تحلیل رفتار مهار بازویی میراشده در سازه‌های بلند به روش فوریه در فضای هیلبرت

امیرحسین طاهرخانی[۱]، مجید امین‌افشار*[۲]

[۱] دانش‌آموخته کارشناسی ارشد مهندسی عمران گرایش سازه، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره) قزوین
[۲] استادیار گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره) قزوین

(دریافت: ۹۸/۸/۲۱، پذیرش: ۹۹/۷/۲۷، نشر آنلاین: ۹۹/۷/۲۷)

چکیده

یکی از مهم‌ترین پارامترهای کنترل‌کننده طراحی در سازه‌های بلند، تغییر مکان جانبی سازه می‌باشد. انواع مختلف سیستم‌های مقاوم سازه‌ای جهت تحمل بارهای جانبی و ثقلی پیشنهاد شده است، که در این میان، سیستم هسته مرکزی با مهار بازویی و میراگر ویسکوز (The central core system with outrigger and viscous damper) نقش قابل‌ملاحظه‌ای در کاهش لنگر واژگونی و بهبود معیارهای عملکردی سازه دارد. هسته مرکزی به خاطر جرمش در اثر شتاب جاذبه زمین تحت بار محوری قرار می‌گیرد. در پژوهش‌های قبلی اثر توأم نیروی محوری و سختی ستون‌های پیرامونی بر ارتعاشات سیستم موردنظر لحاظ نشده است. در این پژوهش ارتعاشات آزاد و اجباری سیستم هسته مرکزی به انضمام مهاربند بازویی و میراگر ویسکوز، با لحاظ نیروی محوری ناشی از جرم هسته مرکزی موردبررسی قرار می‌گیرد. با توجه به مختلط بودن مقادیر ویژه و غیر متعامد بودن بردارهای ویژه این سیستم و برای دستیابی به پاسخ سیستم، از تکنیک متعامدسازی بردارهای ویژه در فضای هیلبرت (Hilbert Space) و بسط سری فوریه بر اساس بردارهای حاصل استفاده می‌شود. نتایج حاصل نشان می‌دهد که لحاظ اثر نیروی محوری باعث افزایش جابه‌جایی نسبی طبقات، برش پایه و لنگرپایه می‌شود.

کلیدواژه‌ها: سازه بلند، کنترل سازه، دینامیک سازه، مهاربند بازویی، فضای هیلبرت.

۱- مقدمه

با افزایش رشد شهرنشینی و افزایش تقاضا و بالا رفتن قیمت زمین، طراحان برای استفاده حداکثر از فضای موجود به طراحی ساختمان‌هایی با ارتفاع زیاد (بلندمرتبه) روی آوردند. از طرفی بلاهای طبیعی و تلاش برای کاهش خسارت‌های وارده ناشی از آن همواره یکی از مهم‌ترین هدف‌ها در زمینه مهندسی سازه بوده است. دستیابی به روش‌های کارآمد برای محافظت از سازه در برابر نیروهایی مانند باد و زلزله، یکی از نخستین گام‌های طراحی سازه‌ها بوده و منجر به ارائه سیستم‌های کنترل سازه گردیده است. سیستم‌های کنترل سازه‌ای شامل سه سیستم کنترل فعال[۱]، کنترل غیرفعال[۲] و کنترل نیمه‌فعال[۳] می‌باشند. کنترل غیرفعال یکی از مکانیسم‌های کنترل سازه برای محافظت از سازه در برابر بارهای جانبی است، که با افزودن سختی و میرایی سازه، انرژی ناشی از بارهای خارجی را مستهلک می‌کند (Spencer Jr و همکاران، ۲۰۰۳؛ Symans و همکاران، ۱۹۹۹؛ Mulligan، ۲۰۰۷). سیستم مهاربند بازویی یکی از سیستم‌های سازه‌ای رایج در ساختمان‌های بلند بوده و به‌کارگیری این سیستم در اواخر دهه هفتاد میلادی گسترش یافت (CTBUH، ۲۰۱۲).

سیستم مهاربند بازویی به انضمام میراگر ویسکوز توسط Wilford و همکاران (۲۰۰۷) و Gamaliel (۲۰۰۸) ارائه شد و اثر آن در سازه‌های بلند بررسی شد. O'Neill (۲۰۰۶) نشان داد که استفاده از میراگر و افزایش میرایی در سیستم مهاربند بازویی به نسبت افزایش سختی و ابعاد سازه، راهکاری مناسب برای کاهش و کنترل تغییر مکان‌های سازه است.

Chen و همکاران (۲۰۱۰) با حل معادله دیفرانسیل جزئی مسئله به محاسبه مود شکل‌ها و مقدار ویژه پرداخته و یک روش تقریبی برای تعیین موقعیت بهینه میراگر ویسکوز در ارتفاع سازه ارائه دادند.

1. Active control
2. passive control
3. Semi-active control

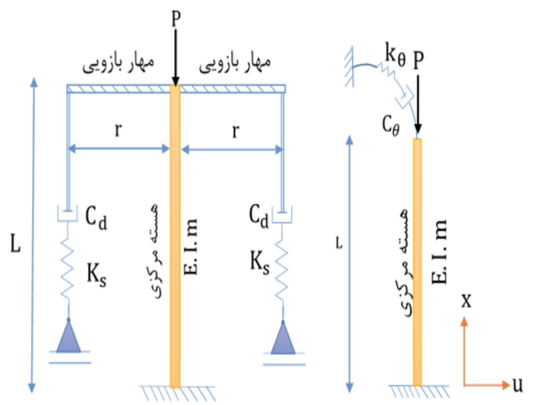
* نویسنده مسئول؛ شماره تماس: ۰۲۸۳۳۹۰۱۱۵۲
آدرس ایمیل : a.taherkhani@edu.ikiu.ac.ir (ا. ح. طاهرخانی)، mafshar@eng.ikiu.ac.ir (م. امین‌افشار).

فرزاد و همکاران (۱۳۹۸) نیز با استفاده از الگوریتم‌های فراکاوشی به تعیین موقعیت بهینه سیستم مهاربند بازویی در قاب-های فولادی بلند پرداخته‌اند. هم‌چنین پژوهش‌های آزمایشی و تحلیلی نیز حاکی از آن است که استفاده از سیستم مهاربند بازویی در کاهش تغییر مکان جانبی سازه‌ها بلند مؤثر است (Tan و همکاران، ۲۰۱۲).

Deng و همکاران (۲۰۱۳) به بررسی نقش سیستم هسته مرکزی با مهاربند بازویی و میراگر هیسترتیک[4] در کنترل پاسخ سازه‌های بلند پرداخته و از روش اجزای محدود برای حل معادله استفاده کردند. Jovanovich (۲۰۱۱ و ۲۰۱۲) از روش سری فوریه در فضای هیلبرت[5] برای بررسی ارتعاشات عرضی تیری با شرایط مرزی انتهایی ویسکوز خطی و ویسکوز پیچشی استفاده کرد. در این مقاله به بررسی ارتعاشات سازه و تأثیر سیستم هسته مرکزی با مهاربند بازویی میراشده با لحاظ نیروی محوری (ناشی از جرم هسته مرکزی) در کنترل تغییر مکان جانبی ناشی از بارگذاری هارمونیک پرداخته می‌شود. در تحقیقات گذشته اثر سختی ستون‌های پیرامونی و تأثیر نیروی محوری بر فرکانس‌ها و تغییر مکان جانبی سازه لحاظ نشده است. برای حل معادله دیفرانسیل جزئی حاکم بر مسئله از روش سری فوریه با تعریف اپراتور دیفرانسیلی در فضای هیلبرت استفاده می‌شود (Naimark، ۱۹۶۷؛ Muller، ۱۹۵۶).

۲- مدل (پیشنهادی) سیستم هسته مرکزی با مهاربند بازویی و میراگر ویسکوز با اثر بار محوری

شکل (۱) مدل ارائه‌شده شامل یک تیر طره با عملکرد خمشی است که به‌عنوان هسته مرکزی در نظر گرفته شده است.



شکل ۱- سیستم هسته مرکزی با مهار بازویی و میراگر ویسکوز با اثر نیروی محوری

مهار بازویی همانند تیری صلب، هسته سازه را به ستون‌های پیرامونی و میراگر ویسکوز متصل می‌نماید. تغییر شکل خمشی هسته ناشی از بارهای جانبی منجر به دوران مهار بازویی می‌شود و ازآنجاکه اتصال مهار بازویی به ستون‌های پیرامونی و میراگرهای ویسکوز مفصلی در نظر گرفته شده است، دوران صلب مهار بازویی باعث ایجاد کوپل نیرو محوری در ستون‌های پیرامونی و میراگرهای ویسکوز خواهد شد. به همین علت اثر سختی ستون-های پیرامونی و میراگر ویسکوز به‌صورت سختی پیچشی و ویسکوز پیچشی در شرایط مرزی انتهایی مسئله اعمال شده است. سختی ستون‌های پیرامونی به‌عنوان پارامترهای تأثیرگذار در مسئله بوده و به همین علت اثرش در محاسبات لحاظ شده است. میراگر مورداستفاده از نوع میراگر ویسکوز خطی است که در راستای قائم به دو سر مهاربند بازویی متصل شده است. پارامترهای به‌کار رفته در شکل شامل این موارد می‌باشد: ارتفاع سازه (L)، بازویی در هر سو از سازه (r)، سختی محوری ستون (k_s)، میرایی میراگر ویسکوز (C_d)، سختی خمشی هسته (EI)، سختی پیچشی ستون‌ها (k_θ)، میرایی پیچشی میراگر ویسکوز (C_θ)، بار محوری ناشی از جرم هسته مرکزی (P) جرم واحد طول هسته (m).

۲-۱- گام‌های حل مسئله

در گام اول معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی سیستم موردنظر به روش همیلتون[6] استخراج می‌گردد. در گام دوم، پس از محاسبه دترمینان[7] ماتریس ضرایب، فرکانس‌های طبیعی سیستم، با روش-های عددی (روش مولر)[8] محاسبه می‌گردد. در گام سوم وابستگی مقدار ویژه به شرایط مرزی با استفاده از اپراتورهای متعامدساز رفع شده و مود شکل سازه محاسبه می‌گردد. در انتها با آنالیز مودال[9] و سری فوریه پاسخ نهایی (جابه‌جایی جانبی هسته) سازه محاسبه می‌گردد.

۲-۲- استخراج معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی حاکم بر سیستم

کار جنبشی ناشی از اینرسی در طول واحد هسته مرکزی:

$$T = \int_0^t \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial u(x.t)}{\partial t}\right)^2 dt \qquad (۱)$$

با استفاده از اصل حساب تغییرات (عملگر وردشِی[10] برحسب متغیر u) رابطه (۲) به دست می‌آید.

$$\delta T = -\int_0^t m\left(\frac{\partial^2 u(x.t)}{\partial^2 t}\right)\delta u dt \qquad (۲)$$

4. Hystertic
5. Hilbert Space
6. Hamilton's method
7. Determinant

8. Muller's method
9. Modal
10. Variation

کار ناشی از نیروی خارجی بار کمانش محوری:

$$\begin{aligned} &\mathrm{V} = -\int_0^L \frac{1}{2} P \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \\ &\delta V = \int_0^L P \left(\frac{\partial^2 u(x.t)}{\partial^2 x}\right) \delta u dx\, P \frac{\partial u(L.t)}{\partial x} \delta u \end{aligned} \quad (۳)$$

کار پتانسیل حاصل از انرژی کرنشی هسته مرکزی:

$$\begin{aligned} &W = \int_0^L \frac{1}{2} EI \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}\right)^2 dx \\ &\delta W = EI \frac{\partial^2 u(L.t)}{\partial^2 x} \delta \frac{\partial u}{\partial x} - EI \frac{\partial^3 u(L.t)}{\partial^3 x} \delta u \\ &+ \int_0^L EI \left(\frac{\partial^4 u}{\partial^4 x}\right) \delta u dx \end{aligned} \quad (۴)$$

کار خارجی دمپر[11] پیچشی ویسکوز:

برای فنر پیچشی، عملگر وردشی زیر در بازه زمانی برای نقطه انتهایی برقرار می‌باشد.

$$\delta V = \int_0^t C_d \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) \delta \frac{\partial u}{\partial x} dx \rightarrow\ x = L \quad (۵)$$

کار خارجی ناشی از فنر پیچشی:

برای دمپر پیچشی ویسکوز، عملگر وردشی زیر در بازه زمانی برای نقطه انتهایی برقرار می‌باشد.

$$\delta V = \int_0^t k_\theta \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \delta \frac{\partial u}{\partial x} dx \rightarrow\ x = L \quad (۶)$$

انرژی پتانسیل کل مجموع انرژی‌های پتانسیل U، جنبشی K و کار ناشی از نیروهای خارجی V این‌گونه محاسبه می‌شود:

$$\pi = T - (W + V) \quad (۷)$$

با استفاده از حساب تغییرات و اصل بقای انرژی رابطه زیر برقرار می‌گردد:

$$\begin{aligned} &\delta\pi = \delta T - (\delta W + \delta V) = 0 \\ &\delta\pi = \int_0^t \int_0^L [-m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}\right) - P \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}\right) \\ &\qquad - EI \left(\frac{\partial^4 u}{\partial^4 x}\right)] \delta u dx dt \\ &+ \int_0^t EI \frac{\partial^3 u}{\partial^3 x} \delta u dt + \int_0^t P \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \delta u dx \\ &\int_0^t \left[-EI \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - k_\theta \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - C_\theta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)\right] \delta \frac{\partial u}{\partial x} dt = 0 \end{aligned} \quad (۸)$$

۲-۳- محاسبه مقدار ویژه با تکنیک جداسازی متغیرها

$$\frac{\partial^2 u(x.t)}{\partial^2 t} + k^2 \frac{\partial^2 u(x.t)}{\partial^2 x} + c^2\ \frac{\partial^4 u(x.t)}{\partial^4 x} = q(x.t) \quad (۹)$$

در رابطه (۹) t بیانگر زمان، u جابه‌جایی جانبی هسته، $q(x.t)$ نیروی برشی در واحد وارد بر هسته است.

در معادله (۹) $c^2 = \frac{EI}{m}$ و $k^2 = \frac{P}{m}$ می‌باشد. در این معادله، معادله کمانش تیر یک سرگیردار در حالت دینامیکی با اثر بار محوری می‌باشد که با استفاده از اصل هملیتون[12] محاسبه می‌گردد.

شرایط مرزی مسئله:

$$\begin{aligned} &1)\ \mathrm{u}(0.\mathrm{t}) = 0 \qquad\qquad 2) \frac{\partial \mathrm{u}(0.\mathrm{t})}{\partial \mathrm{x}} = 0 \\ &3)\ \frac{\partial^2 \mathrm{u}(\mathrm{L.t})}{\partial^2 \mathrm{x}} = -\mathrm{h}_2 \frac{\partial \mathrm{u}(\mathrm{L.t})}{\partial \mathrm{x}} - \mathrm{h}_1 \frac{\partial^2 \mathrm{u}\ (\mathrm{L.t})}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{t}} \\ &4)\ \frac{\partial^3 \mathrm{u}(\mathrm{L.t})}{\partial^3 \mathrm{x}} = -\mathrm{h}_3 \frac{\partial \mathrm{u}(\mathrm{L.t})}{\partial \mathrm{x}} \end{aligned} \quad (۱۰)$$

در رابطه بالا، $h_2 = \frac{k_\theta}{EI}$ و $h_1 = \frac{C_\theta}{EI}$ و $h_3 = \frac{P}{EI}$ و $C_\theta = 2r^2 C_d$ و $K_\theta = 2r^2 K_s$ می‌باشد. توجه گردد که اثر سختی و میرایی ستون‌های پیرامونی در شکل (۱) و در مدل‌سازی سیستم هسته مرکزی با مهار بازویی به سبب عملکرد اهرمی مهار بازویی به‌صورت کمیت‌های سختی پیچشی $K_\theta = 2r^2 K_s$ و میرایی پیچشی $C_\theta = 2r^2 C_d$ در معادلات دیفرانسیل (معادلهٔ (۸)) و معادلهٔ شرایط مرزی (معادلهٔ (۱۰)) بروز کرده‌اند. مطابق با تئوری رایلی[13] ضریب ویسکوزیته[14] دینامیکی به‌صورت ضریبی از جرم سازه در نظر گرفته شده است (Chopra، ۱۹۹۷).

$$C_d = 2M\omega\xi \quad (۱۱)$$

شرایط اولیه مسئله:

$$1)\ u(x.0) = f(x) \qquad 2)\ \frac{\partial u(x.0)}{\partial t} = g(x) \quad (۱۲)$$

حل معادله (۹) با استفاده از تکنیک جداسازی متغیرها:

$$\begin{aligned} &u(x.t) = \varphi(x) e^{\lambda t} \\ &c^2 \frac{d^4 \varphi(x)}{d^4 x} + k^2 \frac{d^2 \varphi(x)}{d^2 x} + \lambda^2 \varphi(x) = 0 \end{aligned} \quad (۱۳)$$

شرایط مرزی با اعمال جداسازی متغیرها:

$$\begin{aligned} &1)\ \varphi(0) = 0 \qquad\qquad 2) \frac{d\varphi(0)}{dx} = 0 \\ &3)\ \frac{d^2 \varphi(L)}{d^2 x} = (-h_1 \lambda - h_2) \frac{d\varphi(L)}{dx} \\ &4) \frac{d^3 \varphi(L)}{d^3 x} = -h_3 \frac{d\varphi(L)}{dx} \end{aligned} \quad (۱۴)$$

معادله (۱۳) یک معادله دیفرانسیل خطی معمولی بوده که جواب عمومی معادله به این صورت می‌باشد:

11. Damper
12. Hamilton's principle
13. Riley Theory
14. Viscosity

$$\varphi(x) = ce^{fx} \quad (۱۵)$$

$$f_{1.3} = \pm\sqrt{\frac{-k^2 + \sqrt{k^4 - 4c^2\lambda^2 i}}{2c^2}}$$
$$f_{2.4} = \pm\sqrt{\frac{-k^2 - \sqrt{k^4 - 4c^2\lambda^2 i}}{2c^2}} \quad (۱۶)$$

عبارت‌های معادله (۱۶) ریشه‌های معادله (۱۳) می‌باشند.

$$\varphi(x) = C_1e^{f_1x} + C_2e^{-f_1x} + C_3e^{f_2x} + C_4e^{-f_2x} \quad (۱۷)$$

جایگذاری شرایط مرزی معادله (۱۴) در معادله (۱۳) به این صورت می‌باشد:

$$\begin{aligned}
&1)\ C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0\\
&2)\ f_1C_1 - f_1C_2 + f_2C_3 - f_2C_4 = 0\\
&3)\ ({f_1}^3 + h_3f_1)e^{f_1L}C_1 + (-{f_1}^3 - h_3f_1)e^{-f_1L}C_2\\
&+({f_2}^3 + h_3f_2)e^{f_2L}C_3 + (-{f_2}^3 - h_3f_2)e^{-f_2L}C_4 = 0\\
&4)\ ({f_1}^2 + (h_1\lambda+h_2)f_1)e^{f_1L}C_1\\
&+({f_1}^2 - (h_1\lambda+h_2)f_1)e^{-f_1L}C_2\\
&+({f_2}^2 + (h_1\lambda+h_2)f_2)e^{f_2L}C_3 +\\
&({f_1}^2 - (h_1\lambda+h_2)f_2)e^{-f_2L}C_4 = 0
\end{aligned} \quad (۱۸)$$

با توجه به این‌که در تساوی سمت راست، تمامی معادلات بالا برابر صفر می‌باشند، مسئله از نوع مقدار ویژه بوده و برای محاسبه مقدار ویژه، دترمینان[15] ماتریس ضرایب برابر صفر می‌باشد:

$$det(A) = 0$$

همان‌طوری که از عبارت (۱۴) مشخص است مقدار ویژه، تابع شرایط مرزی بوده و عددی مختلط می‌باشد. پس از محاسبه دترمینان ماتریس ضرایب، مقدار ویژه با روش‌های عددی خاصی (روش مولر) قابل‌محاسبه می‌باشد.

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) = C_4(D_1e^{f_1x} + D_2e^{-f_1x} + D_3e^{f_2x}\\
&\qquad + e^{-f_2x})\\
&s_1 = f_1^3 + h_3f_1.\ z_1 = ({f_1}^2 + (h_1\lambda+h_2)f_1)\\
&s_2 = -f_1^3 - h_3f_1\\
&z_2 = ({f_1}^2 - (h_1\lambda+h_2)f_1)\\
&s_3 = f_2^3 + h_3f_2.\ z_3 = ({f_2}^2 + (h_1\lambda+h_2)f_2)\\
&s_4 = -f_2^3 - h_3f_2\\
&z_4 = ({f_2}^2 - (h_1\lambda+h_2)f_2)\\
&a_1 = \frac{f_1 - f_2}{-2f_1}\ .\ a_2 = \frac{f_1 + f_2}{-2f_1}\\
&D_3 = ((s_4 - z_4)\ exp(-f_2L)\\
&\qquad + (-a_2 - 1)(s_1\\
&\qquad - z_1)\ exp(f_1L))\\
&+a_2(s_2 - z_2)exp(-f_1L))\\
&\qquad /((s_3 - z_3)\ exp(f_2L))\\
&+(-a_1 - 1)(s_1 - z_1)exp(f_1L) + a_1(s_2\\
&\qquad - z_2)exp(-f_1L))\\
&D_2 = (a_1D_3 + a_2)\\
&D_1 = (-1 - D_2 - D_3)
\end{aligned} \quad (۱۹)$$

ضمناً با توجه به این‌که مسئله از نوع مقدار ویژه بوده، می‌توان تمامی ضرایب مجهول معادله را تنها برحسب ضریب C_4 نشان داد. تمامی ضرایب C_1 و C_2 و C_3 به‌صورت مضارب D_1 و D_2 و D_3 از C_4 نوشته شده و به این ترتیب C_4 تنها مجهول معادله می‌باشد.

۲-۴- متعامدسازی در فضای هیلبرت[16]

اپراتور دیفرانسیلی خطی در فضای برداری به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w(x.t) = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial u(x.t)}{\partial t}\\ \dfrac{\partial u(x.t)}{\partial x}\end{pmatrix} Q(x.t) = \begin{pmatrix}q(x.t)\\ 0\end{pmatrix} \quad (۲۰)$$

اپراتور متعامدساز نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T = \begin{pmatrix}0 & -c^2\ \dfrac{\partial^3}{\partial^3 x} - k^2\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & 0\end{pmatrix}\frac{\partial w(x.t)}{\partial t} = Tw(x.t) + Q(x.t) \quad (۲۱)$$

و شرایط اولیه به این صورت تعریف می‌گردد:

$$\mathrm{w(x.0)} = \begin{pmatrix}f'(\mathrm{x})\\ \mathrm{g(x)}\end{pmatrix} \quad (۲۲)$$

با استفاده از تکنیک جداسازی متغیرها می‌توان چنین نوشت:

$$\mathrm{w(x.t) = u(x)e^{\lambda t}} \quad (۲۳)$$

$u(x)$ بردار مودی و دارای مؤلفه‌های برداری $u_1(x)$ و $u_2(x)$ می‌باشد.

$$\mathrm{u}(x) = \begin{pmatrix}u_1(x)\\ u_2(x)\end{pmatrix} \quad (۲۴)$$

با استفاده از معادله (۲۰) و (۲۴) و جایگذاری در شرایط مرزی مسئله، رابطه (۱۱) به این صورت خواهد بود.

$$\begin{aligned}
&Tu(x) = \lambda u(x)\\
&1)u_1(0) = 0\\
&2)u_2(0) = 0\\
&3)u''_2(L) = -h_3u_2(L)\\
&4)u'_2(L) = -(h_1u'_1(L) + h_2u_2(L))
\end{aligned} \quad (۲۵)$$

با مقایسه بین شرایط مرزی اولیه و شرایط مرزی با اثر اپراتور متعامدساز مشخص می‌شود که با انتخاب اپراتور دیفرانسیلی و اپراتور متعامد ساز فرض شده و اعمال آن، مطابق رابطه (۲۵)، دیگر مقدار ویژه به شرایط مرزی وابسته نمی‌باشد.

15. Determinant

16. Hilbert Space

۲-۵- ضرب داخلی بردارها

در این بخش با تعریف بردار $v(x)$ و با استفاده از ویژگی‌های ضرب داخلی بردارها در فضای مختلط، ماتریس متعامدساز مزدوج T^* متناظر با T به دست می‌آید و با استفاده از آن ضریب C_4 را نیز می‌توان محاسبه کرد.

$$X = \{u(x): u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}. u_1(x). u_2(x): [0. L] \rightarrow C\&x\epsilon R\} \quad (۲۶)$$

X معرف فضای برداری مودی $u(x)$ بوده و $u_1(x)$ و $u_2(x)$ مؤلفه‌های بردار مودی می‌باشد و این دو مؤلفه به ازای مقادیر حقیقی از x دارای مقادیر مختلط C می‌باشند. ضرب داخلی بردارها کمیتی اسکالر می‌باشد و به این صورت: $X \times X = F$ یا <.,.> قابل نمایش است. حاصل‌ضرب داخلی بردارهای مودی $u(x)$ و $v(x)$ را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

برای ضرب داخلی دو بردار مختلط $< u(x). v(x) >$ باید مزدوج مختلط بردار $u(x)$ که $\bar{u}(x)$ بوده در بردار $v(x)$ ضرب داخلی شود.

$$< u(x). v(x) > = \int_0^L [\bar{u}_1(x) v_1(x) + \bar{u}_2(x) v_2(x)] dx \quad (۲۷)$$

$\bar{u}_2(x)$ و $\bar{u}_1(x)$ مزدوج مختلط متناظر با $u_2(x)$ و $u_1(x)$ فرض می‌شود که بردار $g(x)$ با مؤلفه‌های $\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$ وجود دارد و حاصل‌ضرب داخلی برداری آن با بردار مزدوج $\bar{u}(x)$ برابر صفر می‌باشد. (یعنی بردار $g(x)$ بر بردار $u(x)$ عمود می‌باشد). با استفاده از یکی از ویژگی‌های ضرب داخلی بردارها می‌توان نوشت (Naimark، ۱۹۶۷):

$$\begin{aligned} &< g(x). u(x) > = < v(x). Tu(x) > \\ &\int_0^L [\bar{g}_1(x) v_1(x) + \bar{g}_2(x) v_2(x)] dx \\ &= \int_0^L \bar{v}_1(x) [0 \quad -c^2 \frac{\partial^3}{\partial^3 x} - k^2 \frac{\partial}{\partial x}] \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} \\ &+ \bar{v}_2(x) \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad 0\right] \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} dx \\ &= \int_0^L [\bar{v}_1(x) - c^2 u'''_2(x) - \bar{v}_1(x)\, k^2 u'_2(x)] \\ &\qquad + [\bar{v}_2(x) u'_1(x)] dx \end{aligned} \quad (۲۸)$$

و با انتگرال‌گیری جزء به جزء از رابطه بالا و مرتب‌سازی می‌شود:

$$\begin{aligned} &T^* v(x) = \mu v(x) \\ &1) \bar{v}_1(0) = 0 \\ &2) \bar{v}'_1(0) = 0 \\ &3) \bar{v}''_1(L) = \left(-\frac{k^2}{c^2} - h_3\right) \bar{v}_1(L) - h_2 \bar{v}'_1(L) \\ &4) \bar{v}_2(0) = 0 \end{aligned} \quad (۲۹)$$

عبارت‌های به‌دست آمده (۲۹) شرایط مرزی برای اپراتور متعامدساز مزدوج T^* بوده و تنها وابسته به بردار $v(x)$ می‌باشد و مقدار ویژه μ در شرایط مرزی ظاهر نشده و اپراتور متعامدساز T^* از عبارت آخر معادله (۲۸) قابل‌استخراج می‌باشد.

$$T^* = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ c^2 \frac{\partial^3}{\partial^3 x} + k^2 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \quad (۳۰)$$

با مقایسه بین T و T^* مشخص می‌شود که $T^* = -T^t$ (اپراتور متعامدساز مزدوج برابر با منفی ترانهاده حاده اپراتور متعامدساز می‌باشد) بوده و بیان‌کننده این است که اپراتور متعامدساز ماتریس شبه هرمیتی[۱۷] می‌باشد.

$$\begin{aligned} &Tu(x) = \lambda u(x) \\ &u_n(x) = \begin{pmatrix} u_{1.n}(x) \\ \frac{u'_{1.n}(x)}{\lambda_n} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (۳۱)$$

با استفاده از شرط متعامد بودن ، بردار ویژه $u_n(x)$ و $v_n(x)$ به این ترتیب محاسبه می‌گردد.

$$\begin{aligned} &\mathrm{T^* v(x) = \mu v(x)} \\ &v_\mathrm{n}(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} \mathrm{v_{1.n}(x)} \\ \frac{\mathrm{c^2 v'''_{1.n}(x) + k^2 v'_{1.n}(x)}}{\mu_n} \end{pmatrix} \\ &v_\mathrm{n}(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} \bar{u}_{1.\mathrm{n}}(\mathrm{x}) \\ \frac{c^2 \bar{u}'''_{1.\mathrm{n}}(\mathrm{x}) + k^2 \bar{u}'_{1.\mathrm{n}}(\mathrm{x})}{\lambda_n} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (۳۲)$$

اکنون با استفاده از بردارهای ویژه $u(x)$ و $v(x)$ و خاصیت ضرب داخلی برداری می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} &< v(x). u(x) > \\ &= \int_0^L [\bar{v}_1(x) u_1(x) + \bar{v}_2(x) u_2(x)] dx = 1 \\ &C_4 = \\ &\frac{1}{\sqrt{\int_0^L \left[\phi_n^2(x) \lambda_n^2 + \left(c^2 \phi'''_{1.n}(x) + k^2 \phi'_{1.n}(x)\right)\left(\phi'_{1.n}(x)\right)\right] dx}} \end{aligned} \quad (۳۳)$$

پارامتر مجهول C_4 با استفاده از معادله بالا محاسبه‌شده و با استفاده از ضریب C_4 مود شکل‌های $u_{1.n}(x)$ به ازای مقدار ویژه‌های مختلف محاسبه می‌شود.

۲-۶- آنالیز مودال

با استفاده از قاعده جداسازی متغیرها می‌توان نوشت:

$$\mathrm{w(x. t)} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \eta_r(t) u_r(x) \quad (۳۴)$$

17. Hermetic quasi-matrix

با استفاده از معادله (۲۰) و رابطه (۳۴) این معادله به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} w(x.t) &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \dot{\eta_r}(t)u_r(x) \\ &= T\left(\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \eta_r(t)u_r(x)\right) + Q(x.t) \\ &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \eta_r(t)\lambda_r u_r(x) + Q(x.t) \\ \dot{\eta_r}(t) &= \eta_r(t)\lambda_r + \int_0^L q(\xi.t)\,u_{1.r}(\xi)d\xi.\ r = \pm 1.\pm 2.\pm 3.\dots \end{aligned} \tag{۳۵}$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس برای عبارت (۳۶) می‌توان نوشت:

$$\widetilde{\eta_r}(s) = \frac{\eta_r(0)}{s-\lambda_r} + \frac{1}{s-\lambda_r}\int_0^L \tilde{q}(\xi.s)\,u_{1.r}(\xi)d\xi \tag{۳۶}$$

با تبدیل لاپلاس از اپراتورهای دیفرانسیلی (۲۰) این نتیجه حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} L\{w(x.t)\} &= L\left\{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u(x.t)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u(x.t)}{\partial x} \end{pmatrix}\right\} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} L\{\eta_r(t)\}u_r(x) \end{aligned} \tag{۳۷}$$

$$\begin{pmatrix} s\tilde{u}(x.s) - \tilde{u}(x.0) \\ \dfrac{\partial \tilde{u}(x.s)}{\partial x} \end{pmatrix} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \tilde{\eta}_r(s)\begin{pmatrix} u_{1.r}(x) \\ u_{2.r}(x) \end{pmatrix} \tag{۳۸}$$

با مساوی قرار دادن سمت چپ و راست مؤلفه اول معادله (۳۸) و مرتب‌سازی آن، می‌توان به این صورت نوشت:

$$\begin{aligned} &\tilde{u}(x.s) \\ &= \frac{u(x.0)}{s} + \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{\eta_r(0)}{s(s-\lambda_r)}u_{1.r}(x) \\ &+ \sum_{r=-\infty}^{+\infty} [\frac{1}{s(s-\lambda_r)}\int_0^L \tilde{q}(\xi.s)\,u_{1.r}(\xi)d\xi]u_{1.r}(x) \end{aligned} \tag{۳۹}$$

و با تبدیل لاپلاس معکوس عبارت (۳۹) این نتایج حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} u(x.t) &= u(x.0) + \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \eta_r(0)\left(-\frac{1}{\lambda_r}\left(1-e^{\lambda_r t}\right)\right)u_{1.r}(x) \\ &+ \sum_{r=-\infty}^{+\infty} [\int_0^t (-\frac{1}{\lambda_r}\left(1-e^{\lambda_r(t-\tau)}\right)] \int_0^L Q(\xi.\tau)\,u_{1.r}(\xi)d\xi d\tau)u_{1.r}(x) \end{aligned} \tag{۴۰}$$

$\eta_r(0)$ باید با توجه به شرایط اولیه معادله محاسبه گردد:

$$w(x.0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u(x.0)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u(x.0)}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x) \\ f'(x) \end{pmatrix} \tag{۴۱}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \eta_r(0)\begin{pmatrix} u_{1.r}(x) \\ u_{2.r}(x) \end{pmatrix} \\ \eta_r(0) &= \int_0^L [g(\xi)\,u_{1.r}(\xi) \\ &+ \frac{1}{\lambda_n}\left(c^2 u'''_{1.r}(x) + k^2 u'_{1.r}(x)\right)f'(\xi)d\xi \end{aligned} \tag{۴۲}$$

با انتگرال جزءبه‌جزء عبارت (۴۲) را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\eta_r(0) = \int_0^L [g(\xi) + \lambda_r f(\xi)]\,u_{1.r}(\xi)d\xi \tag{۴۳}$$

برخی از جملات رابطه (۴۰) با توجه به ویژگی‌های برداری حذف‌شده و جواب نهایی به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} &\mathrm{u(x.t)} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \{\int_0^L [\mathrm{g}(\xi) \\ &+ \lambda_r \mathrm{f}(\xi)]\,\mathrm{u}_{1.r}(\xi)\mathrm{d}\xi\}\frac{\mathrm{u}_{1.r}(\mathrm{x})e^{\lambda_r t}}{\lambda_r} \\ &+ \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{u}_{1.r}(\mathrm{x})}{\lambda_r}\int_0^t e^{\lambda_r(t-\tau)}\int_0^L \mathrm{Q}(\xi.\tau)\mathrm{u}_{1.r}(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{۴۴}$$

معادله (۴۴) معادله جابه‌جایی جانبی هسته مرکزی می‌باشد و عبارت اول مربوط به پاسخ سیستم به ارتعاشات آزاد ناشی از تحریک اولیه و عبارت دوم پاسخ سیستم به ارتعاشات اجباری ناشی از بارگذاری هارمونیک می‌باشد.

۳- تحلیل عددی و نتایج

۳-۱- بررسی و صحت‌سنجی عملکرد مدل

در این بخش، نخست برای صحت‌سنجی نتایج حاصل از این تحقیق، به مقایسه نتایج مدل پیشنهادی با مدل ارائه‌شده توسط (Jovanovich، ۲۰۱۲) پرداخته می‌شود. در مدل این محقق تنها اثر میراگر ویسکوز پیچشی در کنترل ارتعاشات عرضی تیر لحاظ شده است درحالی‌که در این پژوهش حاضر، به بررسی ارتعاشات سیستم هسته مرکزی با مهاربند بازویی و میراگر ویسکوز و اثر نیروی محوری پرداخته شده است. برای صحت‌سنجی سه سازه مختلف در نظر گرفته شده است. در سازه اول اثر سختی پیچشی و بار محوری لحاظ نشده، درحالی‌که در سازه دوم سختی پیچشی برابر $K_s = 17.55\frac{N}{m}$ و بار محوری برابر صفر و در سازه سوم سختی پیچشی برابر $K_s = 17.55\frac{N}{m}$ و بار محوری برابر $P = 1376.76\ N$ است. ویسکوز پیچشی در تمام سازه‌ها برابر $c_\theta = 17.55\frac{Ns}{m}$ است. اگر اثر سختی پیچشی انتهایی و نیروی محوری ناشی از جرم عضو در معادله لحاظ نگردد، مقادیر ویژه مدل پیشنهادی این مقاله با مدل در مقاله Jovanovich (۲۰۱۲) دقیقاً برابر می‌باشد. این در حالی است که در روش محقق پیشین اثر سختی پیچشی انتهایی و نیروی محوری قابل ارزیابی نمی‌باشد. اما در مدل پیشنهادی، اثر

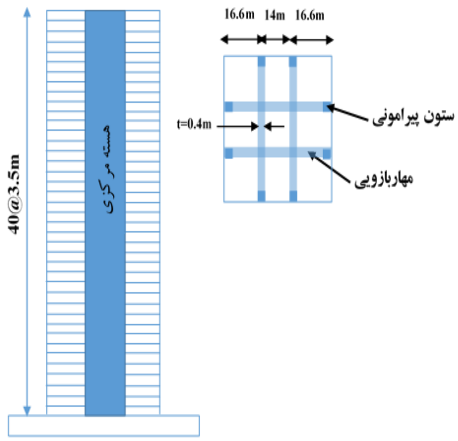
سختی پیچشی و نیروی محوری بر فرکانس سیستم (۵ مد) لحاظ و به‌صورت جدول (۱) گزارش شده است.

جدول ۱- مقایسه نتایج مدل پیشنهادی با مدل ارائه‌شده توسط (Jovanovich، ۲۰۱۲) برای سازه‌های مختلف*

مدل پیشنهادی	(Jovanovich، ۲۰۱۲)	مد
فرکانس سازه اول		
مدل پیشنهادی	(Jovanovich، ۲۰۱۲)	مد
-33.3361+0i	-33.3361+0i	۱
-0.14732+1.6384i	-0.14732+1.6384i	۲
-1.7474+10.7672i	-1.7474+10.7672i	۳
-3.5790+31.2648i	-3.5790+31.2648i	۴
-4.5463+61.5761i	-4.5463+61.5761i	۵
فرکانس سازه دوم		
مدل پیشنهادی	(Jovanovich، ۲۰۱۲)	مد
-31.1125+0i	-	۱
-0.1280+1.7195i	-	۲
-1.6144+10.8881i	-	۳
-3.4416+31.2658i	-	۴
-4.4706+61.5368i	-	۵
فرکانس سازه سوم		
مدل پیشنهادی	(Jovanovich، ۲۰۱۲)	مد
-5.8836+0i	-	۱
-2.1262+4.1632i	-	۲
-2.7533+25.7587i	-	۳
-4.183+55.8155i	-	۴

$^{*}L = 1.8\,m . \rho = 7800\frac{kg}{m^3} . A = 0.01m^2 . I = 8.775 \times 10^{-10}m^4$

در ادامه با ارائه یک مدل عددی، عملکرد ساختمان موردبررسی قرار می‌گیرد. مدل موردنظر، یک ساختمان ۴۰ طبقه است و ارتفاع هر طبقه ۳/۵ متر می‌باشد. ساختمان دارای مهاربند بازویی در ارتفاع خود بوده و در طبقه آخر قرار دارد. مشخصات سازه و ابعاد مربوط به هسته و طول مهاربند بازویی در جدول (۲) زیر نشان داده شده است (Gamaliel، ۲۰۰۸).



شکل ۲- نما و پلان سازه

جدول ۲- مشخصات ساختمان

سطح مقطع هسته	$A = 21.76m^2$
سطح مقطع ستون‌ها	$A_c = 0.15m^2$
جرم مخصوص بتن	$\rho_c = 2400\frac{kg}{m^3}$
ممان اینرسی هسته	$I = 671.37m^4$
مدول الاستیسیته فولاد	$E_s = 2 \times 10^{11}Pa$
مدول الاستیسیته بتن	$E_c = 2.482 \times 10^{10}Pa$
طول مهاربند بازویی	$r = 16.6m$
جرم واحد طول هسته	$m = 23116\frac{kg}{m}$
جرم هسته	$M = 32.36 \times 10^5\ kg$
ارتفاع سازه	$L = 140m$
سرعت موج برشی سازه	$c = 2.68 \times 10^4\frac{m}{s}$
فرکانس طبیعی نامیرا	$\lambda = 2.37Hz$

جدول ۳- فرکانس‌های مودهای اول تا سوم به ازای نسبت سختی خمشی N=0.5, N=1, N=2 و میرایی ٪۱۰

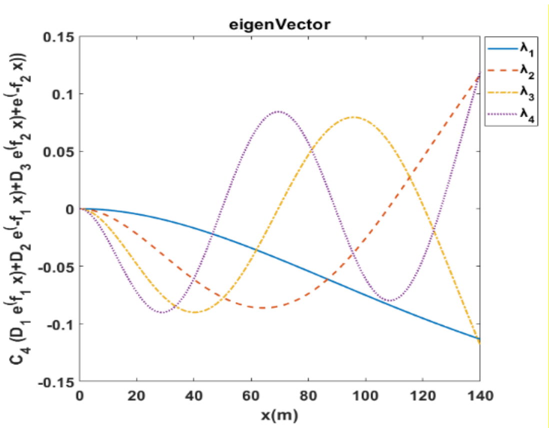
ξ	N = 2		N = 1		N = 0.5	
	Re(Hz)	Im(Hz)	Re(Hz)	Im(Hz)	Re(Hz)	Im(HZ)
۱	-۰,۱۷۴	۵,۴۰۴	-۰,۲۵۵	۵,۷۹۸	-۰,۳۰۴	۶,۲۹۸
۲	-۲,۴۷۳	۳۱,۸۶۲	-۳,۹۱۳	۳۳,۸۸۵	-۴,۱۹۷	۳۷,۲۳
۳	-۶,۷۸۵	۸۸,۱۱۲	-۸,۸۲۸	۹۴,۰۵۷	-۹,۷۳۰	۱۸۸,۱

جدول فوق مقدار ویژه فرکانس‌های اول تا سوم سیستم موردنظر را نشان می‌دهد. مقادیر ویژه بدین‌صورت محاسبه شده است:

ابتدا ماتریس ضرایب حاصله از شرایط مرزی مسئله (معادله (۱۸)) در فضای نرم‌افزار متلب کدنویسی شده است. سپس دترمینان ماتریس ضرایب محاسبه‌شده و معادله مطلوبه با جملات غیرخطی حاصل می‌گردد و با استفاده از روش عددی (مولر) معادله غیرخطی ریشه‌یابی می‌شود و ریشه‌های مختلط (فرکانس سازه در مودهای مختلف) نتیجه می‌شود.

فرکانس سیستم یک عدد مختلط بوده و دارای قسمت موهومی و حقیقی می‌باشد. در سیستم بدون میرایی قسمت حقیقی فرکانس در تمام مودهای فرکانسی برابر صفر می‌باشد در حالی‌که با اثر میرایی قسمت حقیقی دارای مقدار بوده و با افزایش طول مهار بازویی این مقدار افزایش می‌یابد. مقدار بخش حقیقی فرکانس مود دوم از فرکانس اول عدد بزرگ‌تری می‌باشد. اثر طول مهار در افزایش مقدار حقیقی فرکانسی مودهای بالاتر بیشتر می‌باشد. افزایش مقدار موهومی باعث کنترل و کاهش دامنه نوسان تغییر مکان جانبی سازه ناشی از ارتعاشات اجباری یا تحریک اولیه سازه می‌گردد. البته قدر مطلق مقادیر ویژه بزرگای فرکانس مختص مُد موردنظر بوده و کمیتی است معرف میزان سختی یا

نرمی سازه و پاسخ غالب سازه در مدهای نخست سازه با فرکانس‌های پایین‌تر نمود پیدا می‌کنند. درحالی‌که تانژانت معکوس نسبت مؤلفه‌های موهومی به حقیقی مقدار ویژه، معرف زاویه فاز حاکم بین دو مُد سازه بوده و آن کمیتی است که اختلاف فاز زمانی وقوع بین مُدها را نشان می‌دهند. به‌طور مثال اختلاف فاز π بین دو مُد سبب عملکرد مخالف هم آن‌ها می‌شود، یعنی جابه‌جایی‌های در یک مُد می‌تواند توسط جابه‌جایی‌های مُد دیگر کاسته شده و حتی خنثی شود.



شکل ۳- بردارهای مودی چهار فرکانس اول مدل به ازای طول مهار r=16.6m با میرایی ۱۰٪

۳-۲- بررسی ارتعاشات اجباری ناشی از بار هارمونیک

در این بخش، با استفاده از مقادیر ویژه و بردارهای مودی مسئله و معادله (۴۴) تغییر مکان جانبی- برش- لنگر پایه سازه تحت بارگذاری هارمونیک بررسی می‌شود. مشخصات بارگذاری هارمونیک موردنظر برای بررسی عملکرد سازه به‌صورت زیر است:

$$Q(x.t) = A\cos(\varpi t)\delta(x - x_f)$$
$$A = m \times \frac{1}{2} g . \varpi = 3\ Hz . x_f = 20\ m \qquad (۴۵)$$

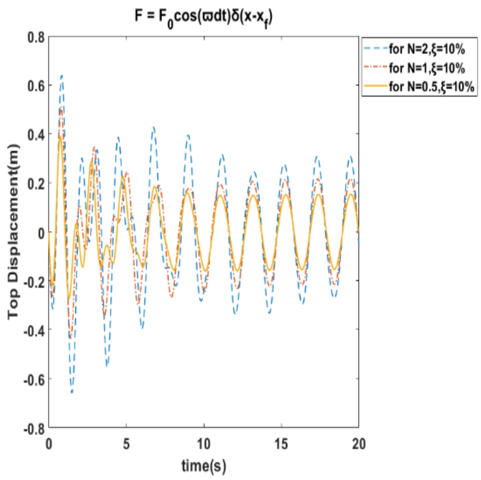
۳-۲-۱- اثر طول مهار بازویی بر ارتعاشات اجباری ناشی از بار هارمونیک

در اینجا اثر طول مهار بازویی و نسبت سختی هسته مرکزی به سختی ستون‌های پیرامونی بر کنترل تغییر مکان جانبی سازه تحت بارگذاری هارمونیک بررسی می‌شود. به این منظور مدل موردنظر به ازای طول مهار بازویی متفاوت و میرایی ثابت ۱۰٪ بررسی می‌گردد. در جدول (۴) ضریب ویسکوزیته و نسبت سختی هسته مرکزی به‌سختی ستون‌های پیرامونی و فرکانس‌های سازه در مودهای اول تا سوم ارائه گردیده است.

جدول ۴- مشخصات مدل به ازای طول مهار بازویی‌های مختلف*

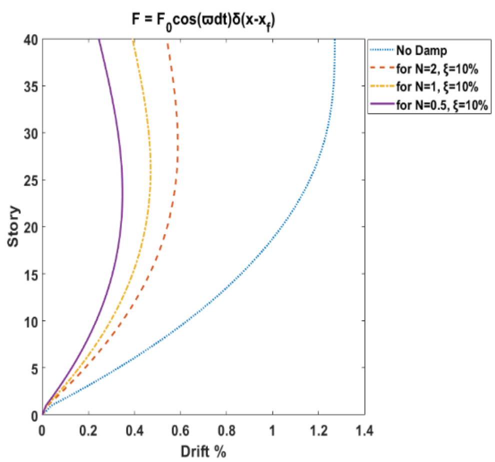
$r\ (m)$	۱۱,۷۶	۱۶,۶	۲۳,۴۷
$C_d = 2M\omega\xi \times 10^6\ \frac{Ns}{m}$	۱۵,۳۶	۱۵,۳۶	۱۵,۳۶
$C_\theta = 2r^2 C_d \times 10^8\ Nsm$	۴۲,۴۸	۸۴,۶۵	۱۶۹,۲۱
$N = \frac{E_c I}{2A_c E_s r^2}$	۲	۱	۰,۵
$r\ (m)$	۱۱,۷۶	۱۶,۶	۲۳,۴۷

*$\xi = 10\%.\ \omega = 2.37 Hz.\ m = 23116\frac{kg}{m}.\ M = 32.36 \times 10^5 kg$



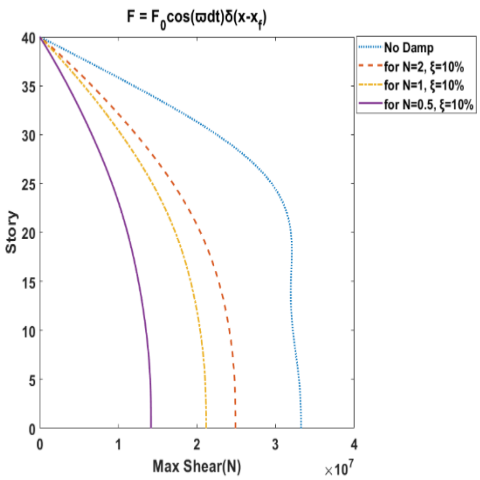
شکل ۴- تغییر مکان جانبی بام برای نسبت سختی خمشی N=0.5, N=1, N=2 و میرایی ۱۰٪ تحت بار هارمونیک

با توجه به شکل، تغییر مکان جانبی بیشینه به ازای مقادیر N=1، N=2، N=0.5 به‌ترتیب برابر ۰/۶۵۹ و ۰/۵۱ و ۰/۳۹۰ متر می‌باشد. در واقع با افزایش طول مهار بازویی و به‌علت کاهش نسبت سختی هسته مرکزی به ستون پیرامونی کاهش قابل‌توجهی در تغییر جانبی سازه مشاهده می‌شود.



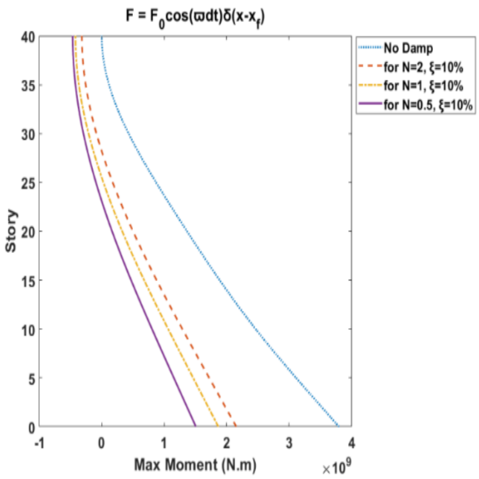
شکل ۵- درصد جانبی نسبی طبقات برای نسبت سختی خمشی N=1، N=2، N=0.5 و میرایی ۱۰٪

جابه‌جایی نسبی حداکثر به ازای میرایی N=2 و N=1 و N=0.5 به‌ترتیب برابر .۵۸۸۲٪ و ۰/۴۶۹۹٪ و ۰/۳۴۷۹٪ و برای سیستم بدون میرایی ۰/۲۷٪ می‌باشد. افزایش طول مهار بازویی و کاهش نسبت سختی هسته مرکزی به ستون‌های پیرامونی تأثیر زیادی در کاهش جابه‌جایی نسبی سازه در مقایسه با سیستم بدون میراگر دارد.



شکل ۶- بیشینه برش طبقات به ازای نسبت سختی خمشی (N=0.5, N=1, N=2) و میرایی ۱۰٪

برش پایه سیستم بدون دمپر در مقایسه با سیستم با حضور میراگر و سختی ستون‌های پیرامونی عدد بزرگ‌تری است. با توجه به شرایط مرزی مسئله باید برش در طبقه بام برابر صفر باشد که همین‌طور است.



شکل ۷- بیشینه لنگر طبقات به‌ازای نسبت سختی خمشی N=1، N=2، N=0.5 و میرایی ۱۰٪

شکل (۷) همان‌طور که مشخص است لنگر پایه سیستم بدون دمپر[18] در مقایسه با سیستم با حضور میراگر و سختی ستون‌های پیرامونی عدد بزرگ‌تری و برابر $3.8 \times 10^9 \mathrm{N.m}$ می‌باشد. لنگر پایه به ازای مقادیر N=1، N=2، N=0.5 با میرایی ۱۰٪ به‌ترتیب برابر $2.156 \times 10^9 \mathrm{N.m}$، $1.869\times 10^9 \mathrm{N.m}$ و $1.509 \times 10^9 \mathrm{N.m}$ می‌باشد. بیشینه لنگر در طبقه بام برای سیستم بدون میرایی با توجه به شرایط مرزی مسئله صفر بوده، درحالی‌که برای سیستم با مهار بازویی و میراگر برابر با لنگر مقاوم ایجادشده توسط سختی ستون‌های پیرامونی و میراگر می‌باشد.

جدول ۵- مقایسه درصد کاهش جابه‌جایی نسبی جانبی و برش و لنگر طبقات به ازای مقادیر نسبت سختی با میرایی ۱۰ درصد

نسبت سختی خمشی	درصد کاهش دریفت[19] نسبت به حالت بدون میرایی	درصد کاهش برش بیشینه نسبت به حالت بدون میرایی	درصد کاهش لنگر بیشینه نسبت به حالت بدون میرایی
N = 2	٪۵۳	٪۲۶	٪۴۳
N = 1	٪۶۳	٪۳۷	٪۵۱
N = 0.5	٪۷۲/۵	٪۵۸	٪۵۹

مطابق جدول فوق افزایش طول مهار بازویی تأثیر قابل‌توجهی در کاهش مقادیر برش و لنگر و پایه و جابه‌جایی نسبی طبقات دارد.

۳-۲-۲- اثر بار محوری ناشی از جرم هسته مرکزی و ستون‌های پیرامونی بر ارتعاشات اجباری ناشی از بار هارمونیک

همانند فرکانس و مود شکل و جابه‌جایی سازه، نیروی محوری نیز پارامتری مؤثر بر رفتار دینامیک سازه می‌باشد. در این بخش اثر نیروی محوری بر فرکانس و جابه‌جایی نسبی سازه موردبررسی قرار می‌گیرد. نیروی وزن که متشکل از هسته مرکزی و ستون‌های پیرامونی می‌باشد به این صورت محاسبه می‌شود و اثرش به‌صورت بار محوری در طبقه بام بر روی سازه اعمال می‌گردد. نیروی محوری سازه به این صورت محاسبه می‌شود.

نیروی محوری ناشی از وزن هسته مرکزی:

$$p_1 = \mathrm{M} \times \mathrm{g} = 3.1735 \times 10^7 N$$

نیروی محوری ناشی از وزن ستون‌های پیرامونی:

$$p_2 = 2\rho A_c L g = 3.2124 \times 10^6 N$$

نیروی محوری کل سازه:

$$\mathrm{p} = 3.4947 \times 10^7 N$$

18. Damper

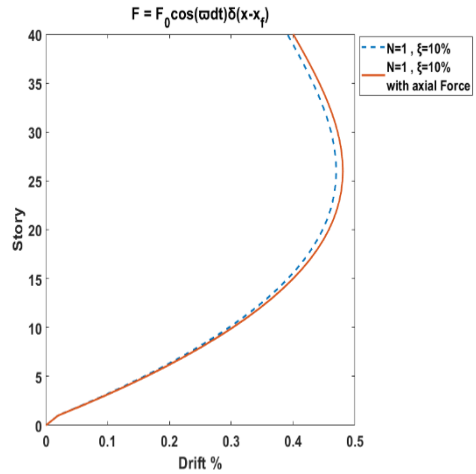
19. Drift

جدول ۶- فرکانس‌های مودهای اول تا سوم به ازای طول مهار بازویی r=16.6m و میرایی ۱۰٪ با اثر نیروی محوری*

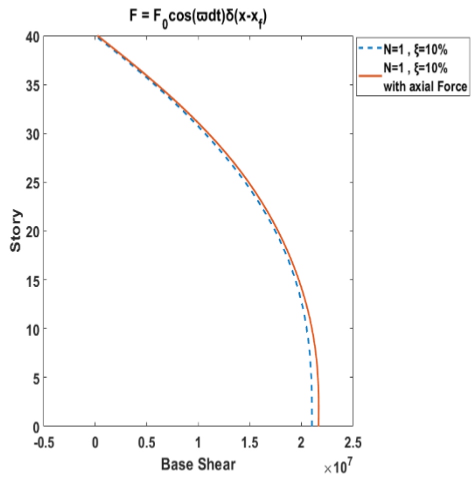
مد	Re(Hz)	Im (Hz)
۱	-۰٫۲۵۷۰۳۰	۵٫۷۴۸۹۳۰
۲	-۳٫۹۲۳۶۸۲	۳۳٫۸۱۹۴۰
۳	-۸٫۸۳۹۱۴۸	۹۴٫۰۰۱۳۸

*$r = 16.6\ m.\ \xi = 10.\ p = 3.4947 \times 10^7 N$

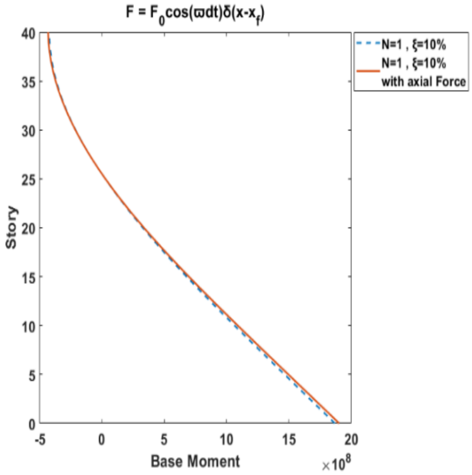
با مقایسه جدول (۳) و (۶) مشخص است که لحاظ نیروی محوری باعث تغییرات در فرکانس مودهای مختلف می‌گردد.



شکل ۸- درصد جابه‌جایی نسبی طبقات برای میرایی ۱۰٪ و نسبت خمشی N=1 بدون نیروی محوری و با اثر نیروی محوری



شکل ۹- برش طبقات برای میرایی ۱۰٪ و نسبت خمشی N=1 بدون نیروی محوری و با اثر نیروی محوری



شکل ۱۰- لنگر طبقات برای میرایی ۱۰٪ و نسبت خمشی N=1 بدون نیروی محوری و با اثر نیروی محوری

جدول ۷- مقایسه برش و لنگر بیشینه و جابه‌جایی نسبی جانبی سازه در حالت اثر بار محوری تحت بارگذاری هارمونیک

	M_{max}	V_{max}	$Drift_{max}$
بدون نیروی محوری	۱٫۸۶۹	۲۱٫۰۳	٪۰٫۴۶۹
با اثر نیروی محوری	۱٫۹۰۳	۲۱٫۶۷	٪۰٫۴۸۱
درصد اختلاف	٪۱٫۷۹	٪۲٫۹۵	٪۲٫۴۹

مطابق جدول (۷) لحاظ اثر محوری (ناشی از وزن محاسبات) در محاسبات، باعث افزایش مقادیر برش و لنگر بیشینه و جابه‌جایی نسبی طبقات می‌گردد.

۴- نتیجه‌گیری

پژوهش انجام‌شده پیرامون تحلیل سیستم هسته مرکزی با مهاربند بازویی و میراگر ویسکوز با اثر نیروی محوری بر مبنای روش نیمه‌تحلیلی سری فوریه با تعریف اپراتور دیفرانسیلی در فضای هیلبرت است. اهم نتایج به‌دست آمده در این تحقیق، به شرح زیر است:

۱) اغلب پژوهش‌های پیشین بر مبنای روش‌های عددی استوار بود. درحالی‌که در این پژوهش از روش نیمه‌تحلیلی برای حل معادله حاکم استفاده شده است. این روش دقت بیشتری دارد. همچنین روابط صریحی برای محاسبه بردارهای مودی و تغییر مکان جانبی سازه به‌دست آمده است.

۲) افزایش طول مهار بازویی باعث کاهش نسبت سختی خمشی هسته مرکزی به ستون‌های پیرامونی گردید. این راهکار برای کاهش و کنترل جابه‌جایی نسبی طبقات مطلوب است.

۳) نتایج تحلیل سازه موردبررسی نشان داد که افزایش درصد میرایی میراگر ویسکوز تأثیر قابل‌ملاحظه‌ای در کاهش جابه-جایی نسبی جانبی طبقات و برش پایه و لنگر پایه تحت بار

هارمونیک داشته است. به‌گونه‌ای که افزایش میرایی می‌تواند تا ۶۵ درصد تغییر مکان جانبی طبقات را در این سازه کاهش دهد.

۴) لحاظ نمودن نیروی محوری (ناشی از وزن هسته مرکزی و ستون‌های پیرامونی) با افزایش قسمت حقیقی و کاهش قسمت موهومی فرکانس‌های مودهای سیستم همراه است. بنابراین چون در سازه‌های بلند اثر مودهای ابتدایی بر رفتار سازه مؤثرتر است، افزایش مقدار بخش موهومی فرکانس چون مقادیر ویژه مودهای بالاتر با همراه می‌باشد. افزایش مقدار موهومی باعث کنترل و کاهش دامنه نوسان تغییر مکان جانبی سازه ناشی از ارتعاشات اجباری یا تحریک اولیه سازه می‌گردد.

۵) لحاظ اثر نیروی محوری در معادله مربوطه باعث تفاوت ۲/۵٪ تغییر مکان جانبی نسبی طبقات و ۳٪ در برش پایه و ۲٪ لنگر پایه تحت بارگذاری هارمونیک شده است.

البته جهت تعمیم و کلیت یافتن این نتایج لازم است که سازه‌های متنوعی بررسی و با مدل پیشنهادی این مقاله تحلیل گردند.

۵- مراجع

Chen Y, McFarland DM, Wang Z, Spencer Jr, B.F. Bergman LA, “Analysis of tall buildings with damped outriggers”, Journal of Structural Engineering, 2010, 136 (11), 1435-1443.

Chopra AK, “Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering”, Prentice Hall. Inc., Upper Saddle River, NJ, 1995.

CTBUH O, Outrigger Design for High-Rise Buildings, 2012.

Deng K, Pan P, Lam A, Xue Y, “A simplified model for analysis of high-rise buildings equipped with hysteresis damped outriggers”, The Structural Design of Tall and Special Buildings, 2014, 23 (15), 1158-1170.

Farzad K, Gholizadeh S, “Layout Optimization of Outrigger Braced System in Steel Tall Structures Using Meta-Heuristic Algorithms”, Journal of Civil and Environmental Engineering, 2019, 51 (103), 95-105.

Gamaliel R, “Frequency-based response of damped outrigger systems for tall buildings” Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 2008.

Jovanovic V, “A Fourier series solution for the transverse vibration response of a beam with a viscous boundary”, Journal of Sound and Vibration, 2011, 330 (7), 1504-1515.

Jovanovic V, “A Fourier series solution for the transverse vibration of a clamped beam with a torsional damper at the boundary”, Journal of Vibration and Control, 2012, 18 (3), 344-356.

Muller DE, “A method for solving algebraic equations using an automatic computer”, Mathematical tables and other aids to computation, 1956, 10 (56), 208-215.

Mulligan KJ, Experimental and analytical studies of semi-active and passive structural control of buildings, 2007.

Naimark MA, Linear Differential Operators, Part 1, Frederick Ungar Publ, 1967, Co., New York, 196-6.

O'Neill JC, “Application of damping in high-rise buildings (Doctoral dissertation”, Massachusetts Institute of Technology), 2006.

Smith RJ, Willford MR, “The damped outrigger concept for tall buildings”, The structural design of tall and special buildings, 2007, 16 (4), 501-517.

Spencer Jr BF, Nagarajaiah S, “State of the art of structural control”, Journal of Structural Engineering, 2003, 129 (7), 845-856.

Symans MD, Constantinou MC, “Semi-active control systems for seismic protection of structures: a state-of-the-art review”, Engineering Structures, 1999, 21 (6), 469-487.

Tan P, Fang CJ, Tu WR, Zhou FL, Wang Y, Jiang M, “September Experimental study on the outrigger damping system for high-rise building”, In Proceedings in the 15th World Conference on Earthquake Engineering, Lisbon, Portugal, 2012.

University of Tabriz

Journal of Civil and Environmental Engineering
Volume 52 (2022), Issue 1 (Spring), 109-119

EXTENDED ABSTRACT

Analysis of Behavioral Damped Outrigger in Tall Structures by Fourier Method in Hilbert Space

AmirHossein Taherkhani [a], Majid Amin Afshar [b,*]

[a] *Structural Engineering, Department of Civil Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran*
[b] *Department of Civil Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran*

Received: 13 November 2019; **Accepted:** 19 October 2020

Keywords:
Tall structure, Structural control, Structural dynamics, Outrigger-braced, Hilbert space.

1. Introduction

Achieving efficient methods to protect the structure against forces such as wind and earthquake is one of the first steps in the design of structures and has led to the provision of structural control systems. Structural control systems include three systems, active control, passive control and semi-active control. (Spencer Jr et al. 2003), (Mulligan et al. 2007). The outrigger system with the viscous damper, was proposed by, (Gamaliel, 2008) and its effect on tall structures was investigated, (O'Neill, 2006) showed that the use of damper and increasing damping in the outrigger system in proportion to increasing the stiffness and dimensions of the structure. (Farzad et al. 2019) has also used ultrasonic algorithms to determine the optimal position of outrigger system in tall steel frames. Experimental and analytical researches also show that the use of outrigger system is effective in reducing the lateral displacement of tall structures. (Tan et al. 2012), (Deng et al. 2014).

(Jovanovich, 2011) Used the Fourier series method in Hilbert space to investigate the transverse vibrations of the beam with boundary conditions of linear viscosity.

In this paper, the vibrations of the structure and the effect of central core system with the damped arm brace using axial load (due to the mass of the central mass) in the control of lateral displacement due to harmonic loading are investigated. Previous studies have not considered the effect of perimeter columns stiffness and the effect of axial force on frequencies and lateral displacement of the structure, and for solving the partial differential equation governing the problem, the Fourier series method is used to define the differential operator in Hilbert space.

2. Methodology

2.1. Central core system with outrigger and viscous damper with axial load effect

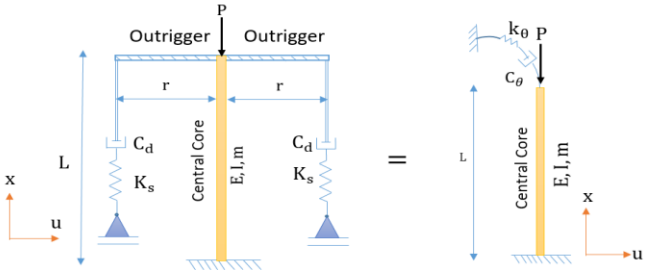


Fig 1. Central core system with outrigger and viscous damper with axial force effect

* Corresponding Author
E-mail addresses: a.taherkhani@edu.ikiu.ac.ir (AmirHossein Taherkhani), mafshar@eng.ikiu.ac.ir (Majid Amin Afshar).

$$\frac{\partial^2 u(x.t)}{\partial^2 t} + k^2 \frac{\partial^2 u(x.t)}{\partial^2 x} + c^2 \frac{\partial^4 u(x.t)}{\partial^4 x} = q(x.t) \tag{1}$$

Equation (1) is the differential equation of buckling of a console-beam in dynamic mode with axial load effect. In relation (1) (t) represents time, (u) is the displacement of the core, $q(x,t)$ is the shear force per unit on the core .

In the equation (1) $k^2 = \frac{P}{m}, c^2 = \frac{EI}{m}$.

The boundary conditions of the problem are as follows:

$$u(0.t) = 0. \frac{\partial u(0.t)}{\partial x} = 0. \frac{\partial^2 u(L.t)}{\partial^2 x} = -h_2 \frac{\partial u(L.t)}{\partial x} - h_1 \frac{\partial^2 u(L.t)}{\partial x \partial t}. \frac{\partial^3 u(L.t)}{\partial^3 x} = -h_3 \frac{\partial u(L.t)}{\partial x} \tag{2}$$

In the equation $h_1 = \frac{k_\theta}{EI}, h_2 = \frac{C_\theta}{EI}. h_3 = \frac{p}{EI}, C_\theta = 2r^2 C_d. K_\theta = 2r^2 K_s$. According to Riley's theory: $C_d = 2M\omega\xi$. The initial conditions of the problem are as follows:

$$u(x.0) = f(x). \frac{\partial u(x.0)}{\partial t} = g(x) \tag{3}$$

Using the variable separation technique, differential equation (1) is written in the form of equation (4) and boundary conditions (2) are written in the form of equation (5).

$$c^2 \frac{d^4 \varphi(x)}{d^4 x} + k^2 \frac{d^2 \varphi(x)}{d^2 x} + \lambda^2 \varphi(x) = 0 \tag{4}$$

$$\varphi(0) = 0. \frac{d\varphi(0)}{dx} = 0. \frac{d^2 \varphi(L)}{d^2 x} = (-h_1 \lambda - h_2) \frac{d\varphi(L)}{dx}. \frac{d^3 \varphi(L)}{d^3 x} = -h_3 \frac{d\varphi(L)}{dx} \tag{5}$$

The roots of the equation (relation (6)) of the linear differential are calculated.

$$f_{1.3} = \pm \sqrt{\frac{-k^2 + \sqrt{k^4 - 4c^2\lambda^2 i}}{2c^2}}. f_{2.4} = \pm \sqrt{\frac{-k^2 - \sqrt{k^4 - 4c^2\lambda^2 i}}{2c^2}} \tag{6}$$

The relation of (7) eigenvectors is a problem and is established for different eigenvalues.

$$\varphi(x) = C_4 (D_1 e^{f_1 x} + D_2 e^{-f_1 x} + D_3 e^{f_2 x} + e^{-f_2 x}) \tag{7}$$

Equation (8) defines $T = \begin{pmatrix} 0 & -c^2 \frac{\partial^3}{\partial^3 x} - k^2 \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}$ as the orthogonal operator and $T^* = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ c^2 \frac{\partial^3}{\partial^3 x} + k^2 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}$ as the orthogonal operator conjugate in Hilbert space and the principle of interval multiplication of vectors .The coefficient C_4 is calculated to calculate eigenvectors for eigenvalue.

$$C_4 = \frac{1}{\sqrt{\int_0^L \left[\phi_n^2(x)\lambda_n^2 + \left(c^2 \phi'''_{1.n}(x) + k^2 \phi'_{1.n}(x)\right)\left(\phi'_{1.n}(x)\right)\right] dx}} \tag{7}$$

Equation (9) is the lateral displacement equation of the central, and the first expression is the response of the system to the free vibration of the initial excitation is the response to the forced vibrations due to harmonic loading.

$$u(x.t) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \{\int_0^L [g(\xi) + \lambda_r f(\xi)]\, u_{1.r}(\xi) d\xi\} \frac{u_{1.r}(x) e^{\lambda_r t}}{\lambda_r} + \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{u_{1.r}(x)}{\lambda_r} \int_0^t e^{\lambda_r (t-\tau)} \int_0^L Q(\xi.\tau) u_{1.r}(\xi) d\xi d\tau \tag{9}$$

3. Results and discussion

3.1. Investigation of forced vibrations caused by harmonic loading

Here, by presenting a numerical model, the forced vibrations of a 40-story building and the height of each floor are 3 meters, under the harmonic load as follows.

$$Q(x.t) = A cos(\varpi t) \delta(x - x_f). A = m \times \frac{1}{2} g. \varpi = 3\ Hz\ . x_f = 20\ m \tag{10}$$

3.1.1. Effect of axial load due to mass of central ore and perimeter columns on forced vibrations due to harmonic load

In this section, the effect of axial force on relative displacement is investigated. The weight force, which consists of the central core and the surrounding columns, is calculated in this way and the effect is applied as an axial load on the roof on the structure.

Table 1. Model specifications for different outrigger lengths

For: $\xi = 10\%. \omega = 2.37\text{Hz}. m = 23116\frac{kg}{m}. M = 32.36 \times 10^5\text{kg}. p = 3.4947 \times 10^7\text{N}$			
	$r = 11.76\text{m}$	$r = 16.6\text{m}$	$r = 23.47\text{m}$
C_d	$15.36 \times 10^6 \frac{Ns}{m}$	$15.36 \times 10^6 \frac{Ns}{m}$	$15.36 \times 10^6 \frac{Ns}{m}$
C_θ	$42.48 \times 10^8\text{Nsm}$	$84.65 \times 10^8\text{Nsm}$	169.21×10^8 Nsm
$N = \frac{E_c I}{2A_c E_s r^2}$	2	1	0.5

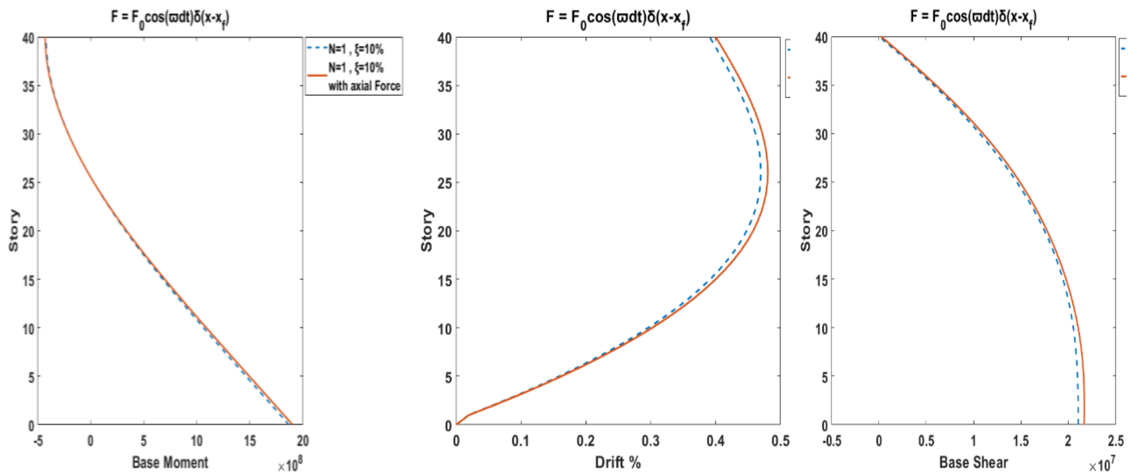


Fig. 1. Comparative displacement and moment and shear diagrams for damping 10% and flexural ratio N=1 with axial force effect

Table 1. Compression of maximum shear and moment and comparative lateral displacement of the structure in axial load effect mode under loading

For $N = 1. \xi = 0.1$	$Drift_{max}$	V_{max}	M_{max}
No axial load (P=0)	0.469%	21.03MN	1.869 GN
With axial load	0.481%	21.67MN	1.903 GN
Percentage difference	2.49 %	2.95%	1.79 %

According to the above figure and table, it is clear that considering the effect of axial force has increased the maximum values of comparative displacement and moment and shear the base of the floors in the building.

4. Conclusions

The research is based on the analysis of the central core system with outrigger and viscous damper with axial force effect base on the Fourier series semi-analytical method, which is defined by the differential operator in Hilbert space.

1) Increasing the arm restraint length, which reduces the stiffness ratio of the central core to the surrounding columns, is a good way to reduce and control the relative displacement of the floors.
2) Applying of axial force (due to the weight of the central core to the surrounding columns) is associated with an increase in the imaginary part of the system mode frequencies.

3) Applying of axial force in the relevant equation has caused a difference of 2.5% relative lateral displacement of the floors and 3 % in the base shear and 2% in the base moment under harmonic loading

5. References

Deng K, Pan P, Lam A, Xue Y, “A simplified model for analysis of high-rise buildings equipped with hysteresis damped outriggers”, The Structural Design of Tall and Special Buildings, 2014, 23 (15), 1158-1170.

Farzad K, Gholizadeh S, “Layout Optimization of Outrigger Braced System in Steel Tall Structures Using Meta-Heuristic Algorithms”, Journal of Civil and Environmental Engineering, 2019.

-. doi: 10.22034/jcee.2019.9478

Gamaliel R, “Frequency-based response of damped outrigger systems for tall buildings (Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology)”.

Jovanovic V, “A Fourier series solution for the transverse vibration response of a beam with a viscous boundary”, Journal of Sound and Vibration, 330 (7), 1504-1515.

Mulligan KJ, “Experimental and analytical studies of semi-active and passive structural control of buildings”, 2007.

O'Neill JC, “Application of damping in high-rise buildings (Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology)”, 2006.

Spencer Jr, BF, Nagarajaiah S, “State of the art of structural control”, Journal of structural engineering, 129 (7), 845-856.