مدلسازى المان محدود تير كامپوزيت لايهلايه تطبيقي هوشمند

یاسر شهبازی*۱، حمیدرضا میردامادی۲، محمّدرضا چناقلو۳

^۱ دانشیار دانشکده معماری و شهرسازی، دانشگاه هنر اسلامی تبریز ^۲ دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان ^۳ استاد دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی سهند تبریز

دریافت: ۱۳۹۷/۸/۹، پذیرش: ۱۴۰۰/۱/۱۸، نشر آنلاین: ۱۴۰۰/۱/۱۸

چکیدہ

انت التريز

در این مقاله، فرمولنویسی الکترومکانیکی (Electro Mechanical) المان محدود یک تیر کامپوزیت لایه لایه تطبیقی هوشمند ارائه شده است. مدل تیر مرکب هوشمند ارائه شده بر اساس فرضیات الکترومکانیک و الکتروسینماتیک (Electro Kinematics) خطی است. مدل تئوری یک تیر کامپوزیت پیزوالکتریک (Piezoelectric) سه لایه است که به صورت یک مکانیزم به کاراندازنده محوری عمل میکند. مصالح الاستیک لایه هسته ایزوتروپیک (Isotropic) بوده اما مواد پیزوالکتریک لایه های بیرونی اور توتروپیک (Orthotropic) می باشند. دقت مدل های تحلیلی و عددی با بررسی شبیه سازی دو اصل بقای انرژی مکانیکی و الکتریکی در یک برنامه عناصر محدود و همچنین مقایسه نتایج آن با مدل عددی SANS نشان داده شده است. در شبیه سازی عددی در مدل المان محدود، سه مشربندی ۱۰، ۵۰ و ۱۰۰ المانی ایجاد شده است. شبیه سازی پارامتری شامل سه مجموعه بارگذاری استاتیکی مکانیکی، الکتریکی و الکترومکانیکی می باشد. با مقایسه نتایج مدل سان محدود نوشته شده و SANS بر می می می ان داری است. الکتریکی و الکترومکانیکی می باشد. با مقایسه نتایج مدل سانی محدود نوشته شده و SANS بر می می می کند.

كليدواژهها: سازههاى هوشمند، مكانيك محاسباتي، مدل المان محدود، ANSYS.

۱– مقدمه

حوزه سیستمهای کنترل و سازههای هوشمند تکنولوژیها را برای تولید سیستمهای غیربیولوژیکی به نحوی گسترش داده که با استفاده از مشاهدات وسیع در سیستمهای بیولوژیکی و رقابت با قابلیت تطبیقی، طراحی یکپارچه آنها به دست آید (Vijay و همکاران، ۲۰۰۶). از جمله مواد هوشمند پرکاربرد در سازهها میتوان به آلیاژ حافظهدار شکلی و کریستال پیزوالکتریک اشاره مهندسی عمران به عنوان به کاراندازندهها و یا اندازه گیرها^۲ استفاده مهندسی عمران به عنوان به کاراندازندهها و یا اندازه گیرها^۲ استفاده میشود (هوشمند و همکاران، ۱۳۹۲؛ غفارزاده و غفاری، ۱۳۹۸). میشود (هوشمند و نا در کاری اندازه و غفاری، ۱۳۹۸). کمف شد (عاله ای و اکتریسیتی توسط برادران ۱۳۹۵). کشف شد (عاله میتالهای تورمالین^۳ کشف کردند. ایشان تشخیص دادند که تغییرشکل مکانیکی در جهتهای خاص، سبب ایجاد بارهای سطحی الکتریکی در وجوه مقابل کریستال شده که

متناسب با تغییرشکل مکانیکی است. این اثر که بعداً در کوارتز و سایر کریستالهایی بدون مرکز تقارن پیدا شد، اثر مستقیم پیزوالکتریک و یا اثر اندازه گیری، نامیده می شود. از طرف دیگر، اثر وارون پیزوالکتریک معروف به اثر به کاراندازی، توسط لیمپمن^۴ بر مبنای ملاحظات ترمودینامیکی ارائه و بعداً توسط برادران Curie به طور آزمایشگاهی تأیید شد.

با کشف اثر وارون پیزوالکتریسیتی، کاربرد این مواد در محدوده گستردهای برای حذف ارتعاش، نویز و کنترل شکل در سازههای عمرانی، مکانیکی، دریایی و هوافضا بهچشم میخورد. در سالهای ۱۹۸۷ تا ۱۹۹۰، Crawley و همکارانش، یک مدل تحلیلی برای به کاراندازندههای تکهای جداگانه با مدل تیر سازهای ارائه نمودند (Crawley و Crawlers و ۱۹۹۰، ۱۹۹۰؛ Crawley و De ارائه نمودند (۱۹۸۷). ایشان در تحقیقات خود نشان دادند که در باربری به کاراندازندهها، به دلیل منبع ولتاژ اعمالی، یک سختی سازهای کوپل فعال علاوه بر سختی سازهای غیرفعال معمولی وجود دارد.

آدرس ایمیل: y.shahbazi@tabriziau.ac.ir (ی. شهبازی)، hrmirdamadi@cc.iut.ac.ir (ح. میردامادی)، y.shahbazi@tabriziau.ac.ir (م. چناقلو).

1 Actuators

2. Sensors

^{3.} Tourmaline

^{4.} Lippmann

^{*} نویسنده مسئول؛ شماره تماس: ۳۵۵۳۹۲۰۷-۰۴۱

پس از آن، مدلهای عددی مخصوصاً مدل المان محدود نیز مورداستفاده قرار گرفت (Cotoni ،۲۰۰۷؛ Cotoni و همکاران، Gornandt و همکاران، ۲۰۰۴؛ Gornandt و Gabberl ۲۰۰۶). تمرکز اصلی ما در این تحقیق بر روی یک فرمولنویسی المان محدود ترکیبی اویلر– برنولی⁶ و تیموشنکو² در تیر سهلایه کامپوزیت پیزوالکتریک/ الاستیک/ پیزوالکتریک بوده است. در این راستا، ابتدا فرمولبندی محیط الاستو– پیزوالکتریک^۷ و معادله الکترودینامیکی حاکم بر سیستم معرفیشده توسط نویسندگان بازخوانی می شود (شهبازی و همکاران، ۱۳۸۵). سپس، شبیه سازی آن با مدل عددی ایجادشده از تیر کامپوزیت مرکب هوشمند در نرمافزار ANSYS مقایسه و صحتسنجی شده است.

۲- بیان سینماتیک^ و فرضیات مسئله

مدل تیر مرکب هوشمند ارائهشده در این تحقیق که هندسه آن در شکل (۱) نشان داده شده است، بر اساس فرضیات الکترومکانیک و الکتروسینماتیک خطی است. بدین معنی که متغیرهای میدان الکتریکی و مکانیکی به حدی کوچک می باشند که تئوریهای الاستیسیته⁴، پیزوالکتریسیته و دی الکتریک خطی قابل کاربرد باشند. مصالح الاستیک (لایه هسته) ایزوتروپیک بوده اما مواد پیزوالکتریک (لایههای بیرونی) اور توتروپیک می باشند.

جابهجایی عرضی همه لایه ها در هر سطح مقطع مشخصی از محور طولی تیر، در راستای ضخامت تیر یکسان است. لایه ها در وضعیت تغییرشکل مکانیکی مسطح و پتانسیل الکتریکی مسطح می اشند. لایه های بیرونی از سینماتیک تیر اویلر - برنولی و هسته الاستیک تیر از فرضیات تیر تیموشنکو پیروی میکنند. تنش نرمال (عمود بر وجوه بالا و پایین تیر در راستای Z) کوچک و قابل صرفنظر کردن است. درنهایت، لایه های پیزوالکتریک در راستای ضخامت و موازی با راستای شدت میدان الکتریکی اعمالی پلاریزه ^{۱۰} شده و هر دوی آن ها بر محور خنثی تیر هوشمند، برای برپایی حالت مکانیسم به کاراندازی محوری، عمود هستند.

٣- فرمول بندى محيط الاستيك/ پيزوالكتريك

در این قسمت، فرضیات ریاضی ساده شدهای برای سینماتیک تیر (هندسه و تغییر شکل نشان داده شده در شکل (۲))، سینتیک تیر و رفتار الکترومکانیک مصالح در اجزاء مکانیکی و الکتریکی کوپل شده مدل ارائه شده است.

5. Euler-Bernoulli

6. Timoshenko

7. Elasto-Piezoelectric

 $\hat{o}_{\alpha}\hat{x}_{\alpha}\hat{y}_{\alpha}\hat{z}_{\alpha}$ دستگاه مختصات محلی هر لایه با نمادهای $\hat{o}_{\alpha}\hat{x}_{\alpha}\hat{y}_{\alpha}\hat{z}_{\alpha}$ و cو با مبدأ محلی \hat{o}_{α} در وسط هر لایه قرار دارد که α به a و cدلالت دارد. محور \hat{x}_{α} ها در راستای طولی و محور \hat{z}_{α} ها در راستای جانبی لایه قرار داشته و این دو محور صفحهی قائم را می سازند. دستگاه مختصات محلی لایه ها و کلی OXYZ در شکل (۲) نشان داده شده است.

 \hat{u}_c و \hat{u}_c و \hat{u}_c جابهجایی محوری هر نقطه دلخواه از لایه مربوطه و h_c و h_c و h_c مخامت لایههای مربوط بههمان زیرنویس هستند $w(x) = w_a(\hat{x}_a) = w_b(\hat{x}_b) = w_c(\hat{x}_c)$, $w(x) = w_a(\hat{x}_a) = w_b(\hat{x}_b) = w_c(\hat{x}_c)$ جابهجایی جانبی یا همان خیز تیر برای همه لایهها برابر فرض شده است. زاویه مماس بر محور الاستیک تیر در نقطه X نسبت به هندسه آغازین محور طولی تیر طبق تئوری تغییر شکلهای کوچک، مشتق W نسبت به محور الاستیک تیر است ($\frac{\partial w}{\partial x}$).



شکل ۱- هندسه تیر کامپوزیت اور توتروپیک هوشمند



شکل ۲- میدان تغییرمکان و سینماتیک تیر هوشمند

 \overline{u} کمیتهای سینماتیک جابهجاییهای محوری میانگین و نسبی \overline{u} و \widetilde{u} بهصورت رابطه (۱) تعریف می شوند؛

8. Kinematics

^{9.} Elasticity

^{10.} Polarized

$$c_{11}^* = c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}$$
$$e_{31}^* = e_{31} - \frac{c_{13}}{c_{33}}e_{33}$$
$$\epsilon_{33}^* = \epsilon_{33} - \frac{e_{31}^2}{c_{22}}$$

توجه شود که درهم گیری الکترومکانیکی، فقط بین کرنش محوری و مؤلفه یعرضی میدان الکتریکی موجود است. فرم مؤلفه ای قانون دیورژانس گاوس^{۱۲} برای مواد دی الکتریک (ماده عایق تهی از بارهای الکتریکی آزاد (q = 0) برابر است با:

$$D_{i,i} = -\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = q = 0 \tag{Y}$$

برای لایههای بیرونی تیر $D_{3,3}^{\alpha} = 0$, $\alpha = a, b$ بز قانون مشخصه لایههای بیرونی داریم؛ $D_3^{\alpha} = e_{31}^{*\alpha} e_1^{\alpha} + \epsilon_{33}^{\alpha} E_3^{\alpha}$ با جایگذاری هر دسته از شرایط مرزی مربوط به یکی از لایهها و تعریف دو کمیت اختلاف پتانسیل مرزی مربوط به یکی او $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi^{\alpha+} - \varphi^{\alpha-}$ و پتانسیل میانگین $\overline{\varphi}^{\alpha}(x) = \frac{\varphi^{\alpha+} + \varphi^{\alpha-}}{2}$ می توان تابع پتانسیل را در هر نقطه داخلی محاسبه کرد:

$$\varphi^{\alpha} = \bar{\varphi}^{\alpha} + (z - z_{\alpha})\frac{\tilde{\varphi}^{\alpha}}{h_{\alpha}} + \left[1 - 4\left(\frac{z - z_{\alpha}}{h_{\alpha}}\right)\right]\frac{h_{\alpha}^{2}}{8}\frac{e_{31}^{\alpha*}}{\epsilon_{31}^{\alpha*}}w^{\prime\prime} \qquad (\lambda)$$

از روی تابع پتانسیل، می توان مؤلفه عرضی شدت میدان الکتریکی را روی وجوه تیر محاسبه کرد:

$$E_3^{\alpha} = -\frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x_3} = \frac{\tilde{\varphi}^{\alpha}}{h_{\alpha}} + (z - z_{\alpha}) \frac{e_{31}^{\alpha*}}{\epsilon_{31}^{\alpha*}} w^{\prime\prime} \tag{9}$$

یک محیط پیوسته پیزوالکتریک تحت اثر بردار تنش رویه از پیش مقرر شده T و بار الکتریکی رویه در واحد سطح Q، قرار دارد. کار مجازی در واحد سطح انجامشده توسط بردارهای تنش به-هنگام یک جابهجایی مجازی کوچک برای رویه، برابر است با سطح، توسط بار الکتریکی مقرر شده روی رویه، یعنی Q، هنگام یک تغییر کوچک $\varphi\delta$ در پتانسیل الکتریکی، برابر است با $Q\delta Q$. توابع انرژی جنبشی KE در پتانسیل الکتریکی، برابر است با $Q\delta Q$. ناپایستار مکانیکی و الکتریکی W، تابع لاگرانژین^{۲۱} و اصل وردشی تعمیمی هامیلتون^{۱۴} برای این محیط پیوسته پیزوالکتریک، محصورشده در فضا به شکل زیر تعریف میشوند:

14. Generalized Hamilton's Variation

$$\tilde{u}(x) = u^{+} - u^{-} = h_{c}\beta_{c}$$

$$\bar{u}(x) = \bar{u}_{c} = \frac{u^{+} + u^{-}}{2}$$
 (1)

با توجه به تئوری اویلر- برنولی برای پیزوالکتریکها و تئوری تیموشنکو برای هسته، جابهجایی محوری هر نقطه دلخواه از سطح مقطع X در مختصات محلی هر لایه را بر حسب جابهجایی محوری صفحه وسطی آن لایه به اضافه جملهای که وابسته به Zاست مینویسیم. میدان جابهجایی طولی هر نقطه از سطح مقطع به فاصله Z از مبدأ دستگاه مختصات کلی در لایههای a و dپیزوالکتریک و c هسته به قرار زیر است:

$$u_{A} = \bar{u}_{A} - (z - z_{A})w'$$

$$u_{B} = \bar{u}_{B} - (z - z_{B})w'$$

$$u_{C} = \bar{u}_{C} + z\beta_{C}$$
(Y)

در این رابطه، a و b دوران خمشی لایه هسته میباشد. جابهجایی طولی متوسط و نسبی هر یک از لایههای a و b پیزوالکتریک را میتوان برحسب جابهجایی طولی متوسط و نسبی لایه هسته به-صورت زیر نوشت:

$$\begin{split} \bar{u}_A &= \bar{u} + \frac{\tilde{u}}{2} - \frac{h_A}{2} w' \\ \bar{u}_B &= \bar{u} - \frac{\tilde{u}}{2} + \frac{h_B}{2} w' \end{split} \tag{(7)}$$

با جایگذاری میدان جابهجایی (۲) در روابط کرنش- جابهجایی، کرنشهای محوری (غشایی + خمشی) و برشی زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{\alpha}(x,z) &= \varepsilon_{\alpha}^m(x) + (z - z_{\alpha})\varepsilon_{\alpha}^b(x) \\ \varepsilon_1^c(x,z) &= \varepsilon_c^m(x) + z\varepsilon_c^b(x) \\ \gamma_5^c(x,z) &= \frac{\tilde{u}}{h_c} + (\lambda + 1)w' \end{aligned}$$
(*)

 $\mathcal{E}^{b}_{b}(x)$ ، $\mathcal{E}^{b}_{a}(x)$ ، کرنشهای غشایی، ($\mathcal{E}^{b}_{a}(x)$ ، $\mathcal{E}^{m}_{b}(x)$ و $\mathcal{E}^{b}_{b}(x)$ ، $\mathcal{E}^{m}_{b}(x)$ و هسته ($\mathcal{E}^{b}_{c}(x)$ کرنشهای خمشی لایههای پیزوالکتریک بیرونی و هسته الاستیک، \mathcal{F}^{c}_{c} کرنش برشی در لایه هسته و \mathcal{K} نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت هسته خواهد بود. قوانین مشخصه مواد پیزوالکتریک برای یک محیط پیوسته عبارت است با:

$$T_p = c_{pq}^E S_q - e_{kp} E_k$$

$$D_i = e_{iq} S_q + \epsilon_{ik}^s E_k$$
(Δ)

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^* & -e_{31}^* \\ e_{31}^* & e_{33}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ E_3 \end{bmatrix}$$
(7)

11. Orthotropic

12. Gaussian Beam Divergence

13. Lagrangian

$$H^{c} = \frac{1}{2} \int_{0}^{L} \begin{cases} c_{33}^{c} A_{c} \left(\epsilon_{c}^{m} \right)^{2} + c_{33}^{c} I_{c} \left(\epsilon_{c}^{b} \right)^{2} \\ + c_{55}^{c} A_{c} \left[\frac{\widetilde{u}}{h_{c}} + (\lambda + 1) w' \right] \end{cases} dx$$
 (1Y)

با استفاده از روابط کرنش- جابهجایی در رابطههای وردش انرژیهای مکانیکی، الکتریکی و الکترومکانیکی خواهیم داشت:

$$\delta H_{m} = \int_{0}^{L} \left\{ \begin{aligned} \left\{ 2c_{11}^{\alpha^{*}}A_{\alpha} + c_{33}^{c^{*}}A_{c} \right\} \overline{u}' \delta \overline{u}' + \\ \left[2\left(c_{11}^{\alpha^{*}}A_{\alpha} + 2c_{33}^{c} \frac{I_{c}}{h_{c}^{2}} \right) \overline{u}' + 2c_{33}^{c}I_{c} \frac{\lambda}{h_{c}} w'' \right] \frac{\delta \widetilde{u}'}{2} \\ \delta H_{m} = \int_{0}^{L} \left\{ \left[\left\{ 2c_{11}^{\alpha^{*}}I_{\alpha} + c_{33}^{c}I_{c}\lambda^{2} \right\} w'' + c_{33}^{c}I_{c} \frac{\lambda}{h_{c}} \widetilde{u}' \right] \delta w'' \\ + c_{55}^{c}A_{c} \left(\frac{\widetilde{u}}{h_{c}^{2}} + \frac{(\lambda+1)}{h_{c}} w' \right) \delta \widetilde{u} \\ c_{55}^{c}A_{c} \left((\lambda+1)^{2}w' + \frac{(\lambda+1)}{h_{c}} \widetilde{u} \right) \delta w' \end{aligned} \right\} dx$$

$$(1 \Lambda)$$

وردش پارهای از انرژی الکترومکانیکی ناشی از وردش در متغیرهای مکانیکی و الکتریکی بهترتیب عبارتاند از:

$$\delta H_{me} = -\int_{0}^{L} \left\{ e_{33}^{\alpha*} \frac{A_{\alpha}}{h_{\alpha}^{2}} \left\{ \widetilde{\varphi}^{a} \delta \widetilde{\varphi}^{a} + \widetilde{\varphi}^{b} \delta \widetilde{\varphi}^{b} \right\} \right\} dx \qquad (19)$$

$$\delta H_{em} = -\int_{0}^{L} \left\{ e_{31}^{\alpha^{*}} \frac{A_{\alpha}}{h_{\alpha}} \left[\frac{\overline{u}' \left(\delta \widetilde{\varphi}^{a} + \delta \widetilde{\varphi}^{b} \right)}{+ \widetilde{u}' \left(\delta \widetilde{\varphi}^{a} - \delta \widetilde{\varphi}^{b} \right) \frac{\delta \widetilde{u}'}{2}} \right] \right\} dx \qquad (\Upsilon \cdot)$$

هر لایه از سازه کامپوزیت اورتوتروپیک هوشمند میتواند تحت اثر نیروهای سطحی عمودی و مماسی T_N^i و J_0^j و هم تحت اثر نیروهای حجمی در راستاهای *z* و *x*، یعنی I_N^i و J_0^j باشد. نمایانگر یکی از لایههای *a*، *a* یا *c* است. نیروهای رویه میتوانند به رویههای سطوح مقاطع عرضی تیر در 0 = x e *z* اعمال شوند. نیروهای خارجی رویه عمود بر رویه و موازی با رویه را در شوند. نیروهای خارجی رویه عمود بر رویه و موازی با رویه را در میدهم. بنابراین تغییرات کل کار خارجی نیروهای رویه اعمال شده بر سطوح مقاطع عرضی دو انتهای تیر و نیروهای رویه اعمال شده بر سطوح افقی بالا و پایین تیر مطابق رابطه (۲۱)

وردشها بر حسب متغیرهای اصلی \overline{u} ، \overline{u} و w نوشته می شوند. برای درونیابی میدان جابه جایی \overline{u} و \overline{u} از توابع شکل خطی لاگرانژ (توابع C^0) و برای میدان جابه جایی w از توابع

$$KE = \int_{V} \frac{1}{2} \rho \dot{u}_{i} \dot{u}_{i} dV$$

$$H = \int_{V} \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - D_{i} E_{i}) dV$$

$$W = \int_{S} (\bar{T}_{k} \delta u_{k} - \bar{Q} \delta \varphi)$$

$$L = \int_{V} \left[\frac{1}{2} \rho \dot{u}_{i} \dot{u}_{j} - H_{0} E_{k} \right] dV$$

$$\int_{t_{0}}^{t_{1}} \left\{ \delta \int_{V} \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_{i} \dot{u}_{j} dV \right) - \delta \int_{V} H_{0}(\varepsilon_{ki}, E_{k}) dV \right\}$$

$$+ \int_{S} [\bar{T}_{k} \delta u_{k} - \bar{Q} \delta \varphi] dV$$
(11)

بنابراین می توان دستوربندی وردشی یک تیر دوسانگرد پیزوالکتریک تطبیقی را به فرم زیر بیان کرد:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta KE - \delta H + \delta W) \, dt = 0 \tag{17}$$

در رابطه بالا *۸۶K که ۴۸ و ۵W* بهترتیب وردشهای مجازی در انرژی جنبشی، انرژی الکترومکانیکی و کار انجامشده توسط نیروهای خارجی ناپایستارند. برای تیر کامپوزیت هوشمند تطبیقی، انرژی جنبشی و وردش آن بهشکل زیر بهدست میآید:

$$KE \int_{V} \frac{1}{2} \rho_i (\dot{\hat{u}}_i + \dot{\hat{w}}_i) dV, \quad i = a, b, c \tag{11}$$

$$\delta KE = -\int_{0}^{L} \left\{ \begin{aligned} (2\rho_{\alpha}A_{\alpha} + \rho_{c}A_{c})\bar{u}\delta\ddot{u}2\rho_{\alpha}A_{\alpha}\frac{\ddot{u}}{2}\frac{\delta\tilde{u}}{2} \\ +4\rho_{c}\frac{I_{c}}{h_{c}^{2}}\frac{\ddot{u}}{2}\frac{\delta\tilde{u}}{2} + 2\rho_{c}\frac{I_{c}}{h_{c}^{2}}\lambda\ddot{w}'\frac{\delta\tilde{u}}{2} \\ +(2\rho_{\alpha}A_{\alpha} + \rho_{c}A_{c})\ddot{w}\delta w + \rho_{c}\frac{I_{c}}{h_{c}}\lambda\ddot{u}\delta w' \\ +(2\rho_{\alpha}A_{\alpha} + \rho_{c}A_{c}\lambda^{2})\ddot{w}'\delta w' \end{aligned} \right\}$$
(14)

انرژی پتانسیل داخلی الکترومکانیکی کل یک محیط پیزوالکتریک برابر است با انتگرال آنتالپی الکتریکی روی حجم:

$$H = \int_{V_{\alpha}} H_0 dV = \int_{V_{\alpha}} \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - D_i E_i \right) dV \tag{10}$$

$$H^{\alpha} = \frac{1}{2} \int_{0}^{L} \left\{ e_{31}^{\alpha^{*}} A_{\alpha} \left(\varepsilon_{\alpha}^{m} \right)^{2} + \overline{c}_{11}^{\alpha} I_{\alpha} \left(\varepsilon_{\alpha}^{b} \right)^{2} + 2e_{31}^{\alpha^{*}} A_{\alpha} \frac{\widetilde{\varphi}^{\alpha}}{h_{\alpha}} \varepsilon_{\alpha}^{m} - \varepsilon_{33}^{\alpha^{*}} A_{\alpha} \left(\frac{\widetilde{\varphi}^{\alpha}}{h_{\alpha}} \right)^{2} \right\} dx \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} M^{e} \end{bmatrix} = \int_{0}^{L_{e}} \begin{cases} (2\rho_{\alpha}A_{\alpha} + \rho_{c}A_{c})B_{txm}B_{txm}^{T} \\ + \frac{1}{2} \left(\rho_{\alpha}A_{\alpha} + \rho_{c}\frac{I_{c}}{h_{c}^{2}} \right) B_{txd}B_{txd}^{T} \\ + \rho_{c}\frac{I_{c}}{h_{c}}\lambda B_{txd}B_{r}^{T} + \rho_{c}\frac{I_{c}}{h_{c}}\lambda B_{r}B_{txd}^{T} \\ + \left(2\rho_{\alpha}A_{\alpha} + \rho_{c}A_{c} \right) B_{tz}B_{tz}^{T} \\ + \left(2\rho_{\alpha}A_{\alpha} + \rho_{c}A_{c}\lambda^{2} \right) B_{r}B_{r}^{T} \end{cases} dx \qquad (\Upsilon^{\varphi})$$

در رابطه بالا، ماتریسهای جابهجایی انتقالی میانگین و جابهجایی انتقالی نسبی لایههای بیرونی در راستای محور xها، ماتریس جابهجایی انتقالی در راستای محور zها و ماتریس جابهجایی زاویهای (دورانهای کوچک که فقط تولید تنش میکنند اما مؤلفههای دوران جسم صلب در آن قابل اغماض است) حول محور y ها به شکل زیر تعریف می شوند؛

$$\begin{split} &\overline{u}^{e}(x) = B_{txm}^{T}(x) \left\{ q_{e} \right\} \\ &\widetilde{u}^{e}(x) = B_{txd}^{T}(x) \left\{ q_{e} \right\} \\ &w^{e}(x) = B_{tz}^{T}(x) \left\{ q_{e} \right\} \\ &w^{e'}(x) = B_{r}^{T}(x) \left\{ q_{e} \right\} \end{split} \tag{7a}$$

در رابطه فوق، B_{ij} , i = a, b, c, j = tx, tz, r بهترتیب ماتریسهای عملگر مشتق جابه جایی راستاهای x و z و دوران برای سطوح بیرونی و هسته میباشند.

 $\delta H_{me}^{e} = \{\delta q_{e}\}^{T} \{F_{me}^{e}\}$ را نیز میتوان به فرم فشرده $\delta H_{me}^{e} = \{\delta q_{e}\}^{T} \{F_{me}^{e}\}$ نوشت. در نتیجه $\{F_{me}^{e}\}$ قابل استخراج است؛

$$\left[F_{me}^{e}\right] = \int_{0}^{L_{e}} \left[e_{31}^{\alpha^{*}} \frac{A_{\alpha}}{h_{\alpha}} \left(\widetilde{\varphi}^{a} B_{am} + \widetilde{\varphi}^{b} B_{bm}\right)\right] dx \qquad (79)$$

با انجام محاسبات مشابه برای بارگذاری مکانیکی و تفکیک $\delta W^e = \{\delta q_e\}^T \{F^e_m\}$ بردار بارگذاری مکانیکی المان محدود، $\delta W^e = \{\delta q_e\}^T \{F^e_m\}$ قابل استخراج است؛

$$\begin{split} \delta H_{m} & \text{index} \ \alpha \text{ or } M_{m} & \text{$$

$$\delta H_m^e = \int_0^L \begin{cases} c_{11}^{\alpha*} A_{\alpha} \begin{pmatrix} \delta q_e^T B_{am} B_{am}^T q_e + \\ \delta q_e^T B_{bm} B_{bm}^T q_e \end{pmatrix} \\ + c_{33}^c A_c \begin{pmatrix} \delta q_e^T B_{cm} B_{cm}^T q_e \end{pmatrix} \\ + \bar{c}_{11}^{\alpha} I_a \begin{pmatrix} \delta q_e^T B_{ab} B_{ab}^T q_e \end{pmatrix} + \\ \bar{c}_{11}^{\alpha} I_b \begin{pmatrix} \delta q_e^T B_{ab} B_{bb}^T q_e \end{pmatrix} \\ + c_{33}^c I_c \begin{pmatrix} \delta q_e^T B_{bb} B_{bb}^T q_e \end{pmatrix} + \\ c_{55}^c A_c \begin{pmatrix} \delta q_e^T B_{cb} B_{cb}^T q_e \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{cases}$$

با گرفتن عامل مشترک
$$\{\partial q_e\}^T$$
و $\{q_e\}$ از دو طرف ∂H^e_m ماتریسهای سختی المان محدود، $[K_e]$ ، قابل استخراج است؛

$$\begin{bmatrix} K^{e} \end{bmatrix} = \int_{0}^{L} \begin{bmatrix} c_{11}^{\alpha} A_{\alpha} \int_{0}^{Le} (B_{am} B_{am}^{T} + B_{bm} B_{bm}^{T}) \\ + c_{33}^{c} A_{c} \int_{0}^{Le} (B_{cm} B_{cm}^{T}) \\ + c_{33}^{c} I_{1} I_{a} \int_{0}^{Le} (B_{ab} B_{ab}^{T} + B_{bb} B_{bb}^{T}) \\ + c_{33}^{c} I_{c} \int_{0}^{Le} (B_{cb} B_{cb}^{T}) \\ + c_{53}^{c} A_{c} \int_{0}^{Le} (B_{cs} B_{cs}^{T}) \end{bmatrix} dx$$
(YY)

در روابط فوق، B_{ij} , i = a, b, c, j = m, b, s بهترتیب ماتریسهای تغییر شکل غشایی، خمشی و برشی برای لایههای a و b پیزوالکتریک و c هسته میباشند. همچنین، T همان عملگر ترانهاده ماتریس میباشد. با گرفتن عامل مشترک $\{\delta q_e\}$ و $\{\ddot{q}_e\}$ از دو طرف $\delta K E^e$ ، ماتریسهای جرم المان محدود، $[M^e]$ نیز قابل استخراج است؛

15. Hermitian

صحتسنجي مينمايد.

جدول ۱- مشخصات هندسی و مصالح تیر کامپوزیت هوشمند		
L = 0.2m	طول تیر	
B = 0.02m	عرض تير	
$H = 4 \times 10^{-3} m$	ضخامت هسته الاستيك	
$H_p = 5 \times 10^{-5} m$	ضخامت لايههاى پيزوالكتريك	
$\rho_e = 2710 kg/m^3$	چگالی هسته الاستیک	
$ \rho_e = 7500 kg/m^3 $	چگالی پیزوالکتریک	
$\begin{cases} e_{31} = -6.5c/m^2\\ e_{33} = 23.3c/m^2\\ \Xi_{33} = 23.3c/m^2 \end{cases}$	ضرایب پیزوالکتریک و دیالکتریک	
$\begin{cases} c_{11} = 126 \times 10^{10} N/m^2 \\ c_{13} = 8.41 \times 10^{10} N/m^2 \\ c_{33} = 126 \times 10^{10} N/m^2 \\ c_{55} = 23 \times 10^{10} N/m^2 \end{cases}$	ضرایب ماتریس مصالح پیزوالکتریک روابط (۵) و (۶)	



شکل ۳- رابطه بار- تغییرمکان و بررسی اصل بقای انرژی الکترومکانیکی

$$\begin{bmatrix} F_{m}^{e} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} (n_{a} + n_{b} + n_{c})B_{txm} \\ + \left(\frac{n_{a} - n_{b}}{2} + \frac{m_{c}}{h_{c}}\right)B_{txd} \\ + (m_{a} + m_{b} - \lambda m_{c})B_{r} \\ + (q_{a} + q_{b} + q_{c})B_{tz} \\ + \overline{T}_{w}B_{tz} + \overline{T}_{f}B_{txm} + \\ \overline{T}_{f}(B_{txd} - h_{\alpha}B_{r}) \end{bmatrix}^{x=L}$$

$$+ \begin{bmatrix} (N_{a} + N_{b} + N_{c})B_{txm} \\ + \left(\frac{N_{a} - N_{b}}{2} + \frac{M_{c}}{h_{c}}\right)B_{txd} \\ + (M_{a} + M_{b} - \lambda M_{c})B_{r} \\ + (Q_{a} + Q_{b} + Q_{c})B_{tz} \end{bmatrix}_{x=0}^{x=0}$$

$$(\Upsilon Y)$$

با جایگذاری وردشهای بهدستآمده بالا در رابطه (۱۲)، به یک مسئله خطی زیر دست مییابیم؛

$$M\ddot{q} + Kq = F_m^e - F_{me}^e \tag{(7A)}$$

در ادامه، با نوشتن یک الگوریتم عددی در نرمافزار MATLAB، فرآیند گسستهسازی محیط با المانهای محدود و سرانجام حل سیستم معادلات محاسباتی بهروش حذفی گوس کامل شده است.

۴- بارگذاری الکترومکانیکال مدل المان محدود

در این مرحله، نتایج تحلیلهای صورت گرفته در مدل المان محدود با مشخصات هندسی و مصالح جدول (۱)، برای بارهای مکانیکی، الکتریکی و الکترومکانیکی بهعنوان ورودی و تغییرمکان-های مکانیکی بهعنوان خروجی ارائه شده است. در آنالیزهای مکانیکی، یک بار خارجی استاتیکی نمویی از صفر تا دو نیوتن به انتهای تیر طرهای اعمال شده است. این در حالی است که در بارگذاری الکتریکی، اختلاف پتانسیل نمویی از صفر تا صد ولت بر روی هر یک از بهکاراندازندههای پیزوالکتریک ایجاد شده است.

همان طور که در شکلها و نمودارهای مربوطه در ادامه نشان داده شده است، تغییر شکل ایجاد شده تحت بار مکانیکی و بار الکتریکی برخلاف یکدیگر است. به عبارت دیگر، تغییر مکان ایجاد شده تحت اثر ولتاژ الکتریکی یک نوع پاسخ جبران ساز به-کاراندازنده های پیزوالکتریک در برابر بارهای استاتیکی نامطلوب خارجی می باشند. در نهایت، رفتار شبیه سازی شده ای از عملکرد استاتیکی یک به کاراندازنده پیزوالکتریک در بارگذاری الکترومکانیکی بررسی شده است. بدین ترتیب که بارهای استاتیکی همانند قبل به انتهای تیر اعمال شده و هم زمان اختلاف پتانسیلی برابر با صد ولت بر روی هر یک از به کاراندازنده های پیزوالکتریک جهت حذف و یا کاهش تغییر مکان انتهایی تیر کامپوزیت هوشمند، اعمال شده است.



شکل ۴- رابطه ولتاژ اعمالی- تغییرمکان و بررسی اصل بقای انرژی الکترومکانیکی



شکل ۵- رابطه نیروی الکترومکانیکی- تغییرمکان و بررسی اصل بقای انرژی الکترومکانیکی

۵- مدلسازی ANSYS و صحتسنجی مدل المان محدود

در این قسمت، برای مدل سازی المان محدود تیر هوشمند از نرمافزار ANSYS استفاده شده و تحلیل های استاتیکی برای سیستم الکترومکانیکی مشابه با مش بندی المان محدود ۵۰ المانی صورت گرفته است. اولین مرحله در استفاده از نرمافزار ANSYS برای مدل سازی اثر پیزوالکتریسیتی، تعریف سه ماتریس گذردهی (ثوابت دی الکتریک)، کرنش (یا تنش) پیزوالکتریک و ضرایب الاستیک (یا سختی) این ماده هوشمند می باشد (ANSYS 9.0 Documentation). قبل از شروع مدل سازی باید

تفاوتهای بین استاندارد IEEE و ANSYS در نحوه معرفی مشخصات ماتریس کرنش پیزوالکترییک و ضرایب الاستیک را در نظر گرفت.

در اکثر مراجع معتبر بهویژه استاندارد IEEE، رتبه ماتریس برای مواد پیزوالکتریک بهصورت [x, y, z, yz, xz, xy] میباشد. درحالی که در نرمافزار ANSYS، این رتبه ماتریسی به صورت [x, y, z, xy, yz, xz] در نظر گرفته شده است. بدین ترتیب، برای تبدیل مشخصات پیزوالکتریک در منابع استاندارد به ورودی ANSYS، تغییرمرتبه افقی برای جملات برشی الزامی است. برای اين منظور، ثوابت [e61, e62, e63]، [e41, e42, e43] و [e51, e52, e53] در استاندارد IEEE باید بهترتیب بهعنوان ردیف yz ،xy و xz در ANSYS معرفی شوند. برای تبدیل ضرایب الاستیک ماده پیزوالکتریک به ورودی ANSYS، ثوابت [C61, C62, C63, C66]، [C41, C42, C43, C46, C44] و [C51, C52, C53, C56, C54, C55] در استاندارد IEEE باید بهترتیب بهعنوان ردیف yz ،xy و xz در ANSYS معرفی شوند. بعد از معرفی مشخصات مصالح لایه های پیزوالکتریک دولایه خارجی و مصالح الاستیک میانی، باید هندسه تیر مطابق با شکل (۱) و مشخصات مندرج در جدول (۱) ایجاد گردد. در اختصاص المان براي لايه هاي پيزوالكتريك بايد مناسب ترين المان ساز گار با خواص مواد پیزوالکتریک در زمینه مسائل سهبعدی کوپل برای تولید تیر مرکب هوشمند را به کار برد. در این نرمافزار می توان از المان هاى پيزوالكتريك SOLID5 و يا SOLID226 بهره برد. مشابه با دیگر المانهای جامد سازهای، این المانها دارای سه درجه آزادی حرکتی در هر گره است. علاوه بر این درجات آزادی، المانهای پیزوالکتریک در نرمافزار دارای درجات آزادی پتانسیل الكتريكي موردنياز براى مسائل اندركنش الكترومكانيكالي را نيز دارد. با توجه به کوپل بودن مسائل مدلسازی پیزوالکتریک، برای سازه میزبان نیز باید در محلهای اتصال، درجات آزادی سازگار با درجات آزادی به کاراندازندههای پیزوالکتریک وجود داشته باشد. در واقع برای لایه الاستیک میانی مجاز به استفاده از هر نوع المان SOLID در نرمافزار نبوده و بهترین المان برای لایههای الاستیک، المان SOLID45 خواهد بود با استفاده از المان SOLID45، براى مدلسازی قسمت هسته میانی، این امکان فراهم می گردد که اثر تنشهای نرمال و برشی در قسمت میزبان سازه مرکب هوشمند منظور گردد. در این مقاله صرفاً هدف از مدلسازی تیر مرکب چندلایه هوشمند در نرمافزار ANSYS، صحتسنجی مدل المان محدود معرفی شده است. از اینرو با در نظر گرفتن مشبندی ۵۰ الماني و انجام آناليزهاي استاتيكي مكانيكي، الكتريكي و الكترومكانيكي همزمان، صحت مدل المان محدود پيشنهادي مورد ارزیابی قرار گرفته است. نکتهای که می بایست بدان اشاره گردد آن است که در مدل المان محدود پیشنهادی، درجه آزادی پتانسیل الکتریکی وجود نداشته و اثر اعمال پتانسیل به لایههای

پیزوالکتریک فوقانی و تحتانی بهصورت جابهجاییهای تعمیمیافته متوسط و نسبی $ar{u}$ و \widetilde{u} معرفی شدهاند. تحلیلهای صورتگرفته در نرمافزار ANSYS عبارتاند از:

- بارگذاری مکانیکی در راستای z بهمقدار ۲ نیوتن
 - 🗸 🛛 بارگذاری الکتریکی اعمالی بهمیزان ۱۰۰ ولت
 - بار گذاری الکترومکانیکی توأم

نتایج تحلیل برای بارهای مکانیکی، الکتریکی و الکترومکانیکی بهعنوان ورودی و تغییرمکانهای استاتیکی بهعنوان خروجی برای مدل المان محدود پیاده شده در برنامه عددی نوشتهشده در MATLAB و تحلیلهای متناظر در نرمافزار ANSYS با مشبندی ۵۰ المانی مقایسه شدهاند. شکلهای (۶) تا (۸) همخوانی قابل-قبولی برای دو مدلسازی نشان میدهد.





شکل ۶- مقایسه نتایج شبیهسازی مدل المان محدود پیشنهادی و ANSYS: نمودار بار - تغییرمکان





شکل ۷- نتایج شبیهسازی مدل المان محدود پیشنهادی و ANSYS: نمودار ولتاژ- تغییرمکان





۶- نتیجهگیری

در این مقاله، مدل عددی المان محدود برای یک تیر طرهای اورتوتروپیک کامپوزیت هوشمند بر اساس تئوری حرکتی محیط پیوسته ساخته شده است. در این فرمولنویسی، سیستم معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم حرکت ارتعاشی با استفاده از مکانیک توسعهیافته هامیلتونی توسعه داده شد. سینماتیک لایههای خارجی به کاراندازنده/اندازه گیر (پیزوالکتریک) و لایه هسته میزبان (الاستیک) بهترتیب اویلر – برنولی و تیموشنکو انتخاب شدهاند. راستای پلاریزاسیون^{۹۲} و شدت میدان الکتریکی اعمالی به مواد فعال موازی با ضخامت تیر است. در شبیه سازی عددی در مدل المان محدود، سه مش بندی ۱۰، ۵۰ و ۱۰۰ المانی ایجاد شده است. سپس، در یک آنالیز پارامتری، سه مجموعه بارگذاری است. میس، در یک آنالیز پارامتری، سه مجموعه بارگذاری دو معیار برای صحت سنجی مدل المان محدود و برنامه نوشته شده

16. Polarization

- Crawley EF, Anderson EH, "Detailed models of piezoceramics actuation beams", AIAA Journal, 1990, 25, 373-385.
- Crawley EF, de Luis J, "Use of piezoelectric actuators as element of intelligent structures", Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 1987, 1, 4-25.
- Curie P, Curie J, "Contractions et dilations produits par des tensions 'electriques dans les cristeaux h'emie'edres 'a faces incline'es", Comptes Rendus de l'Acad'emie des Sciences, 1881, 93, 1137-1140.
- Gornandt A, Gabbert U, "Finite element analysis of thermopiezoelectric smart structures", Springer, Acta Mechanica, 2002, 154, 129-140.
- Henrique Santos, Cristo'va^o M, Mota Soares, Carlos A, Mota Soares JN, Reddy, "A finite element model for the analysis of 3D axisymmetric laminated shells with piezoelectric sensors and actuators: Bending and free vibrations", Computers and Structures, 2008, 86, 940-947.
- Kessler H, Kamlah M, Balke H, "Finite element modeling of polarization rotation around an elongated elliptic cavity", Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2004, 15, 539.
- Marcelo A, Trindade, "Simultaneous extension and shear piezoelectric actuation for active vibration control of sandwich beams", Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2007, 17, 661.
- Vijay K, Varadan K, Vinoy J, Gopalakrishnan S, "Smart material systems and mems: design and development methodologies", © John Wiley & Sons, Ltd, 2006
- Yaman Y, Çalışkan T, Nalbantoğlu V, Waechter D, Prasad E, "Active vibration control of a smart beam", Canada-US Can Smart Workshop Smart Materials and Structures proceedings, Oct. 2001 Montreal Quebec, Canada.

انتخاب شد. اولین معیار، تخمین اصل بقای انرژی الکترومکانیکی بین انرژیهای پتانسیل الکتروالاستیک و جنبشی داخلی با کارهای ناپایستار خارجی انجامشده توسط نیروهای الکترومکانیکی است. دومین معیار، مقایسه بین تغییرمکانهای حاصله از مدل عددی و نتایج ANSYS است. نتایج نشان میدهد که فرمولنویسی المان محدود ارائه شده از دقت و کارآمدی خوبی برخوردار است.

۷- علائم اختصاری

جابهجایی محوری متوسط و نسبی	$\overline{u},\widetilde{u}$
جابهجایی محوری لبههای فوقانی و تحتانی لایه هسته	u^+, u^-
طول، عرض و ضخامت هسته الاستیک	L, B, H
طول، عرض و ضخامت لایه پیزوالکتریک	L_p, B, H_P
تغییرشکل جانبی (خیز تیر) و مشتقات اول و دوم آن	w,w',w''
دوران خمشی لایه هسته (تیر تیموشنکو)	β_{c}
دوران خمشی لایههای پیزوالکتریک (تیر اویلر-برنولی)	β
اختلاف پتانسیل دو سر لایه پیزوالکتریک	$\widetilde{\varphi}(x)$
پتانسیل میانگین دو سر لایه پیزوالکتریک	$\bar{\varphi}^{\alpha}(x)$
انرژی جنبشی	KE
کار نیروهای خارجی ناپایستار مکانیکی و الکتریکی	W
م م ت امد الام سام ما	B _{ij} , i
مانریسهای تعییرسکل عشایی، حمشی و برسی	= a, b, c, j = m, b, s
ماتریسهای عملگر مشتق جابهجایی راستاهای X و Z	B_{ij}, i
و دوران	= a, b, c, j $= tx, tz, r$

۸- مراجع

- شهبازی ی، میردامادی ح، چناقلو م، "شبیهسازی عددی مدل المان محدود الکترومکانیکی بهکاراندازندههای محوری در سازههای کامپوزیت تطبیقی هوشمند"، سومین کنگره ملّی مهندسی عمران، تبریز، ۱۳۸۶.
- شهبازی ی، میردامادی ح، " مدل المان محدود الکترومکانیکی گذار پیزوالاستیک و الاستوپیزوالکتریک در سازههای کامپوزیت هوشمند"، ششمین کنفرانس هوافضا، تهران، ۱۳۸۵.
- غفارزاده ح، غفاری اح، "کنترل سازهها با استفاده از سیستم جداگر لرزهای غیرخطی هوشمند"، نشریه مهندسی عمران و محیط زیست دانشگاه تبریز، ۱۳۹۸، ۴۹ (۳)، ۷۵–۸۲.

هوشمند م، رافظی ب، علافی ج، "بررسی رفتار لرزهای سازههای فولادی با استفاده از مهاربندهای ترکیبی از جنس فولاد و آلیاژهای حافظهدار شکلی"، نشریه مهندسی عمران و محیط زیست دانشگاه تبریز، ۱۳۹۲، ۴۳ (۳)، ۱۱–۲۲.

Cotoni V, Masson P, Ccté F, "A finite element for Piezoelectric Multilayered Plates: Combined higher-order and piecewise linear c0 formulation", Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2006, 17, 155.



EXTENDED ABSTRACT

Finite Element Modelling of Smart Adaptive Composite Beam

Yaser Shahbazi^{a,*}, Hamid Reza Mirdamadi^b, Mohammad Reza Chenaghlou^c

^a Faculty of Architecture and Urbanism, Tabriz Islamic Art University, Tabriz 5164736931, Iran

^b Mechanical Engineering Department, Isfahan University of Technology, Isfahan 8415683111, Iran

 $^{\rm c}$ Civil Engineering Department, Sahand University of Technology, Tabriz 53318-11111, Iran

Received: 31 October 2018; Accepted: 07 April 2021

Keywords:

Smart structures, Computational mechanics, Finite element modeling, ANSYS.

1. Introduction

In the present paper, electromechanical finite element modeling of a smart adaptive composite beam is presented. The model is formulated based on linear electromechanics and electro kinematics assumptions. The proposed model is a three layers piezoelectric composite beam that acts as a transverse actuator. The elastic material of the core is isotropic whereas the outer piezoelectric layers are orthotropic. The accuracy of analytic and numerical models is demonstrated by examining the simulation of the two principles of mechanical and electrical energy conservation in a finite element program and also comparing its results with the ANSYS numerical model. In the numerical simulation of the finite element model, there are three mesh including 10, 50, and 100 elements. The parametric simulation consists of three mechanical, electrical, and electromechanical static loading sets. By comparing the results of modeling in the finite element programming and ANSYS, and verifying the principle of electromechanical energy conservation, it can be concluded that the proposed finite element model is efficient and accurate.

2. Methodology

2.1. Finite element Formulation

The smart composite beam model presented in this research is based on linear electromechanical and electro kinematic hypotheses (Cotoni et al., 2006; Gornandt A and Gabbert U, 2002). This means that the electric and mechanical field variables are so small that the theories of elasticity, piezoelectricity, and linear dielectrics can be applied. Elastic materials (core layer) are isotropic but piezoelectric materials (outer layers) are orthotropic. The transverse displacement of all layers at any given cross-sectional area of the longitudinal axis of the beam is equal to the thickness of the beam. The outer layers have assumed the Euler-Bernoulli beam and the elastic core of the beam follows Timoshenko's beam hypotheses. The normal stress (perpendicular to the upper and lower sides of the beam) is negligible. Finally, the piezoelectric layers are polarized in the direction of thickness and parallel to the direction of the applied electric field intensity, and both of them are perpendicular to the neutral axis of the smart beam, to establish the state of the axial actuation mechanism. The kinetic energy functions KE, electromechanical H, the work of mechanical and electrical external forces W, the Lagrangian function L, and the Hamilton generalized variational principle for this continuous piezoelectric environment are defined as follows:

* Corresponding Author

E-mail addresses: y.shahbazi@tabriziau.ac.ir (Yaser Shahbazi), hrmirdamadi@cc.iut.ac.ir (Hamid Reza Mirdamadi), mrchenaghlou@sut.ac.ir (Mohammad Reza Chenaghlou).

$$KE = \int_{V} \frac{1}{2} \rho \dot{u}_{i} \dot{u}_{i} dV \quad , \quad H = \int_{V} \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - D_{i} E_{i} \right) dV \quad , \quad W = \int_{S} \left(\overline{T}_{k} \delta u_{k} - \overline{Q} \delta \varphi \right) , \quad L = \int_{V} \left[\frac{1}{2} \rho \dot{u}_{i} \dot{u}_{j} - H_{0} E_{k} \right] dV$$

$$\int_{t_{0}}^{t_{1}} \left\{ \delta \int_{V} \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_{i} \dot{u}_{j} dV \right) - \delta \int_{V} H_{0}(\varepsilon_{ki}, E_{k}) dV + \int_{S} \left[\overline{T}_{k} \delta u_{k} - \overline{Q} \delta \varphi \right] dV \right\}$$

$$\tag{1}$$

Based on the degrees of freedom of the whole structure, $q = \begin{bmatrix} u'_1 & \widetilde{u}_1 & w_1 & u'_2 & \widetilde{u}_2 & w_2 & w'_2 \end{bmatrix}^T$, The linear differential equation of motion of the structure will be $M\ddot{q} + Kq = F_m^e - F_{me}^e$. Where, Finite element stiffness, $[K_e]$ and mass, $[M^e]$, matrices are basined as below:

$$\begin{bmatrix} K^{e} \end{bmatrix} = \int_{0}^{L} \begin{cases} c_{11}^{\alpha *} A_{\alpha} \int_{0}^{Le} \left(B_{am} B_{am}^{T} + B_{bm} B_{bm}^{T} \right) \\ + c_{33}^{c} A_{c} \int_{0}^{Le} \left(B_{cm} B_{cm}^{T} \right) \\ + c_{33}^{c} A_{c} \int_{0}^{Le} \left(B_{ab} B_{ab}^{T} + B_{bb} B_{bb}^{T} \right) \\ + c_{33}^{c} I_{c} \int_{0}^{Le} \left(B_{cb} B_{cb}^{T} \right) \\ + c_{55}^{c} A_{c} \int_{0}^{Le} \left(B_{cs} B_{cs}^{T} \right) \end{cases} dx \qquad \qquad \begin{bmatrix} M^{e} \end{bmatrix} = \int_{0}^{Le} \begin{cases} (2\rho_{\alpha}A_{\alpha} + \rho_{c}A_{c})B_{txm}B_{txm}^{T} \\ + \frac{1}{2} \left(\rho_{\alpha}A_{\alpha} + \rho_{c} \frac{I_{c}}{h_{c}} \right) B_{txd}B_{txd}^{T} \\ + \rho_{c} \frac{I_{c}}{h_{c}} \lambda B_{txd}B_{r}^{T} + \rho_{c} \frac{I_{c}}{h_{c}} \lambda B_{r}B_{txd}^{T} \\ + (2\rho_{\alpha}A_{\alpha} + \rho_{c}A_{c})B_{tz}B_{tz}^{T} \\ + (2\rho_{\alpha}A_{\alpha} + \rho_{c}A_{c})B_{tz}B_{tz}^{T} \\ + (2\rho_{\alpha}A_{\alpha} + \rho_{c}A_{c})B_{tz}B_{r}^{T} \end{cases} dx \qquad \qquad (2)$$

Then, by writing a numerical algorithm in MATLAB software, the results of the analyzes performed in the finite element model for mechanical, electrical and electromechanical loads as input and mechanical displacement as output are presented. In mechanical analysis, a static external load of 0 to 2N is applied to the end of the beam. In electrical charge, however, a potential difference of 0 to 100V is created on each of the piezoelectric actuators. The deformation created under mechanical charge and electrical charge are opposite to each other. In other words, the displacement caused by electric voltage is a compensatory response of piezoelectric stimuli to undesirable external static loads. Finally, the simulated behavior of the static performance of a piezoelectric actuator in electromechanical loading is investigated. In this way, static loads are applied to the end of the beam as before, and at the same time, a potential difference is applied to each of the piezoelectric actuators to eliminate or reduce the displacement of the end of the smart composite beam. Load-displacement relationships and the difference between internal and external energies for the 10, 50 and 100 meshes of different analyzes are shown in Fig. 1 to 3, respectively. The diagrams show and validate the principle of electrodynamic energy conservation in the finite element model.





Fig. 1. Load-displacement and the principle of electromechanical energy conservation

Fig. 2. Voltage- displacement and the principle of electromechanical energy conservation



Fig. 3. Electromechanical-displacement and the principle of electromechanical energy conservation

2.2. Ansys modeling and verification

The FEM-based software package, ANSYS, was used for the numerical modeling and verification of the finite element model presented in the previous section. When assigning an element to piezoelectric layers, the most appropriate element compatible with the properties of the piezoelectric material in the field of three-dimensional coupling problems for the production of smart composite beams should be used. In this software, piezoelectric elements SOLID5 or SOLID226 can be used. In addition to movement degrees of freedom, the piezoelectric elements have degrees of freedom of electrical potential required for electromechanical interaction problems. Also, the host structure requires degrees of freedom compatible with the degrees of freedom of the piezoelectric actuators in the connection areas. The best element for the elastic layers will be the SOLID45 element. Using the SOLID45 element, to model the middle core type, it is possible that normal and shear stresses should be considered in the host part of the smart composite structure. Mechanical, Electrical, and electromechanical static analyses were done with 50 element meshes to verify the finite element formulations which are presented in the previous section (Fig. 4 to Fig. 6).



Fig. 4. Comparison of proposed finite element model and ANSYS: load-displacement







Fig. 6. Comparison of proposed finite element model and ANSYS: electromechanical-displacement

3. Conclusions

In this paper, a finite element numerical formulation of a smart composite orthotropic beam is obtained based on the theory of continuous motion kinetics. In this formulation, the second-order partial differential equation system of motion was developed using Hamiltonian's advanced mechanics. The direction of polarization and the intensity of the electric field applied to the active material are parallel to the thickness of the beam. In the numerical simulation in the finite element model, three 10, 50 and 100 elements are created. Then, in a parametric analysis, three sets of mechanical, electrical, and electromechanical static loading were performed. Two criteria were selected to validate the finite element model and the written program. The first criterion is to estimate the principle of electromechanical energy conservation between the electro elastic and internal kinetic potential energies with the external work performed by the electromechanical forces. The second criterion is the comparison between the displacements resulting from the numerical model and the ANSYS results. The results show that the finite element formulation has good accuracy and efficiency.

4. References

Cotoni V, Masson P, Ccté F, "A Finite Element for Piezoelectric Multilayered Plates: Combined Higher-order and Piecewise Linear C0 Formulation", Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2006, 17, 155.

Gornandt A, Gabbert U, "Finite element analysis of thermopiezoelectric smart structures", Springer, Acta Mechanica, 2002, 154, 129-140.