

بهینه‌سازی چندمعیاری توپولوژی سازه‌ها بر اساس حداکثر کردن سختی و حداقل کردن تنش

هادی سرمستی^۱ و ناصر تقی‌زادیه^{۲*}

^۱ کارشناس ارشد مهندسی عمران - سازه، دانشگاه تبریز

^۲ دانشیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تبریز

چکیده

سختی و مقاومت سازه، دو ویژگی مهم و حیاتی آن می‌باشند. در تحلیل و طراحی سازه‌ها، طراحان همواره به دنبال روش‌هایی هستند که بین این دو ویژگی مهم نوعی تعادل و توازن برقرار کنند. در دهه‌های اخیر تلاش‌های بسیاری روی بهینه‌سازی سختی سازه‌ها صورت گرفته است. لذا در این سازه‌ها همواره نمی‌توان از استحکام آن مطمئن بود. از این‌رو بررسی مقاومت سازه‌ها نیز حائز اهمیت ویژه‌ای است. برای حداکثر سازی مقاومت سازه لازم است که تنش حداکثر ایجاد شده در بخش‌های مختلف سازه حداقل گردد. در همه تحقیقات گذشته، تنش به عنوان قید بهینه‌سازی قرار گرفته و هرگز به طور مستقیم به عنوان تابع هدف طراحی بررسی نشده است. قید قرار دادن تنش اگرچه کمتر بودن تنش را از یک مقدار ویژه تضمین می‌کند، ولی نمی‌توان انتظار داشت که تنش را به حداقل مقدارش برساند. در بهینه‌سازی هر دوی این معیارها باید توجه داشت که بهینه کردن یکی از این دو معیار به مفهوم بهینه‌سازی معیار دوم نیست، در نتیجه بهینه‌سازی هر دو معیار هم‌زمان باید مورد توجه قرار گیرد. در تحقیق حاضر، روش ESO برای بهینه‌سازی اندازه سازه‌ها بر اساس بهینه‌سازی هم‌زمان سختی و مقاومت استفاده شده است. برای ایجاد یک معیار کلی حاصل از دو معیار، از روش وزنی و ضرایب وزن استفاده شده است و در نهایت ترکیب خطی دو معیار وزن‌دار، معیار کلی سازه را تشکیل می‌دهد. برای تحلیل و طراحی سازه‌های بهینه‌ی مورد بررسی در این تحقیق، برنامه‌ای در محیط MATLAB ایجاد شده است.

واژگان کلیدی: بهینه‌سازی چند معیاری، بهینه‌سازی چند موضوعی، حداکثر کردن سختی، حداقل کردن تنش ماکزیمم، حداکثر کردن مقاومت.

۱- مقدمه

سازی معیار تنش با حداکثر ساختن معیار سختی متفاوت بوده و با سخت‌تر کردن یک سازه نمی‌توان انتظار داشت که مقاومت آن نیز حداکثر شود و برعکس.

Xie و همکاران در تحقیقی به این نتیجه رسیدند که در سازه‌ای که برای تنش طراحی می‌شود، هر بخش از سازه سطح تنش مشابهی دارد. ولی همیشه نمی‌توان انتظار داشت که تنش حداکثر سازه به حداقل مقدارش نزدیک شود [۱].

به نظر می‌رسد که در نظر گرفتن تنش و سختی با هم و به طور هم‌زمان به عنوان تابع هدف طراحی امری ضروری است. بهینه‌سازی بدین شیوه شاخه‌ای از بهینه‌سازی تحت عنوان بهینه‌سازی چند موضوعی^۱ (چند معیاری^۲، بهینه‌سازی برداری^۳) می‌باشد.

در اکثر سازه‌های مهندسی، سختی و مقاومت دو کمیت قابل توجه و مهم می‌باشند. معمولاً طراحان سازه به دنبال روش‌هایی برای ایجاد تعادل بین این دو کمیت هستند. بر این اساس همواره سعی شده است، که روش‌هایی برای ایجاد نوعی تعادل مابین این دو کمیت ارائه شوند به نوعی که هر دو پارامتر در طرح سازه منظور گردند. بر این اساس بهینه‌سازی سازه برای این دو کمیت مورد توجه بوده است.

در دهه‌های اخیر، بهینه‌سازی سازه‌ها بر اساس سختی به طور قابل ملاحظه‌ای مورد توجه قرار گرفته است. در این تحقیقات نرمی متوسط به عنوان تابع هدف فرمول‌بندی شده است و حجم یا وزن سازه به عنوان قید بهینه‌سازی در نظر گرفته شده‌اند. با این حال همیشه نمی‌توان از دوام و استحکام سازه مطمئن بود مگر این که تنش سازه در نقاط مختلف بررسی شود. در تحقیقات بعدی برای این که تنش ماکزیمم ایجاد شده در سازه کنترل گردد، معمولاً تنش به عنوان قید بهینه‌سازی در نظر گرفته شده است. این نکته حائز اهمیت است که حداقل-

1- Multiobjective optimization
2- Multicriteria optimization
3- Vector optimization

۲- مواد و روش‌ها

۲-۱- بهینه‌سازی چندمعیاری با روش ESO

بهینه‌سازی را در دو حالت کلی تک معیاری و چند معیاری می‌توان بررسی نمود. در بهینه‌سازی تک معیاری که متداول‌ترین نوع بهینه‌سازی است، فقط یک تابع هدف وجود دارد. این متغیر در واقع مهم‌ترین پارامتر سازه است و پارامترها و ویژگی‌های دیگر سازه را به نوعی در بر دارد. برای مثال در بهینه‌سازی خرپاها معمولاً وزن به عنوان تابع هدف بهینه‌سازی انتخاب می‌شود. در بسیاری از مسائل بهینه‌سازی تعیین یک پارامتر به عنوان مهم‌ترین ویژگی یک سازه دشوار و گاه غیرممکن است. برای بهینه کردن چنین مسائلی از بهینه‌سازی چند معیاری استفاده می‌کنیم. در بهینه‌سازی چند معیاری تابع هدف را به دو صورت می‌توان تعریف نمود. در حالت اول هر پارامتر به عنوان یک تابع هدف انتخاب می‌شود و حل دستگاه معادلات حاصل از توابع هدف بهترین حل مسئله خواهد بود. در حالت دوم، برای هر معیار ضریب وزن تعریف می‌شود و ترکیب خطی معیارهای وزن‌دار معیار کلی را تشکیل می‌دهد [۱]. حالت دوم به دلیل این که ساده‌تر است دارای محبوبیت بیشتری است و در این تحقیق از این روش برای تشکیل تابع هدف استفاده خواهد شد.

روش بهینه‌سازی تکاملی سازه‌ها (ESO)، نخستین بار در سال ۱۹۹۲، با هدف آسان‌سازی روش‌های برنامه‌نویسی ریاضی قدیمی، ارائه گردید. روش کار به این صورت است که مصالح از نواحی که نیاز کمتری بدان‌ها است یا به طور کلی مورد نیاز نیست، حذف می‌شوند؛ یا به نواحی که نیاز بیشتری به مصالح داشته باشند اضافه می‌گردند. سازه‌ای که با این روش ایجاد می‌شود، گامی برای رسیدن به حالت بهینه آن می‌باشد. لذا با تکرار این فرآیند می‌توان به سازه بهینه دست یافت. الگوریتم تکرار این روش هم از لحاظ مفهوم فیزیکی و هم از لحاظ پیاده‌سازی محاسبات آن بسیار ساده است. به علاوه، معیارهای طراحی مختلف یا ترکیب آن‌ها را به سادگی می‌توان با این روش بهینه نمود.

در بهینه‌سازی چند معیاری از روش‌های متداول بهینه‌سازی مانند الگوریتم ژنتیک، بهینه‌سازی تکاملی سازه (ESO) و ... می‌توان استفاده کرد. با توجه به این که ESO روشی ساده و مناسب برای بهینه‌سازی سازه‌ها است، در این تحقیق از این روش برای بهینه‌سازی چند معیاری استفاده می‌کنیم. در روش ESO، در ابتدا معیاری برای بهینه‌سازی سازه تعریف می‌شود و سپس بر اساس این معیار، قسمت‌های غیرمفید سازه طی

چندین تکرار حذف می‌شوند. در نتیجه تعیین معیار بهینه‌سازی سازه نقش اساسی در بهینه‌سازی دارد [۲].

ESO چند معیاری^۱ دنباله‌ای از ESO معمولی است. که در آن معیارهای مختلف طراحی با هم ترکیب می‌شوند. در این روش دو، سه یا هر تعداد از معیارها را می‌توان با هم ترکیب نمود. روش کار در ESO بدین شکل است که یک مدل المان محدود از سازه مورد نظر ساخته می‌شود و پس از تحلیل‌های اجزای محدودی که روی سازه انجام می‌شود، روند جابجایی مصالح تا رسیدن به بهترین سازه تکرار می‌شود. برای تشخیص این که المانی ضخامت زائد دارد یا نه از اعدادی موسوم به ضرایب حساسیت استفاده می‌شود. این اعداد میزان اهمیت المان را مشخص می‌کنند. به عبارت دیگر هر چقدر این عدد کوچک باشد، المان مربوطه دارای اهمیت کمتری بوده و برای تغییر در ضخامت گزینه مناسبی می‌باشد و برعکس. این اعداد برای هر معیار به صورت جداگانه تعریف می‌شوند و سپس ترکیب خطی آن‌ها ضریب حساسیت کل را تشکیل می‌دهد [۳].

در روش ESO بازتوزیع مصالح با تغییر ضخامت المان‌های مستعد و یا با تغییر تصادفی ضخامت برخی از المان‌ها صورت می‌پذیرد. در هر دوی این روش‌ها، متغیرهای طراحی به صورت گسسته تعریف می‌شوند.

در این تحقیق، طراحی بر اساس ضخامت متغیر المان‌ها انجام می‌شود ($t_s = \{t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_m\}^T$). لازم به توضیح است که بردار ضخامت از بزرگ‌ترین مقدار به کوچک‌ترین آن مرتب شده است. البته این توزیع ضخامت به هر صورتی می‌تواند انجام پذیرد و الزامی به توزیع یکنواخت وجود ندارد.

در طراحی به روش ضخامت متغیر، دو شیوه برای تغییر ضخامت المان‌ها وجود دارد. شیوه اول به این ترتیب است که در ابتدای طراحی، ضخامت همه المان‌ها حداکثر مقدار در مجموعه ضخامت‌های تعریف شده انتخاب می‌شود و سپس با پیشرفت بهینه‌سازی برای اصلاح ضخامت، از ضخامت‌های المان‌ها کاسته می‌شود. روش دیگر اصلاح ضخامت بدین ترتیب است که در ابتدا ضخامت المان‌ها مقدار متوسط انتخاب می‌شود سپس المان‌هایی که نیازمند افزایش یا کاهش ضخامت هستند، اصلاح می‌شوند. در تحقیق حاضر برای اصلاح ضخامت المان‌ها از روش اول استفاده می‌شود [۴ و ۵].

۲-۲- ضرایب وزن

ضرایب وزن برای دو منظور استفاده می‌شوند:

۱. میزان اهمیت معیارهای مختلف را مشخص می‌کنند.
۲. به کمک آن‌ها می‌توان مابین دو معیار با ماهیت فیزیکی و دیمانسیون مختلف تعادل برقرار کرد.

ضرایب وزن به یک اهمیت نیستند و با هم متفاوت می‌باشند. برای کاستن از مقدار اختلاف ضرایب وزن بعد از محاسبه ضرایب حساسیت، آن‌ها را هم پایه^۱ می‌کنیم [۶]. نمونه‌ای از هم پایه کردن ضرایب حساسیت در بخش‌های بعد ارائه شده است. این ضرایب حساسیت در نهایت برای به دست آوردن یک معیار جدید واحد با هم جمع می‌شوند که این معیار به صورت زیر ارائه می‌شود [۷]:

$$F_{\text{multicrit}}^i = \sum_{j=1}^N W_j R_j \quad (1)$$

که $F_{\text{multicrit}}^i$ تابع هدف چند معیاری، W_j فاکتور وزن معیار j ام می‌باشد ($W_j \geq 0$) و $R_j^i = \frac{a_j^i}{a_j^*}$ است که نسبت ضریب حساسیت هم پایه شده معیار j ام برای المان i ام به مقدار ماکزیمم مقدار آن برای معیار j ام می‌باشد و N تعداد کل معیارها است. برای وزن‌های معیارها داریم:

$$\sum_{j=1}^N W_j = 1 \quad (2)$$

۲-۳- معیار تنش^۲

اصولاً در سازه، شکست در نقاط پرتنش اتفاق می‌افتد؛ یا به عبارتی قسمت‌هایی از سازه که تنش یا کرنش کمی دارند، تأثیر چندانی روی مقاومت سازه ندارند. در یک سازه ایده‌آل، تنش در تمام نقاط مشابه و نزدیک به یک مقدار ایمن است. بر این اساس مواد زائد در سازه را می‌توان حذف کرد. سطح تنش هر المان با مقایسه تنش فون میزس^۳ آن المان با مقدار ماکزیمم [۸] یا متوسط [۶] این تنش در کل سازه به دست می‌آید. در پایان هر تحلیل المان محدود، کلیه المان‌هایی که شرط زیر در موردشان صدق می‌کند از مدل حذف می‌شوند [۲].

$$\sigma_{vm} < RR_i \times \sigma_{vm}^{\max} \quad (3)$$

که RR_i نسبت حذف المان^۴ می‌باشد. چرخه المان محدود و حذف المان با استفاده از یک مقدار ثابت RR تا رسیدن به یک حالت پایدار ادامه می‌یابد بدین معنی که دیگر المانی برای حذف در آن تکرار وجود نداشته باشد. در این مرحله نرخ تکامل (ER) به نسبت حذف المان اضافه می‌شود تا نسبت حذف جدید تعریف شود [۲].

$$RR_{i+1} = RR_i + ER \quad (4)$$

با نسبت حذف المان جدید روند حذف المان تا رسیدن به یک حالت پایدار جدید ادامه می‌یابد.

۲-۴- معیار سختی

در طراحی سازه، انرژی کرنشی^۵ یا نرمی متوسط^۶ سازه معمولاً مقداری عکس سختی کل سازه دارند. از این جهت، حداکثر کردن سختی کل سازه معادل با حداقل کردن این پارامترها می‌باشد [۳]. با توجه به این موضوع، عدد حساسیت سختی تعریف می‌شود.

۲-۵- ضرایب حساسیت

۲-۵-۱- ضریب حساسیت سختی

با تغییر ضخامت المان I ماتریس تغییرات سختی این المان به صورت $\Delta K_i = K_i(t - \Delta t) - K_i(t)$ تعریف می‌شود [۷]. در روش المان محدود رفتار استاتیکی سازه توسط معادله (۶) بیان می‌شود.

$$Ku = P \quad (5)$$

نرمی متوسط سازه عبارت است از [۷]:

$$C = \frac{1}{2} P^T u = \frac{1}{2} P^T K^{-1} P \quad (6)$$

بنابر این با یک بردار نیروی غیرمتغیر، اگر C مینیمم گردد سختی کل سازه حداکثر می‌شود [۷]. در حالتی که ضخامت

4- Rejection ratio
5- Strain energy
6- Mean compliance

1- Normalize
2- Strees criterion
3- Von Misess

۲-۵-۲- ضریب حساسیت تنش

در حداقل کردن تنش، این کمیت به عنوان یک تابع هدف در نظر گرفته می‌شود. بنابر این محاسبه‌ی تغییرات تنش در یک المان ناشی از تغییر ضخامت سایر المان‌ها امری ضروری است. بدون این که به کلیت مسئله لطمه‌ای وارد شود، حالت تنش صفحه‌ای در نظر گرفته می‌شود. بدیهی است که معادلات ارائه شده در این قسمت را برای حالت‌های دیگر تنش می‌توان تعمیم داد [۳ و ۷].

در تحلیل المان محدود، بردار تنش المان k ، $\sigma = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}_k^T$ را با استفاده از بردار تغییر مکان‌های گرهی، $u^k = \{u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_n\}_k^T$ به صورت زیر می‌توان تعیین نمود [۲].

$$\sigma = DBu_k \quad (12)$$

در روابط فوق، n تعداد درجات آزادی سازه است. D و B نیز به ترتیب ماتریس خواص مصالح و ماتریس کرنش‌ها می‌باشند. تغییر در تنش المان k به خاطر تغییر ضخامت در المان i را با رابطه زیر می‌توان بیان نمود [۷].

$$\Delta\sigma = \{\Delta\sigma_{xx}, \Delta\sigma_{yy}, \Delta\sigma_{xy}\}_k^T = DB\Delta u_k \quad (13)$$

که بردار $\Delta u_k = \{\Delta u_1, \Delta u_2, \dots, \Delta u_j, \dots, \Delta u_n\}_k^T$ معرف تغییر مکان المان k است. از بخش قبل $(j=1,2,\dots,n)$ را با عدد حساسیت تغییر مکان می‌توان محاسبه نمود. بنابراین تغییر تنش را با عبارت زیر می‌توان بیان کرد [۷].

$$\Delta\sigma = DB\{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ij}, \dots, \alpha_{in}\}_k^T = DB\alpha \quad (14)$$

بردار $\alpha = \{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ij}, \dots, \alpha_{in}\}_k^T$ که بردار حساسیت تغییر مکان نامیده می‌شود، نشانگر تغییرات تغییر مکان مؤلفه‌های گرهی المان k به خاطر تغییر ضخامت المان i است. با استفاده از این معادله تنش المان بر اساس مؤلفه‌های تغییر مکان محاسبه می‌شود.

برای مصالح ایزوتروپیک استفاده از تنش فون میزس برای تعیین ظرفیت امری متداول است. برای به دست آوردن تغییر در تنش المان k ناشی از تغییر ضخامت در المان i ، ضریب حساسیت تنش $\alpha_{\sigma_{ij}}$ تعریف می‌شود. این عدد با استفاده از

المان i از سازه اصلاح می‌شود، معادله تعادل (۶) به شکل زیر در می‌آید [۷]:

$$(K - \Delta\hat{K}_i)(u + \Delta u) = P \quad (7)$$

با جایگزینی (۶) در (۸) و صرف نظر از جملات با درجه بالا به معادله زیر دست می‌یابیم:

$$\Delta u = K^{-1} \Delta\hat{K}_i u \quad (8)$$

با جای‌گذین معادله (۹) در معادله (۷)، ضریب حساسیت سختی عبارتست از [۳، ۵ و ۷]:

$$\alpha_{s,i} = \Delta C = \frac{1}{2} u_i^T \Delta K_i u_i \quad (9)$$

کمیت $\alpha_{s,i}$ تغییر در میزان انرژی کرنشی در اثر اصلاح ضخامت المان i را نشان می‌دهد. برای رسیدن به بهینه‌ترین حالت، ضخامت المانی که حداقل مقدار این کمیت را داراست کاسته می‌شود.

برای این که تغییرات در مؤلفه j بردار تغییر مکان (u_j) را محاسبه کنیم، یک بردار نیروی مجازی که f_j که مؤلفه j آن یک است تعریف می‌شود. برای تعیین تغییرات مؤلفه‌ی j تغییر مکان رابطه زیر را خواهیم داشت [۷]:

$$\Delta u_j = f_j^T \Delta u = f_j^T K^{-1} \Delta\hat{K}_i u = u_j^T \Delta\hat{K}_i u \quad (10)$$

پارامترهای معادله فوق از حل معادله $K u_j = f_j$ تعیین می‌شوند. تغییرات تغییر مکان را به کمک رابطه زیر می‌توان حساب نمود [۵].

$$\Delta u_j = u_{ij}^T \Delta K_i u_i = u_{ij}^T [K_i(t) - K_i(t - \Delta t)] u_i \quad (11)$$

مقدار $u_{ij}^T \Delta K_i u_i$ که با α_{ij} نمایش داده می‌شود، عدد حساسیت تغییر مکان نامیده می‌شود و برای تخمین تغییرات جابجایی درجه آزادی i ناشی از تغییر ضخامت المان i از آن استفاده می‌شود.

سختی خواهد بود. برای این که در وقت و هزینه صرفه جویی کنیم، فرمول بندی را به گونه دیگری انجام می دهیم [۷]. با توجه به این که:

$$\Delta\sigma_{vm} = \sum_{j=1}^n (\gamma_j \mathbf{u}_{ij}^T \Delta \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i) = \left(\sum_{j=1}^n \gamma_j \mathbf{u}_{ij}^T \right) \Delta \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i \quad (18)$$

در معادله فوق $\gamma_j \mathbf{u}_{ij}^T$ ($j=1,2,\dots,n$) جواب معادله تعادل $K\tilde{\mathbf{u}}_k = \tilde{\mathbf{f}}$ می باشد.

معادله فوق یک سیستم مجازی جدید را معرفی می کند که در آن هیچ کدام از n مؤلفه بردار نیروی مجازی $\tilde{\mathbf{f}}$ صفر نمی باشند و در درجهی آزادی $\tilde{\mathbf{f}}$ نیز مقدار این مؤلفه برابر γ_j است. با محاسبه $\tilde{\mathbf{u}}_{ik}$ تغییرات تنش عبارت است از:

$$\Delta\sigma_{vm} = \tilde{\mathbf{u}}_{ik} \cdot \Delta \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{u}_i \quad (19)$$

با توجه به معادله اخیر، ضریب حساسیت تنش المان I عبارت است از [۷]:

$$\alpha_{\sigma,i} = \tilde{\mathbf{u}}_{ik} \cdot \Delta \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{u}_i \quad (20)$$

در نهایت ضریب حساسیت کلی المانها به شکل زیر تعریف می شود.

$$\alpha_i = w_s (\alpha_{s,i} / \alpha_{s,max}) + w_\sigma (\alpha_{\sigma,i} / \alpha_{\sigma,max}) \quad (21)$$

گامهای چرخه تکاملی برای کاهش ضخامت به شرح زیر است:

- گام ۱. با استفاده از مش ریز سازه را مش بندی می کنیم.
- گام ۲. بردار ضخامت t_s و پارامتر MRR تعیین می شوند.
- گام ۳. برای سیستم واقعی و مجازی معرفی شده تحلیل های اجزای محدود جداگانه انجام می شود.
- گام ۴. ضرایب سختی و تنش با استفاده از معادلات (۱۱) و (۲۳) محاسبه می شوند.
- گام ۵. ضخامت المانها با کمترین α_i کاهش می یابد.
- گام ۶. گامهای ۳ تا ۵ تا رسیدن به یک حل بهینه تکرار می شوند.

۳- نتایج

تغییرات تنش فون میزس $\Delta\sigma_{vm}$ ناشی از تغییر هندسی المان I محاسبه می شود. تنش فون میزس در حالت دو بعدی را می توان به شکل زیر تعریف نمود [۲].

$$(\sigma_{vm} = g \{ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} \})^2 = \sigma_e^T T \sigma_e \quad (15)$$

که در رابطه ی بالا $\sigma_e = \{ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} \}^T$ بردار تنش المان است. و T ماتریس ضرایب فون میزس است که به فرم زیر بیان می شود:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

در روش اجزای محدود، تنش فون میزس یک المان به صورت میانگین تنش در نقاط گوسی آن تعریف می شود [۲].

$$\sigma_{vm} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [u^T \cdot B^T \cdot D^T \cdot T \cdot D \cdot B \cdot u]_k, k=1,2,\dots, n \quad (16)$$

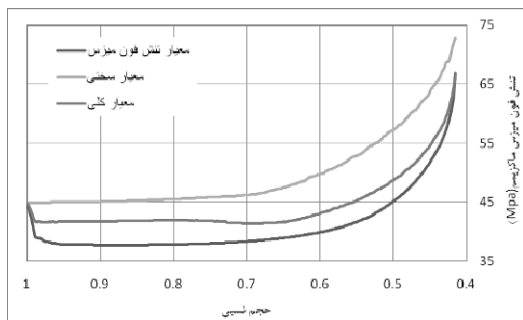
که n تعداد نقاط گوسی است که در این تحقیق ۴ در نظر گرفته شده است و $n=1, 2, \dots, n$ می باشد. تغییرات تنش فون میزس المان را به صورت زیر می توان بیان نمود [۷].

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{vm} &= \frac{\partial g}{\partial \sigma_{xx}} \Delta\sigma_{xx} + \frac{\partial g}{\partial \sigma_{yy}} \Delta\sigma_{yy} + \frac{\partial g}{\partial \sigma_{xy}} \Delta\sigma_{xy} \\ &= \nabla g^T \cdot DB\alpha \\ &= \gamma \alpha \end{aligned} \quad (17)$$

که $\nabla g = \{ \partial g / \partial \sigma_{xx}, \partial g / \partial \sigma_{yy}, \partial g / \partial \sigma_{xy} \}_k^T$ بردار تنش فون میزس است و $\gamma = \nabla g^T \cdot DB\alpha = \{ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j, \dots, \gamma_n \}_k^T$ می باشد.

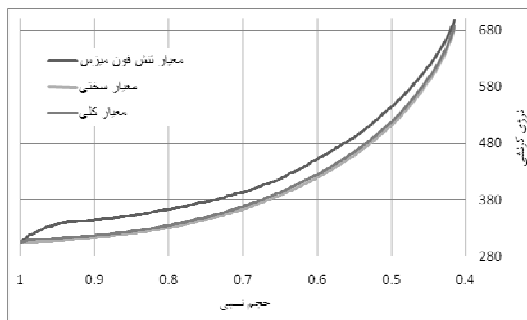
پیش تر، نحوه محاسبه تغییرات تغییر مکانی درجه آزادی $\tilde{\mathbf{f}}$ المان k را با استفاده از بار مجازی یکه، توضیح داده شد. برای محاسبه تغییرات تنش المان k نیز از این ایده استفاده می کنیم. بدین منظور برای هر درجه آزادی، یک سیستم بار مجازی برای استفاده در معادلات باید تعریف کرد. به عبارت دیگر، تعداد سیستم های مجازی مورد نیاز به تعداد درجات آزادی هر المان وابسته است. طبیعی است که محاسبه ضریب حساسیت تنش با این روش خیلی پیچیده تر و پرهزینه تر از محاسبات مربوط به

مقابل نسبت حجم سازه ترسیم می‌شود. شکل (۲) چرخه‌های تکاملی تنش‌های فون میزس حداکثر را برای هر دو معیار نشان می‌دهد. مقدار مینیمم معیار تنش در نسبت حجم ۰/۸۷ تولید می‌شود. از این مرحله به بعد، المان‌ها با ضریب حساسیت تنش دچار افت ضخامت می‌شوند. در نتیجه، مقدار تنش فون میزس افزایش می‌یابد. ولی در حالتی که بهبودسازی سختی مد نظر باشد، یعنی عملیات حذف مصالح بر اساس ضریب حساسیت سختی باشد، تنش حداکثر قابل کنترل نیست.



شکل ۲- چرخه تکاملی تنش فون میزس حداکثر

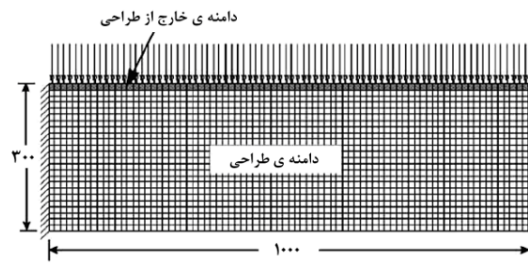
تاریخچه‌های تکاملی انرژی کرنشی در شکل (۳) برای هر دو معیار ترسیم شده است. این دو شکل نشان می‌دهند که حداقل‌سازی تنش و حداکثر کردن سختی در یک دستگاه معادلات ممکن نمی‌باشد.



شکل ۳- چرخه تکاملی انرژی کرنشی

برای دستیابی به بهبودسازی هر دو معیار، ضرایب مورد استفاده در معادله (۲۵) را در مورد این مسئله به کار می‌گیریم. نکته جالب توجه این است که ضرایب وزن W_σ و W_s روی تنش و سختی تأثیر خطی ندارند. این جمله بدین معنی است که وزن‌های ۵۰ درصد - ۵۰ درصد بازگو کننده ارضای مساوی دو معیار نیست. شکل (۴) رابطه مابین ضرایب وزن مختلف و معیارهای سختی و تنش را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل

تیر عمیقی^۱ به ابعاد ۱۰۰۰ میلی‌متر در ۳۰۰ میلی‌متر در طول دو لبه‌ی کوتاهش دارای تکیه‌گاه گیردار^۲ است و تنش یکنواختی به شدت ۱۰ MPa را در طول لبه بالایی‌اش تحمل می‌کند (شکل (۱)). برای این که شرایط بارگذاری برای المان‌ها یکنواخت باشد و نیروهای اعمالی به گره‌های بالائی سازه تأثیری به صورت بار منفرد نداشته باشند، المان‌های متحمل بار را از ناحیه طراحی جدا می‌کنیم.



شکل ۱- مدل اجزای محدود سازه اولیه

مدول الاستیسیته^۳ E و نسبت پواسون^۴ ν به ترتیب ۲۱۰ GPa و ۰/۳ می‌باشند. همچنین به دلیل تقارن، نصف سازه با استفاده از 40×24 المان چهار گرهی تحلیل می‌شود. در انتها و پس از تکمیل شدن روند بهبودسازی وارونه جانبی سازه حاصل، شکل بهینه شده کل سازه را تشکیل می‌دهد. بدیهی است که فقط یک تنش حداکثر در نصف سازه وجود دارد. در نتیجه تنها یک سیستم نیروی مجازی برای تعیین ضرایب حساسیت تنش خواهیم داشت.

در این مثال، تغییرات ضخامت به طور مساوی $\Delta t = 1/0$ در نظر گرفته می‌شود و ضخامت نیز از ۴ تا ۱۰ میلی‌متر متغیر است. یعنی $\{1/0\}^T$ و $4/0$ و $5/0$ و $6/0$ و $7/0$ و $8/0$ و $9/0$ و $10/0$ ، که شامل هفت ضخامت می‌باشد. در ابتدا ضخامت همه‌ی المان‌های طراحی، حداکثر مقدار ممکن یعنی $\bar{t} = 10$ و ضخامت المان‌هایی که جز دامنه‌ی طراحی نیستند، حداقل یعنی $\underline{t} = 4$ میلی‌متر در نظر گرفته می‌شود. نسبت حذف مصالح درصد $MRR = 18/920 \approx 0/2$ (تغییر ضخامت ۱۸ المان در هر تکرار) انتخاب شده است.

برای نشان دادن ارتباط مابین توابع هدف و مصالح حذف شده، تاریخچه تکامل^۵ تنش فون میزس و انرژی کرنشی در مقابل

- 1- Deep beam
- 2- Fully clamped
- 3- Young's modulus
- 4- Poisson's ratio
- 5- Evolution history

فون میزس ۱۶ درصد کاسته شده و انرژی کرنشی در حدود ۱۴ درصد افزایش یافته است. شکل (۵-ب) طراحی بر اساس سختی را نشان می‌دهد. در این حالت نسبت حجم مصالح مانند شکل (۵-الف) می‌باشد. در این طراحی، افزایش انرژی کرنشی فقط ۴ درصد است که ۱۰ درصد از قوی‌ترین سازه کمتر می‌باشد و میزان کاهش انرژی کرنشی در حدود ۱ درصد است. شکل (۵-ج) بهینه کردن هم‌زمان دو معیار را نشان می‌دهد، که در آن تنش حداکثر ۷ درصد کاهش یافته، در حالی که انرژی کرنشی ۵ درصد افزایش دارد.

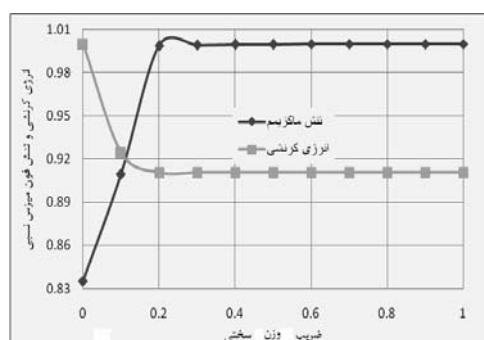
۴- بحث و نتیجه‌گیری

در این تحقیق، کلیات روش ESO چند معیاری برای بهینه کردن اندازه سازه‌ها توضیح داده شد و نحوه محاسبه ضرایب حساسیت تنش و سختی تشریح گردید. نحوه محاسبه ضرایب حساسیت معیارها و همچنین معیار کلی به روش ضرایب وزن توضیح داده شد. دو روش برای اصلاح ضخامت المان‌ها در طراحی به روش ضخامت‌های گسسته توضیح داده شدند و گام‌های بهینه‌سازی روش دوم تشریح گردید. از این روش برای بهینه‌سازی مثال ارائه شده استفاده گردید.

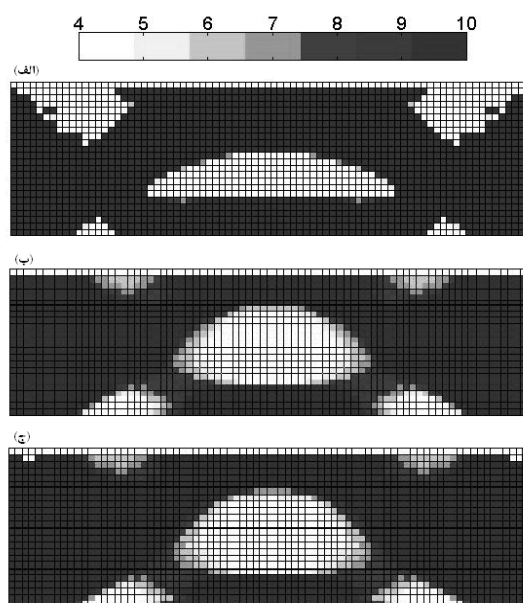
نتیجه ارزشمندی که از این تحقیق می‌توان به آن پی برد این است که توزیع ضخامت قسمت‌های مختلف یک سازه بر اساس سختی آن با توزیع بر اساس مقاومت متفاوت است. به عبارتی سخت‌ترین سازه قوی‌ترین نیست و برعکس. برای این که مابین این دو کمیت مهم سازه بتوان نوعی تعادل ایجاد نمود و به سازه‌ای که هر دو کمیت در طرح آن مدنظر است، دست یافت، ضرایب وزن تعریف می‌گردند. با تعیین دقیق این ضرایب می‌توان مطمئن بود که به سازه‌ای مقاوم و سخت با مقدار مصالح ثابت دست خواهیم یافت.

برنامه‌نویسی ساده و کم دردسر از ویژگی‌های مهم این روش می‌باشد؛ به طوری که با دو تحلیل اجزای محدود و تعیین ضرایب حساسیت و تکرار این فرآیند به جواب مورد نظر می‌توان دست یافت. در این روش، عملیات ریاضی پیچیده‌ای وجود ندارد و ماتریس سختی و همچنین انتگرال‌گیری‌ها به ساده‌ترین روش صورت گرفته‌اند. لذا این روش می‌تواند به عنوان ابزاری بسیار ساده و کاربردی در علوم مهندسی به کار گرفته شود.

دو نمودار در مرحله‌ای از بهینه‌سازی همدیگر (نقطه هم‌گذری^۱) را قطع می‌کنند ($W_s = 0/12$). در واقع در این نقطه دو معیار به طور مساوی در سازه تأثیرگذار هستند و با انتخاب این نقطه به عنوان ضریب وزن سختی می‌توان انتظار داشت که دو معیار به یک میزان در طراحی سازه بهینه نقش داشته باشند. به طور معمول ضریب وزن هم‌گذری بستگی به مسئله مورد نظر دارد. در شکل (۵) مدل‌های بهینه شده سازه برای تنش و سختی و معیار کلی آورده شده‌اند.



شکل ۴- تأثیر ضرایب وزن معیار سختی روی معیارهای مختلف



شکل ۵- طرح‌های بهینه بر اساس معیارهای مختلف:

(الف) طراحی برای حداقل کردن تنش، (ب) طراحی بر اساس سختی، (ج) مدل بهینه برای دو معیار

شکل (۵-الف) توزیع ضخامت بهینه برای معیار تنش برای کاهش حجم ۱۳ درصد مصالح را نشان می‌دهد. اگر مدل بهینه را با سازه‌ی اولیه مقایسه کنیم، مشخص می‌شود که تنش

- Structures, 2000, 75, 647-660.
- [2] Li, Q., Steven, G. P., Xie, Y. M., "On Equivalence between Stress Criterion and Stiffness Criterion in Evolutionary Structural Optimization", Springer, New York, 1999, 18, 67-73.
- [3] Li, Q., Steven, G. P., Xie, Y. M., "Multicriteria Optimization that Minimizes Maximum Stress and Maximizes Stiffness", Computers and Structures, 2002, 80, 2433-2448.
- [4] Xie, Y. M., Steven, G. P., "Evolutionary Structural Optimization", Springer-Verlag, 1997.
- [5] Li, Q., Steven, G. P., Xie, Y. M., "Evolutionary Structural Optimization for Stress Minimization by Discrete Thickness Design", Computers and Structures, 2000, 78, 769-780.
- [6] Koski, J., "Multicriterion Structural Optimization Advances in Design Optimization", Chapman and Hall, London, 1994, pp 194-224.
- [7] Querin, O. M., Proos, K. A., Steven, G. P., Xie, Y. M., "Multicriterion Evolutionary Structural Optimization Using the Weighting and the Global Criterion Methods", AIAA Journal, 2001, 39 (10), 190-202.
- [8] Xie, Y. M., Steven, G. P., "A Simple Evolutionary Procedure for Structural Optimization", Computers and Structures, 1993, 49, 885-896.

۵- فهرست نمادها

\bar{f}	بردار نیروهای مجازی
\bar{u}	بردار جابجایی مجازی
v	نسبت پواسون
C	ماتریس نرمی
d	بردار جابجایی
E	مدول الاستیسیته
f	معیار بهینه‌سازی
F	معیار وزنی
K	ماتریس سختی سازه
p	بردار نیروهای خارجی
R	نسبت ضریب حساسیت
RR	نسبت حذف المان‌ها
S	نسبت ضریب حساسیت‌های حداقل به حداکثر
t	بردار ضخامت المان‌ها
u	بردار جابجایی
V	حجم سازه
$V0$	حجم اولیه سازه
w	ضریب وزن
α	ضریب حساسیت
σ	تنش نرمال

۶- مراجع

- [1] Coelloa, C. A., Christiansenb, A. D., "Multiobjective Optimization of Trusses Using genetic Algorithms", Computers and

EXTENDED ABSTRACT

Multicriteria Topology Optimization of Structures that Maximizes Stiffness and Minimizes Maximum Stress

Hadi Sarmasti , Nasser Taghizadieh *

Faculty of Civil Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

Received: 17 April 2013; **Accepted:** 05 December 2013

Keywords:

Multicriteria optimization, Multiobjective optimization, Stiffness maximization, Maximum stress minimization, Strength maximization.

1. Introduction

Stiffness and strength of a structure are two vital and important parameters. Always designers try to find a method to produce equilibrium between these. Recent decades' investigations focused on optimization of stiffness. In these structures we can not ensure that structure has adequate strength or not. So survey of strength is a very important topic. To maximize the strength we have to minimize the maximum stress of the structures. In all of old researches stress is a constraint rather than objective in the optimization processes. Although this may guarantee the stress within a prescribed constraint (generally less than some limit), it cannot always make the maximum stress a minimum. In optimization of a single criterion (stiffness or strength), other criteria can not be maximum. Hence, multicriteria optimization is a logical method.

2. Methodology

In this research, we use Evolutionary Structural Optimization (ESO) method for size optimization to maximize stiffness and strength of structures. To obtain global criteria, we use weighting method and weight factors. A linear combination of both weighted criteria produces global criteria.

$$F^i_{multicriteria} = \sum_{j=1}^N W_j R^j_i$$

In this equation, W_j is weight factor and R is the criterion. Sum of the weight factors are equal to one. We wrote a MATLAB code for analysis and design of optimum structures.

3. Results and discussion

In order to calculate suitable weight factors for any structure that we use in research, we examined different value of these and optimize the structures for this values. By comparison of the results, we select the best value of weight factors that can optimize strength and stiffness of the structure. This research has two important results:

- a) Thickness distribution at different positions of structure according to stiffness or strength alone does not optimize other criteria in order to have a structure with optimum stiffness and strength; we have to optimize two criteria simultaneously.
- b) Programming ESO method for multicriteria optimization is very easy and simple. We used a MATLAB code for the FE analysis and a loop for repeating the optimization procedure.

* Corresponding Author

E-mail addresses: hadisarmati@gmail.com (Hadi Sarmasti), ntaghiza@tabrizu.ac.ir (Nasser Taghizadieh)

4. Conclusions

Optimization of stiffness alone does not lead to a structure with adequate and vice versa. In order to have a structure with adequate stiffness and strength, we have to optimized the these criteria simultaneously. ESO is a very easy method for multicriteria optimization and programming. We optimize topology of the structures in this research.