

نقش طول گام بر همگرایی روش مرتبه اول قابلیت اعتماد سازه‌ها

بهر روز کشته‌گر *

استادیار گروه مهندسی عمران، دانشگاه زابل

چکیده

جهت تخمین احتمال خرابی سازه‌ها رویه اولین مرتبه قابلیت اعتماد، کاربرد وسیعی دارد که بر اساس رویه تکرار ریاضی با هدف تعیین شاخص قابلیت اعتماد سازه‌ها و یا نقطه حداکثر محتمل پایه‌گذاری شده است. روش معمول اولین مرتبه قابلیت اعتماد (هاسوفر-لیند و رکویتز-فسلر) در مسائل غیر خطی با توابع عملکرد پیچیده برای یک سازه ممکن است موجب ناپایداری حل به صورت نوسانی و حل مغشوش گردد. در مقاله حاضر یک رویه تکرار ریاضی جدید بر اساس انتخاب طول گام متناهی در تحلیل مرتبه اول سازه‌ها ارائه شده است. طول گام رویه تکرار با استفاده از قاعده امتداد جستجوی Armijo بسط داده شده که در هر تکرار شرط شیب جهت تضمین همگرایی لحاظ شده است. عملکرد رویه تکرار ارائه شده اولین مرتبه قابلیت اعتماد سازه‌ها بر اساس قاعده انتخاب طول گام دینامیکی با شرایط شیب به کمک چندین مثال سازه‌ای بر گرفته از مراجع ارزیابی شده و نتایج همگرایی رویه ارائه شده با روش هاسوفر-لیند و رکویتز-فسلر، رویه طول گام متناهی ثابت برابر با ۱۵ مقایسه گردیده است. نتایج حاکی از آن هستند که رویه تکرار ارائه شده توانمندی بسیار بالایی در تحلیل قابلیت اعتماد سازه‌ها نسبت به روش هاسوفر-لیند و رکویتز-فسلر دارد. همچنین، نقش انتخاب طول گام در کارایی و همگرایی الگوریتم ارائه شده حائز اهمیت است و کارایی آن در مسائل غیر خطی بیشتر از روش طول گام متناهی و روش تعدیل اولین مرتبه قابلیت اعتماد می‌باشد.

واژگان کلیدی: قابلیت اعتماد سازه‌ها، طول گام متناهی، اولین مرتبه قابلیت اعتماد، احتمال خرابی.

۱- مقدمه

متغیرهای تصادفی پایه مسأله $(X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\})$ می‌باشد. $f_X(X)$ تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی پایه است. هدف اصلی تحلیل قابلیت اعتماد سازه‌ها تخمین انتگرال چندگانه رابطه (۱) در ناحیه خرابی $(g(X) \leq 0)$ می‌باشد. حل بسته انتگرال فوق با وجود چندین متغیر تصادفی پایه و نیز تابع حالت حدی غیر خطی مشکل است [۴، ۵] جهت رفع مشکل محاسبه انتگرال چندگانه فوق از روش‌های شبیه‌سازی [۶] و روش‌های تخمین ریاضی مبتنی بر تکرار مانند روش‌های اولین مرتبه [۷] و دومین مرتبه [۸] قابلیت اعتماد سازه‌ها استفاده گردیده است. برآورد احتمال خرابی با استفاده از روش‌های شبیه‌سازی در مسائل غیرخطی با توابع عملکرد ضمنی با توجه به زمان تحلیل بالا و همچنین برآورد احتمال خرابی پایین [۵، ۹] که، منجر به افزایش تعداد شبیه‌سازی می‌گردد، بسیار وقت‌گیرتر از روش‌های تخمین احتمال به کمک روش‌های تکرار ریاضی می‌باشد. لذا این روش‌ها از کاربرد کمتری نسبت به روش‌های تکرار ریاضی برخوردار هستند. روش اولین مرتبه قابلیت اعتماد جهت تخمین احتمال خرابی کاربرد وسیعی داشته و با هدف تعیین نقطه حداکثر محتمل (محاسبه شاخص قابلیت اعتماد) پایه‌گذاری شده و تخمین مناسبی از انتگرال فوق ارائه می‌دهد $(P_f \approx \Phi(-\beta))$ [۲-۵]. تعریف هندسی

احتمال خرابی سازه‌های مهندسی، با توجه به عدم اطمینان در مقادیر بار و مقاومت با استفاده از رویه تحلیل قابلیت اعتماد و یا حساسیت قابل تخمین می‌باشد. در تحلیل حساسیت، میزان تأثیر هر متغیر تصادفی بر احتمال خرابی سازه برآورد شده اما در تحلیل قابلیت اعتماد، احتمال خرابی بر اساس عدم اطمینان متغیرهایی همچون ابعاد سازه، شرایط مرزی، مقاومت، بارهای وارده و نیز خواص مصالح برآورد می‌گردد [۱، ۲]. تئوری قابلیت اعتماد سازه‌ها یک ابزار توانمند جهت ارزیابی کارایی یا عدم کارایی یک سازه تحت بارهای وارده با استفاده از تخمین احتمال خرابی به شمار می‌آید [۳]. احتمال خرابی را می‌توان با استفاده از رویه اولین مرتبه قابلیت اعتماد، به صورت رابطه زیر تخمین نمود [۳، ۴]:

$$P_f = \int_{g(X) \leq 0} \dots \int f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \approx \Phi(-\beta) \quad (1)$$

که در آن β شاخص قابلیت اعتماد، Φ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد، $g(X)$ تابع حالت حدی بیانگر مرز خرابی $g(X) \leq 0$ و سلامتی $g(X) > 0$ سازه که متشکل از

خطی [۹] بهبود بخشیدند که در مسائل غیر خطی و پیچیده باعث افزایش کارایی و پایداری عددی روش HL-RF شده است. جهت محاسبه شاخص قابلیت اعتماد در الگوریتم‌های تکرار فوق نیاز به محاسبات پیچیده بوده (رویه گرادیان مزدوج [۹] و رویه تعدیل [۱۳]) و نیز در مواردی تعداد تکرار روش انتقال پایدار [۱۱] و رویه اصلاح شده HL-RF [۴، ۱۰، ۱۳] جهت همگرایی نسبت به رویه HL-RF در مسائل سازه‌ای با درجه غیر خطی پایین نیز افزایش می‌یابد.

در این مقاله، یک رویه تکرار جهت تخمین شاخص قابلیت اعتماد سازه‌ها بر اساس یک امتداد جستجوی جدید با طول گامی متناهی ارائه شده است. جهت تعیین امتداد جستجو با طول گام متناهی نیاز به محاسبات پیچیده و وقت‌گیر نیست. لذا رویه امتداد جستجوی متناهی^۲ ارائه شده، به سادگی روش HL-RF می‌باشد. بردار حساسیت رویه تکرار ارائه شده بر اساس نتایج همگرایی نقطه قبلی طراحی با استفاده از طول گام متناهی^۳ تعریف شده است. در این روش تکرار، یک طول گام متناهی^۳ (FS) بر اساس درجه غیر خطی و نیز قاعده انتخاب امتداد جستجوی Armijo بنا نهاده شده و بر اساس شرایط شیب^۴ این طول گام متناهی تنظیم شده و همگرایی تکرارهای متوالی کنترل گردیده است. رویه تکرار متناهی طول گام نسبت به الگوریتم HL-RF نتایج پایداری در مسائل حالت حدی غیر خطی ارائه داده و توانمندی بسیار بالاتری نسبت به روش HL-RF داشته است. استفاده از طول گام متناهی موجب می‌شود که الگوریتم طول گام متناهی با تعداد تکرار کمتری نسبت به روش HL-RF (بدون قاعده انتخاب طول گام) در مسائل غیر خطی همگرا گردد.

۲- روش اولین مرتبه قابلیت اعتماد

رویه تکرار اولین مرتبه قابلیت اعتماد سازه‌ها جهت جستجوی نقطه حداکثر محتمل و تخمین احتمال خرابی، شامل سه گام اساسی می‌باشد:

گام اول: تعریف تابع حالت حدی، خواص آماری متغیرهای

تصادفی پایه و پارامترهای الگوریتم تکرار

گام دوم: انتقال متغیرهای تصادفی در فضای نرمال

استاندارد و جستجوی نقطه حداکثر محتمل مطابق با یک رویه تکرار

شاخص قابلیت اعتماد (β) به صورت حداقل فاصله سطح خرابی تا مبدأ در فضای نرمال استاندارد است [۳، ۹]:

$$\beta = \min (U^{*T} \cdot U^*)^{1/2} \quad (2)$$

subject to : $g(U^*) = 0$

در این رابطه، نقطه $U^*(u_1, u_2, \dots, u_n)$ نقطه‌ای روی سطح خرابی در فضای نرمال استاندارد است که حداقل فاصله را تا مبدأ دارد و به عنوان نقطه حداکثر محتمل تعریف می‌شود. جهت تعیین نقطه حداکثر محتمل روش‌های تکرار ریاضی مانند، روش گرادیان [۱۰]، روش گرادیان مزدوج [۹]، رویه ضرایب لاگرانژ [۱۰] و برنامه‌ریزی غیر خطی [۱۰] در تحلیل مرتبه اول قابلیت اعتماد استفاده شده است. عموماً، رویه تکرار هاسوفر-لیند و رکویتز-فسلر^۱ (HL-RF) بر گرفته از روش بهینه‌یابی برنامه‌ریزی غیرخطی بوده [۱۰، ۱۱] و کاربرد فراوانی در تحلیل قابلیت اعتماد سازه‌ها دارد [۵]. این رویه تکرار در مسائل تقریباً خطی عملکرد مناسبی داشته و سرعت همگرایی بالایی نسبت به الگوریتم‌های بهینه‌سازی گرادیان و گرادیان مزدوج از خود نشان داده است [۴، ۱۱] اما، در توابع حالت حدی بسیار غیر خطی و یا توابع عملکرد پیچیده، همگرایی این رویه ممکن است به کندی و یا همراه با نوسان و اغتشاش باشد [۹، ۱۱]. روش‌های بهبود یافته HL-RF به منظور افزایش توانمندی و کارایی در تحلیل قابلیت اعتماد توسط مراجع مختلف ارائه و قدرتمندی آن‌ها به کمک چندین مثال عددی مقایسه شده است [۴، ۹-۱۳]. یک تابع شایسته جهت نمایش همگرایی رویه تکرار HL-RF توسط Liu و Kiureghian در الگوریتم بهبود یافته HL-RF معرفی شد [۱۰]. رویه بهبود یافته HL-RF [۱۰] به کمک طول گام انتخاب شده بر اساس قاعده Armijo توسط Santosh و همکاران اصلاح شده است [۴] که طول گام محاسبه شده عددی بین صفر و یک انتخاب گردیده است. توانمندی الگوریتم HL-RF با استفاده از روش انتقال پایدار مبتنی بر تئوری اغتشاشات توسط Yang بهبود داده شد [۱۱]. همچنین، Gong و Yi بر اساس تعریف یک طول گام بزرگ، الگوریتم تکراری پایه‌گذاری نمودند که در مسائل غیر خطی پاسخ‌های پایداری نسبت به رویه HL-RF نشان داده است [۱۲]. در سال‌های اخیر Keshtegar و Miri روش HL-RF را بر مبنای یک رویه تعدیل [۱۳] و همچنین روش جستجوی گرادیان مزدوج غیر

2- Finite-line search
3- Finite-step size (FS)
4- Descent condition

1- Hasofer and Lind-Rackwitz and Fiessler (HL-RF)

که در آن، U^λ بردار متناهی متغیرهای تصادفی است که به صورت رابطه زیر تعریف می‌گردد:

$$U_{k+1}^\lambda = U_k^{FS} - \lambda_k \nabla g(U_k) \quad (۸)$$

که در آن λ مقدار طول گام متناهی است که یک عدد بسیار بزرگ انتخاب می‌گردد ($\lambda \gg 0$) و مقدار شاخص قابلیت اعتماد رابطه (۶) مطابق با روابط (۴) و (۵) به صورت زیر بازنویسی گردیده است:

$$\beta_{k+1} = \frac{g(U_k) - \nabla^T g(U_k) U_k}{\nabla^T g(U_k) \alpha_{k+1}^\lambda} \quad (۹)$$

مطابق با رابطه تکرار (۶) و رویه تکرار HL-RF رابطه (۳) مشخص است که اختلاف این دو رویه تکرار در محاسبه بردار حساسیت متغیرهای تصادفی روابط (۵) و (۷) می‌باشد. در رویه طول گام متناهی جهت محاسبه بردار حساسیت، از یک طول گام بزرگ ($\lambda \gg 0$) استفاده شده است. اگر طول گام متناهی برابر با $\lambda = 0$ باشد آن‌گاه، در رویه تکرار فوق نقطه جدید طراحی بر نقطه قبلی آن منطبق شده و یا به عبارتی تکرارهای الگوریتم فوق مشابه یکدیگر است. این بدان معناست که الگوریتم فوق به کندی همگرا شده و یا همگرایی ناپهنگام داشته است. اگر $\lambda \rightarrow \infty$ در این صورت با توجه به مقایسه دو رابطه (۵) و (۷) مقدار بردار حساسیت الگوریتم ارائه شده مطابق با رویه HL-RF نتیجه می‌شود. لذا الگوریتم تکرار طول گام متناهی در مسائل غیرخطی ممکن است مشکلات همگرایی مشابه با رویه HL-RF همچون همگرایی نوسانی و مغشوش، داشته باشد. جهت اجتناب از انتخاب نامناسب طول گام متناهی (λ) مقدار اولیه این طول گام بر اساس قاعده Armijo انتخاب گردیده و بر اساس ارضای شرایط شیب در هر تکرار، مقدار طول گام بهبود بخشیده شده است.

۳- قاعده انتخاب طول گام متناهی

همان طوری که اشاره شد، اگر طول گام متناهی بزرگ‌تر از مقدار حداکثرش انتخاب گردد ($\lambda > \lambda_{\max}$)، ممکن است تعداد تکرار زیادی جهت همگرایی لازم باشد و یا این که رویه تکرار متناهی بر روش تکرار HL-RF منطبق گردد و تحلیل مرتبه قابلیت اعتماد مرتبه اول سازه‌ها دچار ناپایداری حل گردد. از طرفی، انتخاب طول گام کوچک ممکن است مشکلاتی مانند

گام سوم: محاسبه شاخص قابلیت اعتماد بر اساس نقطه حداکثر محتمل و تخمین احتمال خرابی ($P_f \approx \Phi(-\beta)$) مطابق با گام دوم جهت تخمین احتمال خرابی روش‌های اولین مرتبه قابلیت اعتماد دو رویه تکرار ریاضی HL-RF و الگوریتم ارائه شده طول گام متناهی در ادامه بیان می‌گردد.

۲-۱- روش هاسوفر- لیند و رکویتز- فسفر (HL-RF)

رابطه تکرار الگوریتم HL-RF برای محاسبه نقطه حداکثر محتمل می‌تواند به صورت زیر بیان گردد [۱۱، ۱۲]:

$$U_{k+1}^{HL} = \beta_{k+1} \alpha_{k+1} \quad (۳)$$

که در آن:

$$\beta_{k+1} = \frac{g(U_k) - \nabla^T g(U_k) U_k}{\|\nabla g(U_k)\|} \quad (۴)$$

$$\alpha_{k+1} = -\frac{\nabla g(U_k)}{\|\nabla g(U_k)\|} \quad (۵)$$

در روابط فوق $\nabla g(U) = [\partial g / \partial u_1, \partial g / \partial u_2, \dots, \partial g / \partial u_n]^T$ بردار گرادیان تابع حالت حدی در فضای نرمال استاندارد و α بردار حساسیت متغیرهای تصادفی پایه در نقطه U_k است.

۲-۲- رابطه‌سازی رویه طول گام متناهی

یک الگوریتم تکرار مناسب با استفاده از یک طول گام بزرگ به صورت رابطه زیر جهت تعیین نقطه حداکثر محتمل بیان شده است [۱۱]:

$$U_{k+1}^{FS} = \beta_{k+1} \alpha_{k+1}^\lambda \quad (۶)$$

که در آن U^{FS} مقدار بردار طراحی در فضای نرمال استاندارد با توجه به انتخاب طول گام متناهی می‌باشد و α^λ بردار حساسیت ارائه شده متناهی بوده که به صورت زیر پیشنهاد می‌گردد:

$$\alpha_{k+1}^\lambda = \frac{U_{k+1}^\lambda}{\|U_{k+1}^\lambda\|} \quad (۷)$$

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda_{k-1} & \text{if } \|d_k\| \leq \|d_{k-1}\| \\ \frac{\lambda_{k-1}}{c} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

مطابق با رابطه فوق، مقدار اولیه طول گام از رابطه (۱۱) (طول گام حداکثر قاعده Armijo) محاسبه می‌گردد. مشخص است که طول گام انتخابی بر اساس دو رابطه (۱۱) و (۱۳) بسیار ساده بوده و نیاز به محاسبات پیچیده ندارد به طوری که بر اساس اطلاعات نقطه شروع تکرار و نتایج حاصل از تکرارهای جدید و قبلی رویه طول گام متناهی، مقدار حداکثر طول گام به صورت دینامیکی مطابق با رابطه (۱۳) قابل محاسبه است. مطابق با طول گام ارائه شده برای الگوریتم تکرار اولین مرتبه قابلیت اعتماد سازه‌ها سه گام اساسی تکرار رویه طول گام متناهی به صورت زیر قابل بیان است:

گام اول: تعریف تابع حالت حدی، خواص آماری متغیرهای تصادفی پایه، نقطه شروع تکرار $X_0 = \mu$ و پارامترهای الگوریتم تکرار مانند $10 \leq M \leq 150$ ، $1.2 < c < 1.5$ و معیار همگرایی به صورت $\varepsilon = 10^{-6}$

گام دوم: انتقال متغیرهای تصادفی در فضای نرمال استاندارد مطابق با تبدیل روزنبلات ($u = \Phi^{-1}\{F_X(x^*)\}$) و جستجوی نقطه حداکثر محتمل مطابق با یک رویه تکرار متناهی به صورت:

۱- محاسبه گرادیان تابع حالت حدی در فضای نرمال استاندارد
 ۲- اگر $k = 0$ است محاسبه طول گام حداکثر مطابق با رابطه (۱۱)

۳- محاسبه بردار طراحی متناهی (U^λ) با توجه به رابطه (۸)

۴- محاسبه α^λ و β به ترتیب بر اساس روابط (۷) و (۹)

۵- محاسبه مقدار جدید بردار طراحی بر اساس رابطه (۶)

۶- به روز رسانی طول گام مطابق با رابطه (۱۳) و شرایط شیب

گام سوم: کنترل هم‌گرایی رویه تکرار به صورت $\|U_{k+1}^{FS} - U_k^{FS}\| < \varepsilon$ در صورت برقراری شرط آن، محاسبه احتمال خرابی ($P_f \approx \Phi(-\beta)$) بر اساس نقطه حداکثر محتمل ($\beta = \|U_{k+1}^{FS}\|$) و بردار حساسیت متغیرهای تصادفی پایه ($\alpha = \alpha_{k+1}^\lambda$) در غیر این صورت $k = k + 1$ و ارجاع به گام دوم

۴- مثال‌های سازه‌ای

بر اساس الگوریتم ارائه شده اهمیت انتخاب طول گام در تحلیل مسائل غیر خطی سازه‌ای با ارائه پنج مثال ارزیابی شده

همگرایی آرام و یا ناپهنگام در مسائل قابلیت اعتماد سازه‌ها ایجاد کند. از این رو، انتخاب طول گام مناسب نه تنها سرعت همگرایی را بالا برده بلکه، از ناپایداری حل مسائل قابلیت اعتماد نیز جلوگیری می‌کند. فرض می‌شود که طول گام متناهی شرایط امتداد جستجوی Armijo را برآورد نماید لذا داریم که [۱۴]

$$\lambda_{\max} \leq M \frac{\|U_{k+1}^{FS} - U_k^{FS}\|^2}{\|\nabla g(U_k)\|^2} \quad (10)$$

که در آن $M \gg 1$ (یک عدد بسیار بزرگ). از آنجایی که مقدار M بزرگ انتخاب شده و نیز ممکن است اختلاف دو مقدار بردار طراحی جدید و قدیم ($U_{k+1}^{FS} - U_k^{FS}$) در تکرارهای متوالی ناچیز برآورد گردد. لذا، مقدار حداکثر طول گام رابطه (۱۰) بر اساس نقطه شروع تکرار (U_0) به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\lambda_{\max} = \frac{M}{\|\nabla g(U_0)\|} \quad (11)$$

که در آن $\nabla g(U_0)$ بردار گرادیان تابع حالت حدی در نقطه شروع تکرار U_0 و $10 \leq M \leq 150$ است. در انتخاب طول گام متناهی از درجه غیرخطی تابع حالت حدی در نقطه شروع تکرار استفاده شده است. همچنین فرض می‌گردد که طول گام ارائه شده رابطه (۱۱) شرایط شیب را نیز برآورد نماید [۱۵]:

$$\nabla^T g(U_k) d_k < -c_1 \|\nabla g(U_k)\|^2 \quad (12)$$

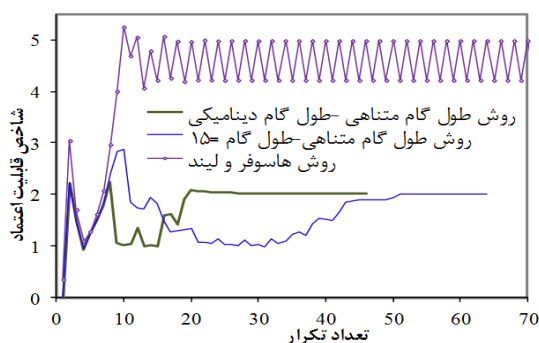
که در آن $0 < c_1 < 1$ و $d_k = U_{k+1}^{FS} - U_k^{FS}$ است. اگر شرط معادله (۱۲) برآورد نگردد در چنین حالتی، مقدار طول گام به صورت $\lambda = \lambda_{\max} / c$ در هر تکرار محاسبه شده که در آن ضریب تنظیم طول گام $1.2 < c < 1.5$ می‌باشد. در غیر این صورت، طول گام متناهی به درستی انتخاب گردیده است. لذا، با توجه به قاعده انتخاب طول گام متناهی Armijo رابطه (۱۱) و برآورد شرایط شیب، مقدار طول گام در هر تکرار (λ_k) به صورت رابطه زیر پیشنهاد شده است:

که در آن S_0 تابع چگالی نویز سفید است، $\gamma = \frac{M_s}{M_p}$ ضریب جرم و $\omega_a = \frac{\omega_p + \omega_s}{2}$ میانگین فرکانسی و $\xi_a = \frac{\xi_p + \xi_s}{2}$ میانگین ضریب میرایی دو سیستم و $\theta = \frac{\omega_p - \omega_s}{\omega_a}$ پارامتر تعدیل است [۳، ۸]. این مثال شامل ۸ متغیر تصادفی لوگ-نرمال غیر وابسته است که خصوصیات آماری آن‌ها در جدول (۱) ارائه شده است.

جدول ۱- خصوصیات آماری متغیرهای تصادفی مثال (۱)

متغیر	میانگین	انحراف معیار	متغیر	میانگین	انحراف معیار
M_p	۱	۰/۱	ξ_p	۰/۰۵	۰/۰۲
M_s	۰/۰۱	۰/۰۰۱	ξ_s	۰/۰۲	۰/۰۱
K_p	۱	۰/۲	F_s	۱۵	۱/۵
K_s	۰/۰۱	۰/۰۰۲	S_0	۱۰۰	۱۰

این مثال توسط مراجع [۳، ۸، ۹] تحلیل قابلیت اعتماد مرتبه اول گردیده است که با توجه به رویه بهبود یافته HL-RF بر اساس تابع شایسته مقدار شاخص قابلیت اعتماد بر گرفته از مرجع [۸] برابر با ۲/۰۱ نتیجه شده و بر اساس رویه بهینه‌سازی گرادیان مزدوج غیر خطی بر گرفته از مرجع [۳] مقدار شاخص قابلیت اعتماد آن برابر با ۲/۰۱۶۶۳ نتیجه شده است. اخیراً این مثال توسط مرجع [۹] بر اساس روش جستجوی مزدوج رویه HL-RF تحلیل قابلیت اعتماد مرتبه اول گردیده که مقدار هم-گرا شده شاخص قابلیت اعتماد در آن برابر با ۲/۰۱۶۴۶ حاصل گردیده است. در شکل (۲) تاریخچه همگرایی شاخص قابلیت اعتماد مثال (۱) بر اساس الگوریتم متناهی با دو طول گام ثابت (طول گام برابر با ۱۵) و طول گام دینامیکی مطابق با قاعده انتخاب Armijo و شرایط شیب (رابطه (۱۳)) با روش HL-RF (روش هاسوفر و لیند) مقایسه شده است.

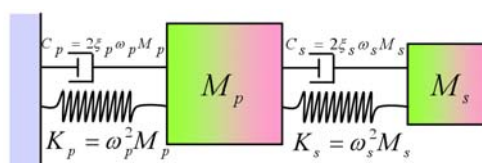


شکل ۲- تاریخچه همگرایی شاخص قابلیت اعتماد برای مثال (۱)

است. از این رو برنامه‌ای به زبان MATLAB جهت تحلیل قابلیت اعتماد به کمک رویه تکرار رابطه (۶) مطابق با الگوریتم ارائه شده فوق تدوین شده که امکان به کارگیری انواع توابع غیر نرمال از جمله: لوگ-نرمال، گامبل، وایبول، فسچر و یکنواخت را دارد. برای این منظور، مثال‌های متنوعی در نظر گرفته شده و همگرایی، توانایی، کارایی و مؤثر بودن الگوریتم اولین مرتبه قابلیت اعتماد با طول گام متناهی، بررسی و با روش HL-RF مقایسه شده است. در الگوریتم ارائه شده ضریب طول گام در رابطه (۱۱) برابر $M = 35$ و ضریب تنظیم طول گام (c) مطابق با رابطه (۱۳) برابر با ۱/۴ و نیز طول گام ثابت بدون انتخاب قاعده Armijo برابر با ۱۵ در نظر گرفته شده است. بر اساس معیار همگرایی خطا به صورت $\|U_{k+1} - U_k\| \leq 10^{-6}$ نقطه شروع تکرار برابر میانگین هر متغیرهای تصادفی می‌باشد. در تحلیل قابلیت اعتماد سازه‌ها بردار گرادیان بر اساس رویه تفاضل مرکزی محاسبه شده است.

۴-۱- سازه دو درجه آزادی

سیستم دو درجه آزادی نشان داده شده در شکل (۱) با فرکانس‌های طبیعی $\omega_p = \sqrt{\frac{K_p}{M_p}}$ و $\omega_s = \sqrt{\frac{K_s}{M_s}}$ و ضرایب میرایی ξ_p و ξ_s که اندیس‌های p و s به ترتیب به اولین و دومین جداساز برمی‌گردد، بر گرفته از مراجع [۳، ۹] به عنوان یک مثال غیر خطی و پیچیده سازه‌ای انتخاب شده است.



شکل ۱- نمایش سیستم دو درجه آزادی مثال ۱

تابع حالت حدی به صورت رابطه زیر تعریف شده است [۳]:

$$g = F_s - K_s \times P(E[x_s^2])^{1/2} \quad (14)$$

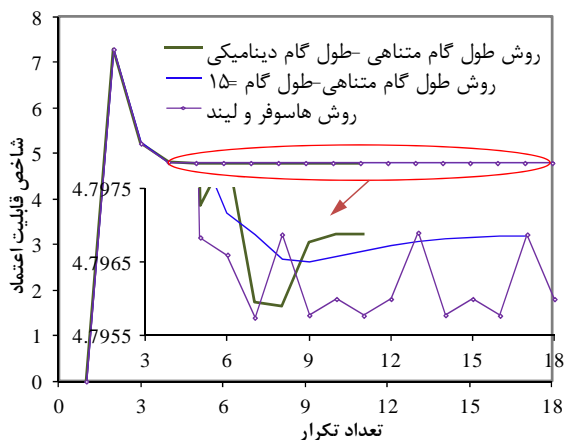
که در آن P برابر با ۳ و

$$E[x_s^2] = \frac{\pi S_0}{4 \xi_s \omega_s} \left[\frac{\xi_a \xi_s}{\xi_p \xi_s (4 \xi_a^2 + \theta^2) + \gamma \xi_a^2} \times \frac{(\xi_p \omega_p^3 + \xi_s \omega_s^3) \omega_p}{4 \xi_a \omega_a^4} \right] \quad (15)$$

جدول ۳- خصوصیات آماری متغیرهای تصادفی مثال (۲)

متغیر	E (MPa)	t (mm)	α (rad)	r_1 (m)	M (KN-m)	P (KN)
میانگین	۷۰۰۰۰	۲/۵	۰/۵۲۴	۰/۹	۸۰	۷۰
ضریب تغییرات	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۰۲	۰/۰۲۵	۰/۰۸	۰/۰۸

مقدار شاخص قابلیت اعتماد و نقطه حداکثر محتمل همگرا شده برگرفته از مرجع [۳] به ترتیب برابر با $\beta = 4/79728$ و $X^* = [64345, 1/99, 0/5282, 0/8872, 90/198, 74/307]$ می باشد. اخیراً، این مثال توسط مرجع [۵] تحلیل قابلیت اعتماد مرتبه اول شده که شاخص قابلیت اعتماد همگرا شده آن برابر با $4/7965$ حاصل شده است. در شکل (۴) مقایسه تاریخچه هم-گرایی روش HL-RF و روش طول گام متناهی نشان داده شده است. مشخص است که روش ارائه شده به شاخص قابلیت اعتماد پایدار همگرا گردیده اما رویه HL-RF حلی به صورت اغتشاش نشان داده است. همچنین نقش استفاده از قاعده انتخاب طول گام در این مثال به خوبی نشان داده شده که به تعداد تکرار بسیار کمی (در حدود ۱۱ تکرار) به شاخص قابلیت اعتماد برابر با $4/796879$ همگرا شده که با مقادیر حاصل از مراجع یکسان است. نتایج همگرایی نقطه حداکثر محتمل و همچنین بردار حساسیت متغیرهای مثال ارائه شده فوق مطابق با رابطه (۱۶) در جدول (۴) ارائه شده است. مشخص است که رویه ارائه شده تحلیل قابلیت اعتماد به مقدار نقطه حداکثر محتمل نزدیک به مرجع [۳] همگرا گردیده است.



شکل ۴- تاریخچه همگرایی شاخص قابلیت اعتماد برای مثال

(۲)

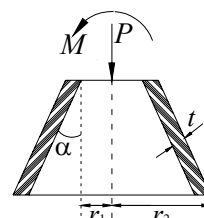
مشخص است که روش HL-RF به حل پایداری همگرا نشده و همگرایی آن همراه با نوسان به دو شاخص قابلیت اعتماد به صورت $\{4/22278, 4/96297\}$ می باشد. اما رویه طول گام متناهی به نتایج پایداری همگرا شده است. رویه تکرار طول گام متناهی بر اساس قاعده انتخاب طول گام دینامیکی با تعداد تکرار کمتری نسبت به رویه طول گام ثابت همگرا شده است. شاخص قابلیت اعتماد همگرا شده الگوریتم ارائه شده بعد از ۴۶ تکرار برابر با $2/016643$ می باشد که منطبق بر نتایج حاصل از مراجع [۳، ۹] است. نتایج همگرایی نقطه حداکثر محتمل و بردار حساسیت متغیرهای این مثال در جدول (۲) درج شده است.

جدول ۲- نتایج همگرایی رویه طول گام متناهی برای مثال (۱)

متغیر	X^*	α	متغیر	X^*	α
M_p	۱/۰۰۱۷	۰/۰۳۴۰	ξ_p	۰/۰۲۸۰۰	-۰/۶۵۱۴
M_s	۰/۰۱۰۰۹	۰/۰۶۹۰	ξ_s	۰/۰۱۲۱۴	-۰/۴۰۹۶
K_p	۱/۱۰۱۶	۰/۳۹۲۰	F_s	۱۳/۷۲۹۱	-۰/۴۱۳۷
K_s	۰/۰۱۱۱۵	۰/۳۲۱۰	S_0	۱۰۳/۷۱۳	۰/۲۰۶۲

۴-۲- سازه مخروطی

یک سازه مخروطی تحت بار محوری P و لنگر خمشی M مطابق با شکل (۳) را در نظر بگیرید [۳].



شکل ۳- نمایش شماتیک سازه مخروطی مثال ۲ [۳]

بر اساس تحلیل پوسته، تابع عملکرد آن را می توان به صورت رابطه زیر در نظر گرفت [۳]:

$$g = 1 - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{\pi E t^2 \cos^2 \alpha} \times \left(\frac{P}{2\gamma} + \frac{M}{\eta r_1} \right) \quad (16)$$

که در آن ضرایب γ و η به ترتیب برابر با $0/33$ و $0/41$ در نظر گرفته شده [۳] و ν ضریب پواسون به صورت معین برابر با $0/3$ می باشد. این مسئله شش متغیر تصادفی نرمال غیر وابسته دارد که خصوصیات آماری آن ها در جدول (۳) نشان داده شده است.

جدول ۵- متغیرهای تصادفی و خواص آماری مثال (۳)

متغیر	واحد	تابع توزیع	میانگین	انحراف معیار
P	kN	نرمال	۶/۵	۰/۳
L	mm	نرمال	۱۲۰	۵
A	mm	لوگ-نرمال	۷۵	۵
S	MPa	گامبل	۱۷۰۰۰۰	۴۷۶۰
d	mm	نرمال	۲/۳	۰/۰۴
b_f	mm	وایبول	۲/۹۷	۰/۰۷۵
t_w	mm	نرمال	۰/۱۶	۰/۰۲
t_f	mm	نرمال	۰/۲۶	۰/۰۲

۴-۴- ستون بتنی

تابع حالت حدی برای ستون بتنی بر گرفته از مثال (۳) مرجع [۱۶]، به صورت رابطه زیر ارائه شده است:

$$g = 1 - \frac{4x_1}{bh^2x_4} - \frac{4x_2}{b^2hx_4} - \left(\frac{x_3}{bhx_4}\right)^2 \quad (18)$$

که در آن b و h به ترتیب عرض و ارتفاع ستون بتنی است که به صورت متغیر معین به ترتیب برابر با $۰/۴$ و $۰/۶$ در نظر گرفته شده است. متغیرهای تصادفی غیر وابسته x_1 تا x_4 از تابع توزیع احتمال لوگ-نرمال پیروی می کنند که خواص آماری آن‌ها در جدول (۶) درج شده است.

جدول ۶- خواص آماری ستون بتنی مثال (۴)

متغیر	x_1 (kN-m)	x_2 (kN-m)	x_3 (kN)	x_4 (MPa)
میانگین	۲۵۰	۱۲۵	۲۵۰۰	۴۰
انحراف معیار	۷۵	۳۷/۵	۵۰۰	۴

این مثال توسط مرجع [۱۶] تحلیل قابلیت اعتماد مرتبه اول گردیده است که مقدار شاخص قابلیت اعتماد همگرا شده آن برابر با $۴/۶۰۱۳$ نتیجه شده است. مقدار شاخص قابلیت اعتماد رویه ارائه شده منتهای برابر به ازای ۲۶ تکرار برابر با $۴/۶۰۱۳۱۴$ حاصل شده است که با مقدار حاصل از مرجع [۱۶] مطابقت دارد. این مثال توسط روش HL-RF نیز تحلیل قابلیت اعتماد شده که بعد از ۲۹ تکرار همگرا گردیده است که مقایسه ای از بردار حساسیت روش ارائه شده و رویه HL-RF برای متغیرهای طراحی در جدول (۷) ارائه شده است. مشخص است که مقدار

جدول ۴- نتایج همگرایی رویه طول گام منتهای برای مثال ۲

متغیر	E (MPa)	t (mm)	α (rad)	r_l (m)	M (kN-m)	P (kN)
X^*	۶۴۰۰۸/۷	۱/۹۹۱	۰/۵۲۸۲	۰/۸۸۷۳	۹۰/۱۲۲	۲۷۲ ۷۴
α	-۰/۳۵۶۹	-۰	-۰/۰۸۲۶	۰/۱۱۷۷	۰/۳۲۹۷	۱/۱۵۹۰ ۰

۴-۳- تیر I شکل با تکیه گاه ساده

یک تیر I شکل با تکیه گاه ساده تحت بار P در فاصله A از تکیه گاه مطابق با شکل (۵) در نظر گرفته شده است. تابع حالت حدی تیر بر اساس حداکثر تنش حاصله به صورت زیر تعریف شده است [۲]:

$$g = S - \frac{12PA}{2L} \left[\frac{(L-A)d}{b_f d^3 - (b_f - t_w)(d - 2t_f)^3} \right] \quad (17)$$



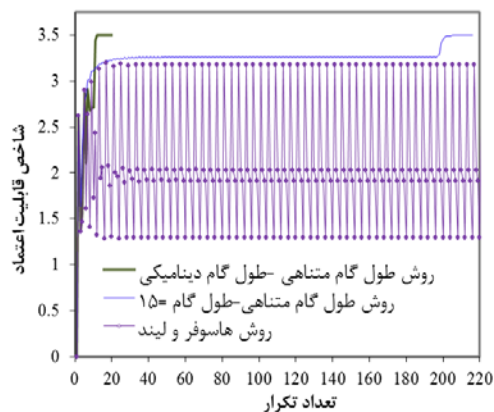
شکل ۵- تیر I شکل مثال ۳

تیر فوق شامل هشت متغیر تصادفی غیر وابسته است که اطلاعات مربوط به توابع توزیع احتمال و خواص آماری آن‌ها در جدول ۵ درج شده است. بر اساس نتایج حاصل از تحلیل قابلیت اعتماد تیر مذکور بر گرفته از مرجع [۲] مقدار شاخص قابلیت اعتماد آن برابر با $۲/۸۱۱۲$ نتیجه شده است. این تیر بر اساس رویه HL-RF و روش طول گام منتهای ارائه شده تحلیل قابلیت اعتماد شده است که به ترتیب مقدار شاخص قابلیت اعتماد همگرا شده آن‌ها بعد از ۱۲ و ۹ تکرار برابر با $۲/۸۱۱۷۶۷$ و نقطه حداکثر محتمل برابر با

$$[۰/۲۲۴۹] \text{ و } [۰/۱۵۶۱] \text{ و } [۲/۹۲۵] \text{ و } [۲/۲۷۵] \text{ و } [۱۶۶۹۵۲/۴] \text{ و } [۶۹/۷۱]$$

$$\text{ و } [۱۲۶/۷۳] \text{ و } [۶/۸۶۶] = X^*$$

نتیجه شده است. مشخص است رابطه سازی روش طول گام منتهای به سادگی روش HL-RF در تحلیل قابلیت اعتماد سازه‌ها است. اما سرعت همگرایی بیشتری نسبت به روش HL-RF در این مثال نشان داده است.



شکل ۶- تاریخچه همگرایی شاخص قابلیت اعتماد برای مثال (۵)

۴-۶- تأثیر طول گام بر رویه اولین مرتبه قابلیت اعتماد

مطابق با رابطه (۱۱) مقدار طول گام حداکثر به مقدار ضریب طول گام (M) وابسته است که در این مقاله به صورت $10 \leq M \leq 150$ پیشنهاد شده است. در جدول (۸) مقایسه نتایج تعداد تکرار جهت همگرایی و شاخص قابلیت اعتماد (β) روش طول گام متناهی جهت تحلیل مرتبه اول سازه‌ها نسبت به چندین ضریب طول گام ارائه گردیده است. نتایج مندرج در جدول (۸) حاکی از آن هستند که طول گام پیشنهادی به نحو مناسبی همگرایی مسائل قابلیت اعتماد سازه‌ای را تضمین کرده و در مسائل غیر خطی و پیچیده مانند مثال (۱) منجر به همگرایی حل با تعداد تکرار مشابه به ازای تمامی مقادیر ضریب طول گام شده است.

جدول ۸- حساسیت الگوریتم ارائه شده به ضریب طول گام

مثال ۵	مثال ۴	مثال ۳	مثال ۲	مثال ۱	ضریب
β	β	β	β	β	M
(تکرار)	(تکرار)	(تکرار)	(تکرار)	(تکرار)	
۳/۴۹۷۴۸	۴/۶۰۱۳۱	۲/۸۱۱۷۷	۴/۷۹۶۸۹	۲/۰۱۹۸۹	۱۰
(۲۸)	(۲۸)	(۷)	(۱۰)	(۳۲)	
۳/۴۹۷۴۸	۴/۶۰۱۳۱	۲/۸۱۱۷۷	۴/۷۹۶۸۹	۲/۰۱۶۷۰	۲۰
(۳۱)	(۲۷)	(۹)	(۱۱)	(۵۳)	
۳/۴۹۷۴۸	۴/۶۰۱۳۱	۲/۸۱۱۷۷	۴/۷۹۶۸۹	۲/۰۱۶۵۳	۴۰
(۲۲)	(۲۶)	(۹)	(۱۱)	(۶۱)	
۳/۴۹۷۴۸	۴/۶۰۱۳۱	۲/۸۱۱۷۷	۴/۷۹۶۸۹	۲/۰۱۶۴۸	۶۰
(۵۲)	(۲۶)	(۹)	(۸)	(۵۲)	
۳/۴۹۷۴۸	۴/۶۰۱۳۱	۲/۸۱۱۷۷	۴/۷۹۶۸۹	۲/۰۱۶۵۰	۸۰
(۲۴)	(۲۶)	(۱۰)	(۸)	(۴۷)	
۳/۴۹۷۴۸	۴/۶۰۱۳۱	۲/۸۱۱۷۷	۴/۷۹۶۸۹	۲/۰۱۶۴۵	۱۰۰
(۲۸)	(۲۶)	(۱۰)	(۹)	(۴۲)	
۳/۴۹۷۴۸	۴/۶۰۱۳۱	۲/۸۱۱۷۷	۴/۷۹۶۸۹	۲/۰۱۶۶۴	۱۵۰
(۱۶۱)	(۲۵)	(۱۱)	(۹)	(۴۶)	

حساسیت حاصل از رابطه ارائه شده (۷) و روش HL-RF رابطه (۵) اختلاف چندانی ندارد.

جدول ۷- مقایسه بردار حساسیت (α) مثال (۴)

متغیر	x_1 (kN-m)	x_2 (kN-m)	x_3 (kN)	x_4 (MPa)
HL-RF	۰/۷۱۵۳	۰/۳۱۰۶	۰/۳۴۵۱	-۰/۵۲۲۴
روش ارائه شده	۰/۷۱۵۰	۰/۳۱۰۶	۰/۳۴۵۴	-۰/۵۲۲۵

۴-۵- تابع حالت حدی غیر خطی

تابع حالت حدی غیرخطی زیر که اثر خرابی ضربه بر درب یک ماشین را نشان می‌دهد به صورت زیر در نظر گرفته شده است [۱۷]:

$$g = 0.489x_3x_7 + 0.843x_5x_6 - 0.0432x_9x_{10} + 0.0556x_9x_{11} + 0.000786x_{11}^2 - 0.75 \quad (19)$$

که در آن

$$i = 1 \sim 7 \quad x_i \sim N(1, 0.005),$$

$$i = 8 \sim 9 \quad x_i \sim N(0.3, 0.006),$$

$$i = 9 \sim 10 \quad x_i \sim N(0, 10.0)$$

تابع توزیع احتمال نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ است. این مثال بر اساس روش پیشنهادی با طول گام دینامیکی و روش طول گام بینهایت با طول گام برابر ۱۵ و نیز رویه HL-RF تحلیل گردیده است که تاریخچه همگرایی آن در شکل ۶ نشان داده شده است. مشخص است که روش HL-RF به صورت نوسانی تناوبی به چهار نقطه به صورت $\{۳/۱۷۵۷, ۲/۰۳۵۱, ۱/۹۱۸۰, ۱/۲۹۵۷\}$ همگرا گردیده که یک حل ناپایدار از مثال فوق می‌باشد. روش طول گام متناهی با طول گام برابر با ۱۵ با ۲۱۶ تکرار و روش طول گام متناهی با طول گام دینامیکی ارائه شده در این مقاله با ۲۱ تکرار به نتایج مشابه (شاخص قابلیت اعتماد برابر با ۳/۴۹۷۴۸۱) همگرا گردیده‌اند. لذا، طول گام دینامیکی ارائه شده موجب تطبیق مناسب بردار حساسیت در هر تکرار گردیده و برای تابع غیر خطی حالت حدی (۱۹)، موجب کاهش چشمگیر تعداد تکرار جهت همگرایی گردیده است. برای مسائل غیر خطی (مثال ۱ و ۵) الگوریتم ارائه شده همگرایی سریع از خود نشان داده است.

جدول ۸- حساسیت الگوریتم ارائه شده به ضریب طول گام

روش تکرار	مثال ۱ β (تکرار)	مثال ۲ β (تکرار)	مثال ۳ β (تکرار)	مثال ۴ β (تکرار)	مثال ۵ β (تکرار)
HL-RF	همگرایی نوسانی	همگرایی مغشوش	۲/۸۱۱۷۷ (۱۲)	۴/۶۰۱۳۱ (۲۹)	همگرایی نوسانی
طول گام متناهی [۱۱]	۲/۰۱۶۷۰ (۶۳)	۴/۷۹۶۸۹ (۱۷)	۲/۸۱۱۷۷ (۱۷)	۴/۶۰۱۳۱ (۴۸)	۳/۴۹۷۴۸ (۲۱۶)
طول گام دینامیکی متناهی	۲/۰۱۶۵۰ (۴۷)	۴/۷۹۶۸۹ (۸)	۲/۸۱۱۷۷ (۱۰)	۴/۶۰۱۳۱ (۲۶)	۳/۴۹۷۴۸ (۲۴)

۷- خلاصه و نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش اولین مرتبه قابلیت اعتماد بر مبنای طول گام متناهی ارائه شده است. در این الگوریتم تکرار اولین مرتبه قابلیت اعتماد سازه‌ها، طول گام متناهی بر اساس یک رابطه ساده با استفاده از قاعده انتخاب امتداد جستجوی Armijo قابل محاسبه است که بر اساس شرایط شیب به صورت دینامیکی مطابق با نتایج تکرارهای جدید و قبلی، تنظیم می‌گردد (رابطه (۱۳)). یک رابطه مناسب ضریب حساسیت بر اساس ارائه بردار طراحی متناهی (رابطه (۸)) با استفاده از طول گام ارائه شده، تعریف شده که مطابق آن الگوریتم تکرار متناهی رابطه سازی گردیده است. صحت همگرایی، کارایی و توانمندی این روش با چندین مثال سازه‌ای بر گرفته از مراجع آزمون شده است.

نتایج نشان داده‌اند که روش طول گام متناهی، استفاده موفقیت‌آمیزی در مسائل بسیار غیر خطی و پیچیده سازه‌ای (مثال (۱) و (۲)) داشته است. به طوری که این روش بر خلاف الگوریتم HL-RF در مسائل غیر خطی دچار همگرایی به صورت نوسان (مثال (۱)) یا همگرایی همراه با اغتشاش (مثال (۲)) نشده است و توانمندی بسیار بالایی نسبت به روش HL-RF در مسائل پیچیده مهندسی دارد.

انتخاب طول گام متناهی بر اساس قاعده Armijo (رابطه (۱۱)) موجب کاهش محاسبات و تعداد تکرار الگوریتم طول گام متناهی می‌گردد (مثال‌های (۱) تا (۴)). لذا این الگوریتم علاوه بر تضمین پایداری عددی از سرعت بالاتری نیز در مسائل سازه‌ای برخوردار است.

رابطه تکرار الگوریتم ارائه شده به سادگی روش اولین مرتبه قابلیت اعتماد HL-RF می‌باشد. اما نسبت به رویه HL-RF توانمندتر و کاراتر است. به طوری که، با تعداد تکرار بسیار پایین

مثال غیر خطی (۵) نشان می‌دهد که به ازای ضریب برابر با ۱۵۰ تعداد تکرار جهت همگرایی رشد چشمگیری داشته است. طرفی مشخص است که رابطه پیشنهادی طول گام نسبت به تغییرات ضریب طول گام در محدوده بین ۲۰ تا ۱۰۰ چندان حساس نمی‌باشد.

پیشنهاد می‌گردد که در مسائل غیر خطی حداقل ضریب طول گام در نظر گرفته شود (به عنوان مثال برابر با ۱۰) (مثال ۱ و مثال ۵) اما در مسائل با درجه غیر خطی متوسط (مثال‌های (۲) تا (۴)) مقدار طول گام در حدود ۵۰ در نظر گرفته شود که در این گونه مسائل حساسیتی از نحوه همگرایی رویه تکرار نسبت به ضریب طول گام مشاهده نشده است.

۶- بحث در مورد نتایج

روش طول گام متناهی ارائه شده بر اساس طول گام دینامیکی با استفاده از شرایط شیب با دو روش HL-RF و روش طول گام متناهی ارائه شده توسط مرجع [۱۱] برای مثال (۵) مورد بررسی مقایسه شده است. پارامتر طول گام متناهی در رویه دینامیکی ارائه شده برابر با $M = 80$ و رویه مرجع [۱۱] برابر با یک طول گام ثابت ۱۵ با ضریب تنظیم طول گام (C) برابر با ۱/۴ در نظر گرفته شده است. نتایج همگرایی این روش‌ها در جدول (۹) برای مثال‌های مورد بررسی ارائه شده است.

مشخص است که روش HL-RF در مثال‌های (۱)، (۲) و (۵) همگرا نگردیده و نسبت به روش ارائه شده از توانمندی کمتری برخوردار است. اما دو رویه طول گام متناهی با طول گام دینامیکی (روش ارائه شده) و طول گام ثابت [۱۱] در تمامی مثال‌ها به نتایج مشابه همگرا گردیده‌اند. اما، تعداد تکرار جهت همگرایی در مثال‌های غیر خطی متفاوت نتیجه شده به طوری که، روش ارائه شده با تعداد تکرار بسیار کمتری همگرا گردیده است. از این رو، روش ارائه شده نسبت به روش طول گام متناهی از کارایی بالاتری دارد. در مثال‌های با درجه غیر خطی متوسط (مثال‌های (۳) و (۴))، روش پیشنهادی نسبت به روش HL-RF سریع‌تر همگرا گردیده اما، روش طول گام متناهی ثابت [۱۱] در این مثال‌ها با تعداد تکرار بیشتری (در حدود ۱/۵) نسبت به روش HL-RF همگرا شده است. لذا طول گام دینامیکی امکان تطبیق مناسب جهت همگرایی کارا و صحیح را برای الگوریتم متناهی فراهم می‌کند.

- HL-RF Method", *Engineering Computations*, 2014, 31 (4), 775-790.
- [10] Liu, P. L., Kiureghian, A. D., "Optimization Algorithms for Structural Reliability", *Structural Safety*, 1991, 9 (3), 161-178.
- [11] Yang, D., "Chaos Control for Numerical Instability of First Order Reliability Method", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 15 (10), 3131-3141.
- [12] Gong, J. X., Yi, P., "A Robust Iterative Algorithm for Structural Reliability Analysis", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, 43 (4), 519-527.
- [13] Keshtegar, B., Miri, M., "An Enhanced HL-RF Method for the Computation of Structural Failure Probability Based on Relaxed Approach", *Civil Engineering Infrastructures*, 2013, 1 (1), 69-80.
- [14] Shi, Z. J., Wang, S., Xu, Z., "The Convergence of Conjugate Gradient Method with Nonmonotone Line Search", *Applied Mathematics and Computation*, 2010, 217 (5), 1921-1932.
- [15] Rivaie, M., Mustafa, M., Leong, W. J., Ismail, M., "A New Class of Nonlinear Conjugate Gradient Coefficients with Global Convergence Properties", *Applied Mathematics and Computation*, 2012, 218 (22), 11323-11332.
- [16] Yi, L., Barbara, J. L., "Numerical Approximations of Design Points in Reliability Analysis under Parametric Changes", *Journal of Engineering Mechanics*, 2007, 133 (11), 1213-1221.
- [17] Youn, B. D., Choi, K. K., Du, L., "Adaptive Probability Analysis Using an Enhanced Hybrid Mean Value Method", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2005, 29, 134-148.
- همگرایی مناسبی از تحلیل قابلیت اعتماد مثال‌های مورد بررسی، ارائه داده است.
- همگرایی الگوریتم ارائه شده وابستگی چشمگیری به ضریب طول گام متناهی نشان نداده است و محدوده انتخابی $10 \leq M \leq 150$ در مسائل غیر خطی مناسب است.
- ۶- مراجع**
- [1] Rackwitz, R., "Reliability Analysis-A Review and Some Perspectives", *Structural Safety*, 2001, 23 (4), 365-395.
- [2] Huang, X., Zhang, Y., "Reliability-Sensitivity Analysis Using Dimension Reduction Methods and Saddle Point Approximations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2013, 93 (8), 857-886.
- [۳] کشته‌گر، ب.، میری، م.، "ارائه فرمولاسیون مناسب بهینه‌سازی گرادیان مزدوج غیر خطی به منظور محاسبه شاخص سلامتی سازه‌ها"، *مجله مهندسی عمران و محیط زیست دانشگاه تبریز*، ۱۳۹۰، ۴۱ (۲)، ۷۰-۹۳.
- [4] Santosh, T. V., Saraf, R. K., Ghosh, A. K., Kushwaha, H. S., "Optimum Step Length Selection Rule In Modified HL-RF Method For Structural Reliability", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2006, 83 (10), 742-748.
- [5] Gong, J., Yi, P., Zhao, N., "Non-Gradient-Based Algorithm for Structural Reliability Analysis", *Journal of Engineering Mechanics*, 2014, 140 (6), 1-16.
- [6] Maes, M. A., Breitung, K., Dupuis, D. J., "Asymptotic Importance Sampling", *Structural Safety*, 1993, 12 (3), 167-186.
- [7] Hasofer, A. M., Lind, N. C., "Exact and Invariant Second Moment Code Format", *Journal of Engineering Mechanics Division*, 1974, 111 (21), 111-121.
- [8] Kiureghian, A. D., Stefano, M. D., "Efficient Algorithm for Second-Order Reliability Analysis", *Journal of Engineering Mechanics*, 1991, 117 (12), 2904-2923.
- [9] Keshtegar, B., Miri, M., "Introducing Conjugate Gradient Optimization for Modified

EXTENDED ABSTRACT

Step Size Effect on Convergence of the First Order Reliability Method of Structures

Behrooz Keshtegar*

Department of Civil Engineering, University of Zabol, Zabol 9861335856, Iran

Received: 24 December 2014; **Accepted:** 16 August 2015

Keywords:

Structural reliability Analysis, Finite-step size, First-order reliability method, Failure probability

1. Introduction

Engineering problems are included various uncertainties such as: the material, geometric properties, external loads. Therefore, the structural reliability analysis can be used to consider uncertainties based on a probabilistic model, efficiently [1, 2]. The failure probability is estimated by a multi-dimensional integral as follows [2]:

$$P_f = \int_{g(X) \leq 0} \dots \int f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \approx \Phi(-\beta) \quad (1)$$

where, $g(X)$ is the limit state function (LSF) which separates the design domain into failure ($g(X) < 0$) and safe ($g(X) > 0$) regions with respect to basic random variables $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ and β is the reliability index. The various approximation methods including the first-order reliability method (FORM) [1] and the second-order reliability method (SORM) methods [3] are used to estimate the multiple integral Eq. 1. The HL-RF iterative algorithm is the most widely used for the structural reliability analysis [1, 3]. The HL-RF scheme may be converged to unstable solution such as: periodic, bifurcation and chaos solutions in highly nonlinear problems [4]. In this paper, a new iterative formula has been presented based on the finite-step size for estimating the failure probability. A finite-step size is developed by Armijo line search rule and the sufficient descent condition. The robustness and efficiency of the finite-step size method were compared with the HL-RF scheme. The results illustrate that the new method is more robust and efficient than the HL-RF scheme in the structural reliability analysis.

2. Basic iterative finite-step size method

The basic process of FORM is to search the most probable point (MPP), $\beta = \|U^*\|$ [2]. Typical FORM involves the three steps to estimate the probability of failure as

Step 1: Transform the basic random variables from the original space into standard normal space by Rosenblatt transformation [1, 2] i.e. $u = \Phi^{-1}\{F_X(x^*)\}$.

Step 2: Search the MPP i.e. $U^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)^T$ based on an iterative process

Step 3: Calculate the probability of failure as $P_f \approx \Phi(-\beta)$.

2.1. finite-step size algorithm

The iterative formula of the finite-step size (FS) algorithm for calculating the reliability index can be written as

$$U_{k+1}^{FS} = \beta_{k+1} \alpha_{k+1}^2 \quad (2)$$

* Corresponding Author

E-mail addresses: bkeshtegar@uoz.ac.ir (Behrooz Keshtegar)

In this method, α^λ is the finite-sensitivity vector of random variables, which is computed by

$$\alpha_{k+1}^\lambda = \frac{\mathbf{U}_{k+1}^\lambda}{\|\mathbf{U}_{k+1}^\lambda\|} \quad (3)$$

in which, point \mathbf{U}_{k+1}^λ is finite-vector of random variables, which is calculated as

$$\mathbf{U}_{k+1}^\lambda = \mathbf{U}_k^{FS} - \lambda_k \nabla g(\mathbf{U}_k) \quad (4)$$

where, λ is the finite-step size that it chose a large value as $\lambda \gg 0$. Also, the reliability index in iterative formula Eq. (2) is written as follows:

$$\beta_{k+1} = \frac{g(\mathbf{U}_k) - \nabla^T g(\mathbf{U}_k) \mathbf{U}_k}{\nabla^T g(\mathbf{U}_k) \alpha_{k+1}^\lambda} \quad (5)$$

The FS approach is as simple as the HL-RF. The finite-step size iterative algorithm is adjusted to the HL-RF method, when $\lambda \rightarrow \infty$. Therefore, the phenomena of convergence failure may occur, when the step length is too large in the FS algorithm. In the iterative process (2) is dependent on the degree of nonlinearity of the limit state function. Therefore, more iteration is needed to attain the stable results for highly nonlinear performance function.

2.2. Selecting the step size

The step size is an important criterion on the iterations of the FS scheme. If $\lambda > \lambda_{\max}$, the iterative sequence of FS algorithm may be failed in highly nonlinear performance function and if λ is chosen too small, the iterative scheme is converged slowly. If λ is well-defined, then convergence of FS algorithm can be obtained, robustly and efficiently. Suppose that λ satisfies Armijo-type line search [5]; the maximum step size has been suggested based on Armijo line search rule as

$$\lambda_{\max} = \frac{M}{\|\nabla g(\mathbf{U}_0)\|} \quad (6)$$

In which, $10 < M < 100$ and $\nabla g(\mathbf{U}_0)$ is gradient vector at the start point in normal standard space. Assume that this step size satisfies the sufficient descent condition i.e. $\nabla^T g(\mathbf{U}_k) \mathbf{d}_k < -c_1 \|\nabla g(\mathbf{U}_k)\|^2$. If $\|\mathbf{d}_k\| > \|\mathbf{d}_{k-1}\|$; therefore, $\lambda \leq \lambda_{\max} / c$ in which $1.2 < c < 1.5$; This step size holds the sufficient descent conditions with Armijo line search as

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda_{k-1} & \text{if } \|\mathbf{d}_k\| \leq \|\mathbf{d}_{k-1}\| \\ \frac{\lambda_{k-1}}{c} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

where, \mathbf{d}_k is the search direction vector that computed as $\mathbf{d}_k = \mathbf{U}_{k+1}^{FS} - \mathbf{U}_k^{FS}$

3. Results and discussion

The computational performance of the FS was compared with the HL-RF by a nonlinear and complex structural performance function in FORM. This example indicated a type of problem with non-normal random variables and a complicated performance function as [2, 3]

$$g = F_s - K_s \times P(E[x_s^2])^{1/2} \quad (8)$$

where, F_s denotes force capacity, P is considered as a deterministic constant with the value of 3 and $E[x_s^2]$ is as follows:

$$E[x_s^2] = \frac{\pi S_0}{4\xi_s \omega_s} \left[\frac{\xi_a \xi_s}{\xi_p \xi_s (4\xi_a^2 + \theta^2) + \gamma \xi_a^2} \times \frac{(\xi_p \omega_p^3 + \xi_s \omega_s^3) \omega_p}{4\xi_a \omega_a^4} \right] \quad (9)$$

In which, $\gamma = \frac{M_s}{M_p}$, $\omega_a = \frac{\omega_p + \omega_s}{2}$, $\theta = \frac{\omega_p - \omega_s}{\omega_a}$, and $\xi_a = \frac{\xi_p + \xi_s}{2}$. S_0 is intensity of the white noise [3]. The means and standard deviations of independent random variables with Lognormal distribution are listed in Table 1.

Table 1. Statistical basic random variables

Random variable	M_p	M_s	K_p	K_s	ξ_p	ξ_s	F_s	S_0
Mean	1	.01	1	0.01	0.05	0.02	100	15
Standard deviation	0.1	0.001	0.2	0.001	0.02	0.01	10	1.5

The safety index value is taken from Ref. [2] and has a value of 2.01646. The convergence history of this example based on the HL-RF and FS methods is shown in Figure 1. It is seen, the HL-RF method is converged to the periodic-2 solution of the reliability index as {4.9807, 4.2170}. The FS algorithm has shown excellent and stable convergence (the reliability index is attained after 46 iterations as $\beta = 2.016643$).

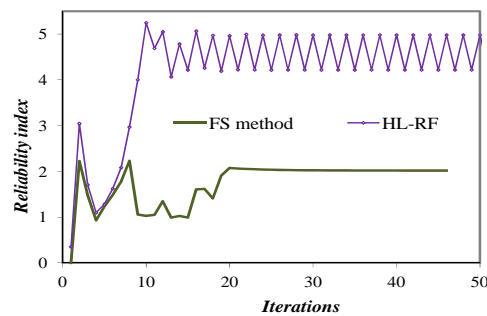


Fig. 1. Iterative history of reliability index based on FORM.

4. Conclusions

A new iterative FORM formula has been proposed to solve complicated structural reliability problems. This method is founded based on the new sensitivity vector using the finite-step size based on Armijo-type line search. The proposed reliability analysis performed better in terms of both accuracy and the number of function evaluations in the same case reliability examples. The FS is proved to be robust and more efficient with the minimum number of iterations to achieve stable results than the HL-RF scheme in nonlinear structural reliability problems. It is concluded that the FS algorithm has better performance compared with the HL-RF method.

5. References

- [1] Gong, J. X., Yi, P., "A Robust Iterative Algorithm for Structural Reliability Analysis", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, 43 (4), 519-527.
- [2] Keshtegar, B., Miri, M., "Introducing Conjugate Gradient Optimization for Modified HL-RF Method", *Engineering Computations*, 2014, 31 (4), 775-790.
- [3] Kiureghian, A. D., Stefano, M. D., "Efficient Algorithm for Second-Order Reliability Analysis", *Journal of Engineering Mechanics*, 1991, 117 (12), 2904-2923.
- [4] Yang, D., "Chaos Control for Numerical Instability of First Order Reliability Method", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 15 (10), 3131-3141.
- [5] Shi, Z. J., Wang, S., Xu, Z., "The Convergence of Conjugate Gradient Method with Nonmonotone Line Search", *Applied Mathematics and Computation*, 2010, 217 (5), 1921-1932.