این مقاله، حل‌کننده رو^{۳۰} می‌باشد (Roe، ۱۹۸۱). برای مدل پین-ویتهم یک‌بعدی، چگالی و سرعت تقریبی سطح سلولی $i-1/2$ از رابطه ذیل به‌دست می‌آید:

$$\tilde{\rho}_{i-1/2} = \sqrt{\rho_{i-1} \rho_i}, \quad \tilde{u}_{i-1/2} = \frac{\sqrt{\rho_{i-1} \tilde{u}_{i-1} + \rho_i \tilde{u}_i}}{\sqrt{\rho_{i-1} + \rho_i}} \quad (15)$$

رابطه (۱۴) را می‌توان به‌صورت ذیل نیز نوشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \tilde{u}_i - C_0 & \tilde{u}_i + C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

با حل سیستم خطی رابطه (۱۶)، ضرایب β_1 و β_2 به‌دست می‌آیند که در محاسبه موج شار $\xi_{k,i-1/2}$ به‌کار می‌روند. روش موج شار برای مدل پین-ویتهم مشابه روابط (۱۳) تا (۱۶) است و تنها کافی است که $F(U_i)$ و $\sqrt{\frac{2u_m \rho}{\rho_m}}$ برای معادله دوم در رابطه (۱۴) به ترتیب به‌صورت روابط (۱۷) و (۱۸) اصلاح شوند:

$$F(U_i) = \rho_i (\tilde{u}_i^2 + C_0^2) \quad (17)$$

$$C_0 = \sqrt{\frac{2u_m \rho}{\rho_m}} \quad (18)$$

۳-۳- شرایط پایداری

برای الگوریتم پخش موج یک‌بعدی، عدد کورانت^{۳۱} به‌منظور بررسی پایداری و به‌صورت ذیل تعریف می‌گردد. به‌عنوان یک شرط لازم، این عدد باید کوچک‌تر مساوی یک باشد (Moodi و Mahdizadeh، ۲۰۱۸):

(Mohammadian، ۲۰۱۷). در این مقاله برای الگوریتم پیشنهادی پخش موج با دقت بالا، از محدودکننده ون لیر^{۲۷} استفاده شده که رابطه کلی آن به‌صورت ذیل است که در آن θ ضریب اسکالر LeVeque (۲۰۰۲) است:

$$\varphi(\theta) = \frac{\theta + |\theta|}{1 + |\theta|} \quad (11)$$

۳-۲- روش موج شار

روش موج شار اولین بار توسط Bale و همکاران (۲۰۰۳) برای حل مسئله دینامیک گازها ارائه شد. این روش برای معادلات آب‌های کم‌عمق یک‌بعدی و دوبعدی توسط Mahdizadeh و همکاران (۲۰۱۱) و Mahdizadeh و همکاران (۲۰۱۲) و برای معادلات اولر توسط Mahdizadeh (۲۰۱۸) اصلاح گردید که در این مقاله از این نسخه متأخر که برای معادلات جریان ترافیک کلان‌نگر توسعه یافته است، استفاده می‌شود. فرمول‌بندی کلی موج شار به‌صورت ذیل است:

$$F(U_i) - F(U_{i-1}) - \phi_{i-1/2} \Delta x = \sum_{K=1}^{M_w} \xi_{k,i-1/2} \quad (12)$$

که M_w تعداد موج‌ها و $\phi_{i-1/2}$ تخمینی برای مؤلفه‌های منبع (سمت راست معادلات روابط (۱) و (۶)) است. برای محاسبه $\xi_{k,i-1/2}$ ها بایستی مسئله ریمن حل شود. این مسئله در جواب سیستم‌های هذلولی که ممکن است در پاره‌ای از موارد یک ناپیوستگی پرشی ساده در طول خط مشخصه گسترش یابد، تعریف می‌شوند. مقدار اولیه برای رابطه (۱۳) برای یک سیستم یک‌بعدی، به‌عنوان مسئله ریمن شناخته می‌شود (Moodi و Mahdizadeh، ۲۰۱۸):

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_l & x < 0 \\ U_r & x > 0 \end{cases} \quad (13)$$

برای حل آن می‌توان از روش موج شار اصلاح شده^{۲۸} با استفاده از رابطه (۱۲) و با انتخاب سرعت‌های ریمن Mahdizadeh و همکاران (۲۰۱۱) استفاده کرد. روش پیشنهاد شده قوانین بقا را ارضا کرده و می‌تواند بین مؤلفه‌های منبع و تفاضلات شار تعادل برقرار نماید. برای توسعه روش موج شار معادلات جریان ترافیک کلان‌نگر پین-ویتهم اصلاح شده که بعد از این مدل خان^{۲۹} خوانده می‌شود، تنها کافی است که اختلاف شار بین دو سلول مجاور منهای مؤلفه منبع با مجموع شارهای مربوطه برابر قرار داده شوند. به‌عبارت‌دیگر:

30. Roe solver
31. Courant-Friedrichs-Lewy condition (CFL)

27. Van Leer
28. Modified Flux Wave (MFW)
29. Khan model

شرط عدد کورانت، گام زمانی برای هر دو مدل $dt = 0.01s$ لحاظ شده که در نتیجه تعداد بازه‌های زمانی ۳۰۰۰ می‌باشد. عدد کورانت مورد استفاده در این شبیه‌سازی، عدد مناسب 0.9 انتخاب شده است. توزیع سرعت تعادلی، از نوع گرین شیلدز است (رابطه (۲)) که در آن سرعت حداکثر و چگالی نرمال شده به ترتیب $34m/s$ و یک در نظر گرفته شده‌اند. زمان آسایش $\tau = 0.5s$ لحاظ شده که در مسافت‌های کوتاه مناسب است. توزیع اولیه چگالی جریان ترافیک مطابق ذیل برای مسئله ایست-و-حرکت جریان ترافیک در نظر گرفته شده است (Khan و همکاران، ۲۰۱۹):

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} 0.01, & \text{for } x \leq 10; \\ 0.3, & \text{for } 10 < x \leq 30; \\ 0.1, & \text{for } 30 < x \leq 40; \\ 0.3, & \text{for } 40 < x \leq 50; \\ 0.2, & \text{for } x > 50 \end{cases} \quad (23)$$

از رابطه (۲۳) استنتاج می‌شود که جریان ترافیک در بدترین حالت در نظر گرفته شده است، زیرا دو دسته از وسایل نقلیه با تغییرات چگالی قابل توجه در فاصله فقط ۱۰۰ متر وجود دارند. در این مثال به بررسی پاسخ‌های به‌دست‌آمده از روش عددی پیشنهادی برای وضعیتی که در آن یک آشوب اولیه در مقادیر کمیت‌ها وجود دارد پرداخته شده است. این حالت نمایانگر وضعیتی است که در آن نواحی مختلف ازدحام در میان نواحی جریان آزاد قرار گرفته‌اند. در چنین حالتی که به دلیل وجود آثار چراغ‌های راهنمایی در معابر شهری زیاد دیده می‌شود، وسایل نقلیه در طول مسیر با وضعیت‌های مختلف جریان و ازدحام روبه‌رو شده و در نتیجه در این حالت، چگالی ترافیک و سرعت متناظر آن در طول مسیر به صورت متناوب تکرار می‌شوند. به دلیل قرارگیری نواحی ازدحام نمایان نواحی جریان آزاد، امواج انبساطی و شوک در جریان ترافیک پدیدار می‌شوند. برای بررسی اثر تناوبی این وضعیت و در نظر گرفتن برخورد امواج، این مسئله با توجه به مزایایی که شرایط هندسی تناوبی دارد، بر روی راه دایره‌ای تنظیم شده است. چهار ناپیوستگی در پروفیل اولیه چگالی دیده می‌شود و در نتیجه چهار مسئله ریمان به صورت هم‌زمان در مدل وجود دارد. ناپیوستگی نخست در موقعیت ۱۰ متری قرار دارد. در این نقطه، در بالادست جریان آزاد برقرار است و در پایین دست آن، حالت ازدحام وجود دارد. این حالت موجب انتشار امواج شوک به سمت بالادست می‌شود. هم‌چنین، در ۳۰ متری ناپیوستگی دیگری موجود است. در بالادست این نقطه، حالت ازدحام وجود دارد و در مقابل، در پایین دست آن، وضعیت جریان آزاد حاکم است. در نتیجه، انتظار می‌رود که با گذشت زمان، امواج انبساطی به سمت بالادست و پایین دست انتشار یابند. در دو ناپیوستگی دیگر

$$C_r = \frac{\max(s_{k,i-\frac{1}{2}}) \cdot dt}{dx} \quad (19)$$

که برای مدل پین-ویتهم عبارت است از (Khan و Gulliver، ۲۰۲۰):

$$s_{k,i-\frac{1}{2}} = u_m + C_0 \quad (20)$$

و برای مدل اصلاح شده پین-ویتهم (Khan و همکاران، ۲۰۱۹):

$$s_{k,i-\frac{1}{2}} = u_m + \sqrt{\frac{2u_m\rho}{\rho_m}} \quad (21)$$

۳-۴- شرایط هندسی

شرایط هندسی، به معنای شرایط مسیری است که جریان ترافیک در آن‌ها بررسی می‌شود. در این مقاله، مطالعات بر روی حالت راه دایره‌ای انجام می‌شود. راه دایره‌ای یکی از بهترین هندسه‌ها برای ارزیابی عددی مدل‌های ترافیکی است. این راه به دلیل ایجاد شرایط مرزی تناوبی^{۳۲}، وضعیت ترافیک را برای شرایط اولیه آن به صورت طولانی مدت و بدون نیاز به تنظیم دبی ورودی و خروجی شبیه‌سازی می‌کند. هم‌چنین بر روی راه دایره‌ای، چگونگی توزیع و پخش یک وضعیت ترافیکی را به خوبی می‌توان رصد کرد و بعضی حالت‌های خاص مانند وضعیت ایست و حرکت^{۳۳} را می‌توان به خوبی در آن ایجاد نمود. هم‌چنین از آنجاکه در راه دایره‌ای، امواج ترافیکی پایین دست به سمت بالادست منتقل می‌شوند، این نوع از راه هندسه مناسبی را برای تحلیل برخورد امواج ترافیکی فراهم می‌کند (Mohammadian، ۲۰۱۷).

در این مقاله دسترسی جانبی راه محدود شده است و لذا حجم ترافیک تبدالی از طریق رمپ‌ها به این هندسه وجود ندارد. مقادیر شرایط مرزی برای سلول‌های نخست و انتهایی در راه دایره‌ای به صورت روابط ذیل محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} U_{1+\frac{1}{2}}^L &= U_1, & U_{1+\frac{1}{2}}^R &= U_2, \\ U_{N+\frac{1}{2}}^L &= U_N, & U_{N+\frac{1}{2}}^R &= U_1 \end{aligned} \quad (22)$$

۴- صحت‌سنجی

در این بخش به ارزیابی کارایی روش شار اصلاح شده در حل عددی معادلات جریان ترافیک کلان‌نگر برای دو مدل پین-ویتهم و مدل خان با استفاده از متغیرهایی که در جدول (۱) ارائه شده است، پرداخته می‌شود. شرایط مرزی تناوبی برای یک مسیر دایره‌ای به طول ۱۰۰ متر که به ۱۰۰ سلول محاسباتی حجم محدود با گام مکانی یک متر تقسیم شده‌اند، با مجموع زمان شبیه‌سازی $T_f = 30s$ در نظر گرفته شده است. برای برآوردن

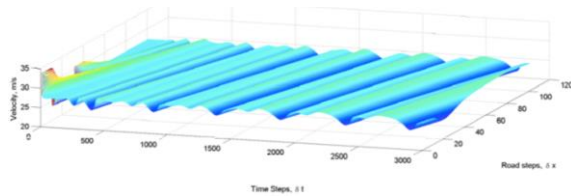
شرایط مشابه دو حالت قبل است.

جدول ۱- متغیرهای شبیه‌سازی برای هر دو مدل (Khan و همکاران، ۲۰۱۹)

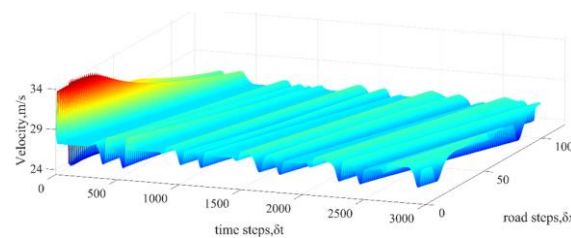
پارامتر	مقدار	توصیف
$V_e(\rho)$	توزیع گرینشیلدز	توزیع سرعت تعادلی
u_m	۳۴ متر بر ثانیه	سرعت حداکثر
τ	۰/۵ ثانیه	زمان آسایش
C_0	۵/۸۳ متر بر ثانیه	ثابت سرعت
L	۱۰۰ متر	طول جاده دایروی
dx	۱ متر	گام مکانی
dt	۰/۰۱ ثانیه	گام زمانی
ρ_m	۱	چگالی نرمال شده حداکثر
T_f	۳۰ ثانیه	زمان کلی شبیه‌سازی
N	۳۰۰۰	تعداد گام زمانی

حداقل (صفر) و حداکثر (۳۴ متر بر ثانیه) قرار گرفته‌اند، رفتار جریان ترافیک واقعی است. همان‌طور که انتظار می‌رود در مکان‌هایی که چگالی پایین است، سرعت جریان ترافیک تند است. در هر دو زمان ۱۵ و ۳۰ ثانیه و برای هر دو روش، منحنی سرعت هموار بوده، نوسانات عددی مشاهده نمی‌شوند.

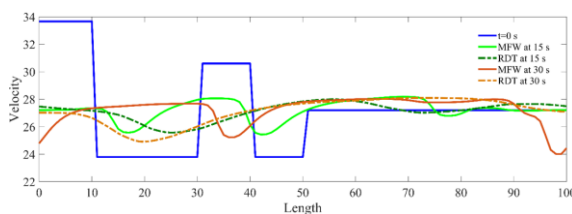
رفتار مکانی- زمانی پارامتر چگالی برای مدل خان براساس تکنیک تجزیه رو در شکل (۴) و براساس الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح‌شده در شکل (۵) و پروفیل‌های چگالی مربوطه در زمان‌های مختلف در شکل (۶) ارائه شده‌اند. قابل مشاهده است که منحنی چگالی با گذشت زمان هموارتر شده است. شروط سازگاری و کنترل خطای پخش عددی برآورده شده‌اند. میزان نوسانات چگالی نرمال شده، برای هر دو روش و در هر دو زمان ۱۵ و ۳۰ ثانیه بین ۰/۱۵ تا ۰/۳ تغییر می‌کنند که معرف رفتار مناسب (قرار گرفتن بین صفر و یک) و نوسانات کم می‌باشد.



شکل ۱- رفتار سرعت جریان ترافیک در مدل خان براساس تکنیک تجزیه رو (Khan و همکاران، ۲۰۱۹)



شکل ۲- رفتار سرعت جریان ترافیک در مدل خان براساس الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح‌شده



شکل ۳- مقایسه پروفیل‌های سرعت در زمان‌های مختلف مدل خان براساس الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح‌شده (MFW) و تکنیک تجزیه رو (RDT)

در ادامه، چگونگی این انتشار را بر اساس مدل پین- ویتهم و مدل خان بررسی کرده و پاسخ‌های به‌دست‌آمده از روش عددی پیشنهادی ارزیابی می‌شوند.

۴-۱- نتایج عددی مدل خان

شکل (۱) رفتار سرعت ترافیک را برای مدل خان روی مسیر دایره‌ای نشان می‌دهد که برای گسسته‌سازی این مدل از تکنیک تجزیه رو استفاده شده است (Khan و همکاران، ۲۰۱۹). درحالی‌که در شکل (۲) رفتار این متغیر براساس الگوریتم پیشنهادی این مقاله ارائه شده است. در شکل (۳) منحنی‌های سرعت مدل خان برحسب گام‌های مکانی در زمان‌های صفر، ۱۵ و ۳۰ ثانیه براساس الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح‌شده و تکنیک تجزیه رو نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل (۱) و (۲) دیده می‌شود، هر دو روش پاسخ واقعی به تغییرات صورت گرفته در چگالی نشان می‌دهند. به‌طور مشخص، رفتار نوسانی^{۳۴} کنترل شده و سرعت‌هایی بیشتر از سرعت حداکثر یعنی $u_m = 34 \text{ m/s}$ مشاهده نمی‌شود و لذا شرط سازگاری^{۳۵} که ایجاب می‌کند می‌کند مقدار کمیت‌ها از مقدار حداکثر آن‌ها بیشتر نشود در هر دو روش برای مدل خان برآورده شده است. هر دو روش در کنترل خطای پخش عددی^{۳۶} موفق عمل کرده‌اند و نهایتاً هر دو روش دارای خاصیت حفظ مقدار مثبت^{۳۷} بوده و در نتیجه پاسخ منفی را برای متغیر سرعت محاسبه نکرده‌اند.

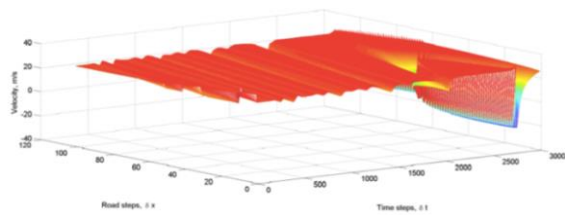
در شکل (۳) قابل مشاهده است که نوسانات سرعت برای هر دو روش و در هر دو زمان ۱۵ و ۳۰ ثانیه بین ۲۴ تا ۲۸ متر بر ثانیه تغییر می‌کنند که هر چه از نقطه شروع فاصله گرفته می‌شود دامنه نوسان کم‌تر می‌شود. با توجه به این که سرعت‌ها بین حدود

کرده است.

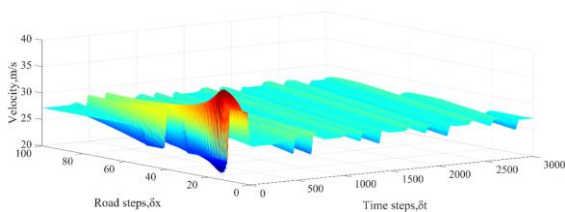
در شکل (۹) منحنی‌های سرعت مدل پین- ویتهم برحسب گام‌های مکانی در زمان‌های صفر، ۱۵ و ۳۰ ثانیه براساس الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح‌شده و تکنیک تجزیه رو نشان داده شده است. در ۳۰ ثانیه و با استفاده از تکنیک تجزیه رو، در فاصله ۶۸ متری، سرعت به منفی ۱۴ متر بر ثانیه رسیده است که غیرممکن است. در صورتی که در روش پیشنهادی نوسانات سرعت بین ۲۰ تا ۳۰ متر بر ثانیه است و برخلاف دیگر روش، مدل پایدار می‌باشد که به‌وضوح برتری این روش بر تکنیک تجزیه رو را مشخص می‌کند.

در شکل‌های (۱۰) و (۱۱) رفتار چگالی ترافیک مدل پین- ویتهم برای دو رویکرد مشاهده می‌شود و در شکل (۱۲) همین رفتار در زمان‌های مختلف برای هر دو روش ارائه شده است. تکنیک تجزیه رو در برآورد متغیر چگالی ناتوان است. نوسانات منحنی چگالی با گذشت زمان بیشتر شده است، لذا مدل ناپایدار است. مقدار کمیت چگالی نرمال شده در برخی از نقاط از یک بیشتر است و به عدد ۲/۵ رسیده است که غیرممکن است. درحالی‌که مدل براساس الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح‌شده هم پایدار بوده و هم در آن شروط سازگاری و حفظ مقدار مثبت برآورده شده است که توانایی بالای روش را در مقایسه با رویکرد دیگر نشان می‌دهد.

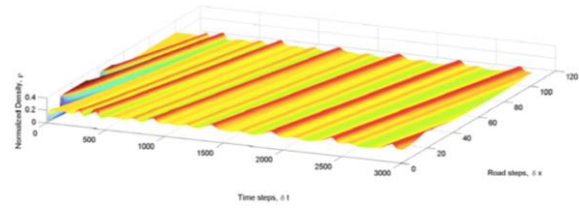
به‌منظور بررسی نزدیکی نتایج دو روش الگوریتم پخش موج اصلاح‌شده با تکنیک تجزیه رو، نرم خطای اقلیدسی^{۳۸} برای دو مدل پین- ویتهم و خان در جدول (۲) ارائه شده است.



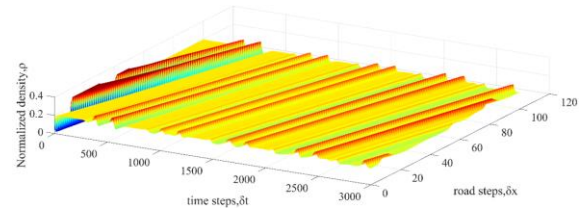
شکل ۷- رفتار سرعت جریان ترافیک در مدل پین- ویتهم براساس تکنیک تجزیه رو (Khan و همکاران، ۲۰۱۹)



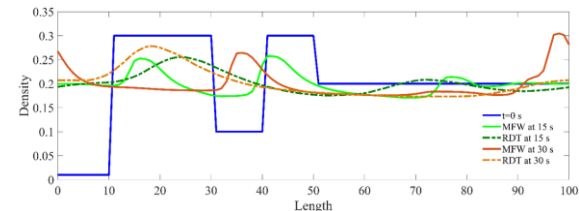
شکل ۸- رفتار سرعت جریان ترافیک در مدل پین- ویتهم بر اساس الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح‌شده



شکل ۴- رفتار چگالی جریان ترافیک در مدل خان براساس تکنیک تجزیه رو (Khan و همکاران، ۲۰۱۹)



شکل ۵- رفتار چگالی جریان ترافیک در مدل خان براساس الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح‌شده



شکل ۶- مقایسه پروفیل‌های چگالی در زمان‌های مختلف مدل خان براساس الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح‌شده (RDT) و تکنیک تجزیه رو (MFW)

۴-۲- نتایج عددی مدل پین- ویتهم

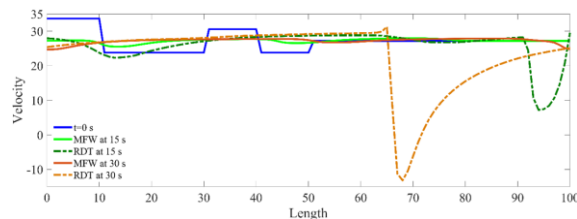
در شکل (۷) رفتار سرعت جریان ترافیک برای مدل پین- ویتهم روی مسیر دایره‌ای براساس تکنیک تجزیه رو نشان داده شده است. با گذشت زمان و افزایش فاصله، نوسانات سرعت جریان افزایش یافته است و لذا مدل پایدار نمی‌باشد. مدل در این روش دارای خاصیت حفظ مقدار مثبت نیست و پاسخ‌های منفی را برای متغیر سرعت محاسبه کرده است.

در شکل (۸) رفتار همین متغیر براساس الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح‌شده ارائه شده است. مدل پایدار است چراکه با گذشت زمان و افزایش فاصله، نوسانات سرعت جریان کاهش یافته است. روش پیشنهادی در برآوردن خاصیت حفظ مقدار مثبت موفق بوده و در نتیجه پاسخ منفی را برای متغیر سرعت محاسبه نکرده است. مقدار کمیت‌ها با بیشینه ۳۶/۷۲ متر بر ثانیه از مقدار حداکثر آن‌ها اندکی بیشتر شده است و لذا شرط سازگاری برآورده نشده است. در مجموع روش پیشنهادی پخش موج اصلاح‌شده در مقایسه با تکنیک تجزیه رو در مدل پین- ویتهم موفق‌تر عمل

جدول ۲- نتایج نرم خطای اقلیدسی محاسبه شده الگوریتم

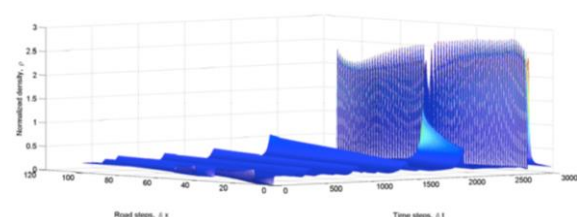
پارامتر	زمان شبیه سازی	مدل پین- ویتهم	مدل خان
چگالی	۱۵	۰/۰۴۸۳	۰/۰۳۰۴
	۳۰	۰/۳۰۰۱	۰/۰۴۰۱
سرعت	۱۵	۴/۵۵۹	۰/۹۵۷۶
	۳۰	۱۰/۴۶۴۱	۰/۲۷۵۶

در نتیجه گیری کلی می توان ذکر کرد که مدل پین- ویتهم بر اساس تکنیک تجزیه رو پاسخ واقعی به تغییرات صورت گرفته در چگالی برای هر دو متغیر چگالی و سرعت نشان نمی دهد. خاصیت حفظ مقدار مثبت برای متغیر سرعت و شرط سازگاری که ایجاب می کند مقدار کمیت ها از مقدار حداکثر آن ها بیشتر نشود برای پارامتر چگالی برآورده نشده است و مدل در هر دو متغیر ناپایدار است. در حالی که الگوریتم پخش موج اصلاح شده باعث شده است که مدل پایدار باشد، رفتار نوسانی به مراتب بیشتر کنترل شود، خاصیت حفظ مقدار مثبت رعایت شده، هر چند که شرط سازگاری را به طور کامل برآورده نکرده است. در مدل پین- ویتهم مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده یعنی مدل خان، شرط سازگاری، خاصیت حفظ مقدار مثبت، کنترل خطای پخش عددی و پایداری مدل برای هر دو رویکرد برآورده شده است. در مقایسه دو رویکرد به راحتی قابل ملاحظه است که الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح شده در مقایسه با تکنیک تجزیه رو در هر دو مدل، موفق تر عمل کرده است، این در حالی است که هزینه محاسباتی هر دو روش با توجه به عدم تغییر تعداد تقسیمات مکانی و زمانی یکسان است. از منظر تجزیه و تحلیل ترافیکی، در صحت-سنجی صورت گرفته با استفاده از دو روش الگوریتم پخش موج اصلاح شده و تکنیک تجزیه رو، گذار از جریان آزاد به وضعیت ازدحام تحلیل می شوند که این گذرها در پروفیل سرعت و چگالی به شکل گیری و انتشار امواج شوک می انجامد. تحلیل دیگر گذر از وضعیت های ازدحام به وضعیت جریان آزاد است که با انتشار امواج انبساطی همراه است. همچنان که از کلیت پاسخ های به آمده انتظار می رود، نتایج به دست آمده برای این شرایط باید کاهش چگالی در نواحی ازدحامی و نیز افزایش آن را در نواحی با وضعیت جریان آزاد نشان دهد. همچنین، متناسب با این تغییرات، سرعت در قسمت های مربوط به ازدحام افزایش یابد و در نواحی با جریان آزاد، کاهش سرعت ماکروسکوپی^{۳۹} جریان ترافیک صورت پذیرد. با بررسی نتایج به دست آمده از رفتار مقایسه ای پروفیل های چگالی و سرعت در زمان های مختلف در شکل های (۳)، (۶) برای مدل خان در هر دو روش و شکل های (۹) و (۱۲) برای مدل پین- ویتهم با استفاده از روش الگوریتم پخش موج با دقت بالا، انتظارات

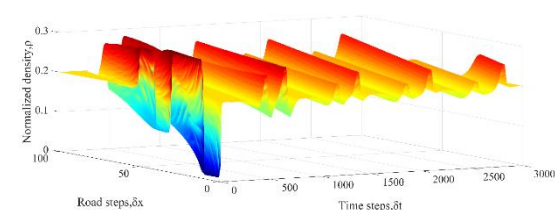


شکل ۹- مقایسه پروفیل های سرعت در زمان های مختلف مدل

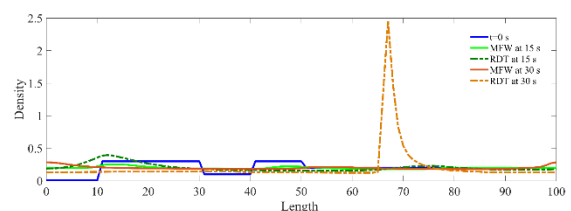
پین- ویتهم بر اساس الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح شده (MFW) و تکنیک تجزیه رو (RDT)



شکل ۱۰- رفتار چگالی جریان ترافیک در مدل پین- ویتهم بر اساس تکنیک تجزیه رو (Khan و همکاران، ۲۰۱۹)



شکل ۱۱- رفتار چگالی جریان ترافیک در مدل پین- ویتهم بر اساس الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح شده



شکل ۱۲- مقایسه پروفیل های چگالی در زمان های مختلف مدل

پین- ویتهم بر اساس الگوریتم پیشنهادی پخش موج اصلاح شده (MFW) و تکنیک تجزیه رو (RDT)

برای هر دو متغیر چگالی و سرعت و در هر دو زمان ۱۵ و ۳۰ ثانیه، در مدل خان خطای نسبی کمتری مشاهده می شود. هر چه زمان شبیه سازی بیشتر می شود، میزان خطا بیشتر شده و این اختلاف برای متغیر سرعت میزان بیشتری دارد.

- hyperbolic conservation laws", *Journal of Computational Physics*, 2008, 227 (6), 3191-3211.
- Del Castillo JM, Pintado P, Benitez FG, "The reaction time of drivers and the stability of traffic flow", *Transportation Research Part B: Methodological*, 1994, 28 (1), 35-60.
- Chen J, Shi Z, Hu Y, "Numerical solutions of a multi-class traffic flow model on an inhomogeneous highway using a high-resolution relaxed scheme", *Journal of Zhejiang University SCIENCE C*, 2012, 13 (1), 29-36.
- Davoodi N, *Adaptive Numerical Methods for Macroscopic Traffic Flow Problems*. Ferdowsi University of Mashhad, 2014 (In Persian).
- Delis AI, Nikolos IK, Papageorgiou M, "High-resolution numerical relaxation approximations to second-order macroscopic traffic flow models", *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*. Elsevier, 2014, 44, 318-349.
- Greenshields BD, "A study in highway capacity", *Highway Research Board Proceedings*, 1935, 448-477.
- Khan Z, "Traffic modelling for intelligent transportation systems", 2016.
- Khan ZH, Gulliver TA, Azam K, Khattak KS, "Macroscopic Model on Driver Physiological and Psychological Behavior at changes in Traffic", *Journal of Engineering And Applied Sciences*, 2019, 38 (2), 57-66.
- Khan ZH, Gulliver TA, Gulliver TA, Khattak KS, Qazi A, "A Macroscopic Traffic Model Based on Reaction Velocity", *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*, 2020, 44 (1), 139-150.
- Khan ZH, Gulliver TA, "A macroscopic traffic model based on transition velocities", *Journal of Computational Science*, 2020, 43, 101131.
- LeVeque RJ, *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge university press, 2002.
- Lighthill MJ, Whitham GB, "On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads", *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 1955, 229 1178, 317-345.
- Mahdizadeh H, "A modified flux-wave formula for the solution of one-dimensional Euler equations with gravitational source term", *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, 2018, 8 (2), 25-37.
- Mahdizadeh H, Sharifi S, Omidvar P, "On the Approximation of Two-Dimensional Transient Pipe Flow Using a Modified Wave Propagation Algorithm", *Journal of Fluids Engineering*, 2018, 140 (7).
- Mahdizadeh H, Stansby PK, Rogers BD, "On the approximation of local efflux/influx bed discharge in the shallow water equations based on a wave propagation algorithm", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2011, 66 (10), 1295-1314.
- Mahdizadeh H, Stansby PK, Rogers BD, "Flood Wave Modeling Based on a Two-Dimensional Modified Wave Propagation Algorithm Coupled to a Full-Pipe

فوق برآورده شده و انتشار جریان ترافیک به صورت امواج انبساطی و شوک نیز در پاسخ‌ها به خوبی ملاحظه می‌شوند.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک الگوریتم پخش موج با دقت بالا برای حل عددی معادلات یک بعدی مرتبه دوم جریان ترافیک دو مدل کلان‌نگر بین-ویتهام و بین-ویتهام مبتنی بر پاسخ فیزیولوژیکی راننده ارائه شده است. به منظور صحت‌سنجی الگوریتم پیشنهادی، برای یک مسیر دایره‌ای با شرایط مرزی تناوبی، مسئله قرارگیری نواحی مختلف ازدحام در میان نواحی جریان آزاد با چهار ناپیوستگی انتخاب شد. تغییرات مکانی-زمانی به همراه پروفیل‌های دو متغیر سرعت و چگالی در زمان‌های مختلف ارائه گردید. نتایج مبین این مطلب است که الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با تکنیک تجزیه رو که به طور متداول استفاده می‌شود، پاسخ‌های قابل قبول پایداری را خصوصاً در رابطه با مدل متداول بین-ویتهام ارائه می‌دهد. تکنیک تجزیه رو در برآورد متغیر چگالی مدل متداول ناتوان عمل کرده است. نوسانات منحنی‌های چگالی و سرعت با گذشت زمان بیشتر شده‌اند. مقدار کمیت چگالی نرمال شده در برخی از نقاط به عدد $2/5$ رسیده است که غیرممکن است. درحالی‌که خروجی این مدل براساس الگوریتم پیشنهادی پخش موج با دقت بالا پایدار بوده و مقدار کمیت چگالی نرمال شده بین مقادیر مجاز صفر و $0/3$ قرار دارد. در خصوص متغیر سرعت نیز همین شرایط مشاهده می‌شود که توانایی بالای روش را در مقایسه با رویکرد دیگر نشان می‌دهد. روش پیشنهادی به خوبی می‌تواند ناپیوستگی‌ها در بازه مکانی کوتاه را تحلیل کند. در پاسخ‌های به دست آمده مشاهده می‌شود که جهت انتشار امواج با جهت مورد انتظار هماهنگ است، هم‌چنین شکل‌گیری و انتشار امواج انبساطی و شوک با استفاده از این روش به درستی انجام می‌شود. نوسانات عددی که عمدتاً در مرز ناپیوستگی‌ها به وجود می‌آیند، در پاسخ‌های به دست آمده از این الگوریتم دیده نمی‌شود. الگوریتم پیشنهادی که از روش دقت بالا با محدودکننده ون لیر استفاده می‌کند، در کنترل پخش عددی بسیار خوب عمل کرده است. در نهایت استفاده از این روش برای سایر مدل‌های کلان‌نگر جریان ترافیک و توسعه برای معادلات دوبعدی توسط مهندسان پیشنهاد می‌شود.

۶- مراجع

- Bale DS, Leveque RJ, Mitran S, Rossmanith JA, "A Wave Propagation Method for Conservation Laws and Balance Laws with Spatially Varying Flux Functions", *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2003, 24 (3), 955-978.
- Borges R, Carmona M, Costa B, Don WS, "An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for

- Network Solver", *Journal of Hydraulic Engineering*, 2012, 138 (3), 247-259.
- Mohammadian S, Numerical Study on Traffic Flow Prediction Using Different Second-Order Continuum Traffic Flow Models. Ferdowsi University of Mashhad. (In Persian)
- Mohammadian S, van Wageningen-Kessels F, "Improved Numerical Method for Aw-Rascle Type Continuum Traffic Flow Models", *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, 2018, 2672 (20), 262276.
- Moodi S, Numerical Modelling of Flood Flow in Sewer Networks considering the Effects of the Manhole. Sistan and Baluchestan. (In Persian), 2017.
- Moodi S, Mahdizadeh H, "Numerical Modelling of Water Influx Falling into an Empty Tank using a Modified Wave Propagation Algorithm", *Modares Mechanical Engineering*, 2018, 18 (6), 182-190. (In Persian)
- Ngoduy D, "Instability of cooperative adaptive cruise control traffic flow: A macroscopic approach", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, 18 (10), 2838-2851.
- Ngoduy D, Hoogendoorn SP, Van Zuylen HJ, "Comparison of Numerical Schemes for Macroscopic Traffic Flow Models", *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, 2004, 1876 (1), 52-61.
- Payne H, "Models of freeway traffic and control, Simulation Councils", INC.: San Diego, CA, USA, 1971, 51-61.
- Richards PI, "Shock Waves on the Highway", *Operations Research*, 1956, 4 (1), 42-51.
- Roe P, "Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes", *Journal of Computational Physics*, 1981, 43 (2), 357-372.
- Sreekumar M, Joshi SM, Chatterjee A, "Analyses and implications of higher order finite volume methods on first-order macroscopic traffic flow models", *Transportation Letters*, 2019, 11 (10), 542-557.
- Whitham GB, *Linear and nonlinear waves*, John Wiley and Sons.
- Zhang HM, "A theory of nonequilibrium traffic flow", *Transportation Research Part B: Methodological*, 1998, 32 (7), 485-498.

EXTENDED ABSTRACT

Applying High-Resolution Wave Propagation Method in Numerical Modeling of Macroscopic Traffic Flow based on Driver Physiological-Psychological Behavior

Morteza Araghi^{a,*}, Hossein Mahdizadeh^a, Sadegh Moodi^b

^a Department of Civil Engineering, University of Birjand, Birjand 5632202301, Iran

^b Department of Civil Engineering, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan 5431132000, Iran

Received: 12 January 2021; **Accepted:** 17 August 2021

Keywords:

Second- order macroscopic traffic flow models, Wave propagation algorithm, Flux-wave approach, Riemann solver.

1. Introduction

In this paper, a high-resolution version of the Godunov-type second-order Wave Propagation Algorithm (WPA) for one-dimensional macroscopic traffic flow modeling is presented. The method is a well-balanced model and is able to behave the source terms within the flux-differencing adjacent to the finite volume method. The defined numerical scheme utilizes the advantage of combination both approximate and exact Riemann speeds which enables the method to avoid non-negative velocities. To the best of authors' knowledge, no development of WPA with high-resolution for the common macroscopic Payne-Whitham (PW) model and its extended versions has taken place so far.

2. Governing equations

2.1. Payne-Whitham model (PW)

The one dimension second-order macroscopic traffic model can be described as a hyperbolic system of conservation laws. Payne (1971) and Witham (2011) proposed a two- equation traffic flow model in conservative form. This model is still one of the most widely used second-order models today due to its relatively good ability to simulate traffic flow using the least variables. In this model the first equation devised for the vehicles conservation as a continuity equation within the road whilst the second equation calculated the acceleration of traffic pattern based upon the driver prediction, relaxation and traffic inertia.

2.2. Modified PW model

The PW model assumes that drivers respond similarly to different conditions and that small changes in speed and density occur. This is an inadequate description of the driver anticipation and can therefore lead to unrealistic traffic behavior and oscillation over short distances (Khan et al., 2020). Khan et al. (2019) in a study that is considered in this article to compare the results and improve it, by introducing traffic constant as a function of the driver physiological-psychological behavior and specifically the variables of perception, awareness, attitude and initial reaction, improve the common PW model.

* Corresponding Author

E-mail addresses: m.araghi@birjand.ac.ir (Morteza Araghi), hossein,mahdizadeh@birjand.ac.ir (Hossein Mahdizadeh), sadegh.moodi@gmail.com (Sadegh Moodi).

3. Methodology

3.1. WPA with high-resolution

To solve hyperbolic system of conservation laws, a Godunov-type finite volume method called Godunov WPA is used, which was first proposed by LeVeque (2002). The WPA is a simple method for re-averaging the Riemann problem in an adjacent cell network for finite volume methods. Second-order high-resolution components, which include only flux correction components, can be added by the first-order Godonov method. To calculate them, a suitable limiter must be selected. In this paper, the Van Lear limiter is used.

3.2. Modified Flux Wave (MFW) formula

The flux-wave approach was firstly introduced by Bale et al (2003) for the solution of gas-dynamic problem. This method for Euler equations was modified by (Mahdizadeh, 2018). In this paper, this version, which has been developed for macroscopic traffic flow equations, is used. In this method, the Riemann problem must be solved in response to hyperbolic systems that may extend in some cases of a simple jump discontinuity along the characteristic line. To solve this problem, we used advanced Riemann wave speed developed by Mahdizadeh et al (2011).

3. Numerical Results and discussion

The performance of the proposed method has been evaluated by selecting the two mentioned models, so the queue propagation problem in uniform traffic flow mode with four discontinuities was selected for a circular road with periodic boundary conditions. Comparing the proposed algorithm with the decomposition Roe technique, which is commonly used to discretize the macroscopic traffic flow models, the spatio-temporal variations of the two speed (Fig. 1 & Fig. 2) and density variables and the relevant profiles at different times (for example: Fig. 3) were presented.

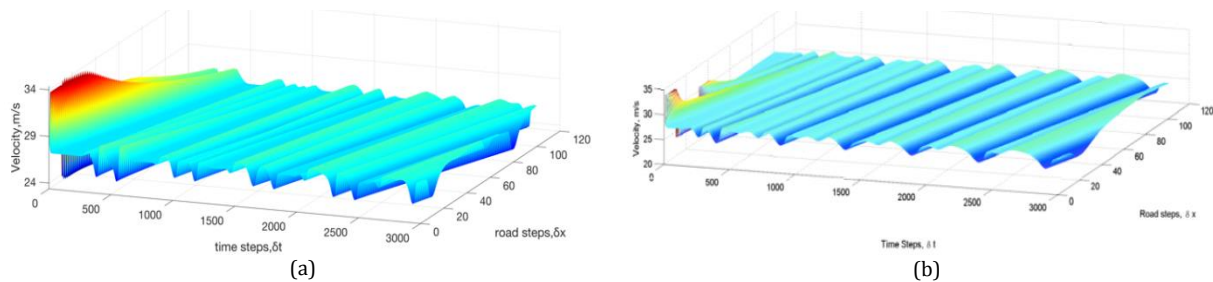


Fig. 1. The traffic flow speed behavior of the Khan model based on: a) WPA with high-resolution, b) Roe Decomposition Technique (RDT)

As shown in Fig. 1, both methods show the realistic response to changes in density. Specifically, the oscillatory behavior is controlled and no velocities greater than the maximum velocity are observed. Both methods have been successful in controlling the numerical diffusion, and finally both methods have the positivity conserving property and therefore have not calculated the negative response for the velocity variable.

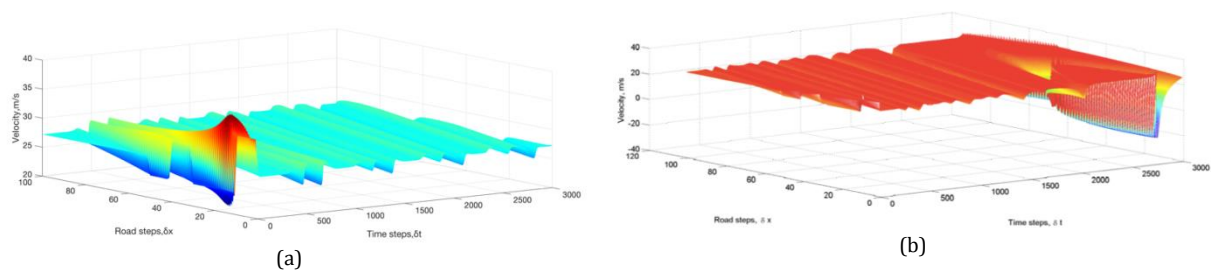


Fig. 2. The traffic flow speed behavior of the PW model based on: a) WPA with high-resolution, b) RDT

Examining Fig. 2, it is clear that for PW model, RDT show an unrealistic response to changes in density. The positivity conserving property is not satisfied and the model is unstable. While the WPA with high-resolution has made the model more stable, the oscillation behavior much more controllable, the property of positivity conserving has been observed, although it has not fully met the Plausibility condition.

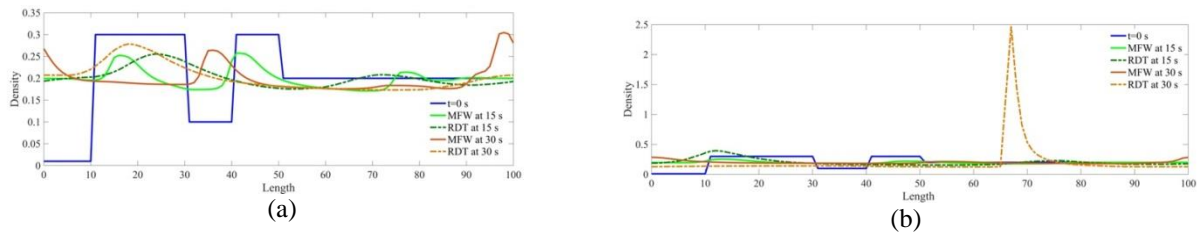


Fig. 3. The density profiles comparison of models based on proposed WPA with high-resolution and RDT at different times: a) Khan model, b) PW model

Fig. (3-a) shows that the amount of density fluctuations for both methods varies between 0.15 to 0.3, which indicates the appropriate behavior and low fluctuations. While Fig. (3-b) shows that the RDT is incapable of estimating the density variable. Density curve fluctuations increase over time, so the model is unstable. The amount of density in some places is more than one and has reached 2.5, which is impossible.

4. Conclusions

The results show that the proposed algorithm, in comparison with the RDT, provides acceptable consistent and stable responses with respect to the property of positivity conserving and controlling the numerical diffusion, especially for the conventional model, in estimating the basic variables of traffic flow.

5. References

- Bale DS, Leveque RJ, Mitran S, Rossmannith JA, "A Wave Propagation Method for Conservation Laws and Balance Laws with Spatially Varying Flux Functions", *SIAM Journal on Scientific Computing*, (2003) 24 (3), 955-978.
- Khan ZH, Imran W, Gulliver TA, Khattak KS, "An Anisotropic Traffic Model Based on Driver Interaction", *IEEE Access*, 2020, 8, 66799-66812.
- Khan ZH, Gulliver TA, Azam K, Khattak KS, "Macroscopic Model on Driver Physiological and Psychological Behavior at changes in Traffic", *Journal of Engineering and Applied Sciences*, 2019, 38 (2), 57-66.
- LeVeque RJ, *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge university press, 2002.
- Mahdizadeh H, Sharifi S, Omidvar P, "On the Approximation of Two-Dimensional Transient Pipe Flow Using a Modified Wave Propagation Algorithm", *Journal of Fluids Engineering*, 2018, 140 (7).
- Mahdizadeh H, Stansby PK, Rogers BD, "On the approximation of local efflux/influx bed discharge in the shallow water equations based on a wave propagation algorithm", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2011, 66 (10), 1295-1314.
- Payne H, "Models of freeway traffic and control, Simulation Councils", INC.: San Diego, CA, USA, 1971, 51-61.
- Whitham GB, *Linear and nonlinear waves*. John Wiley and Sons, 2011.